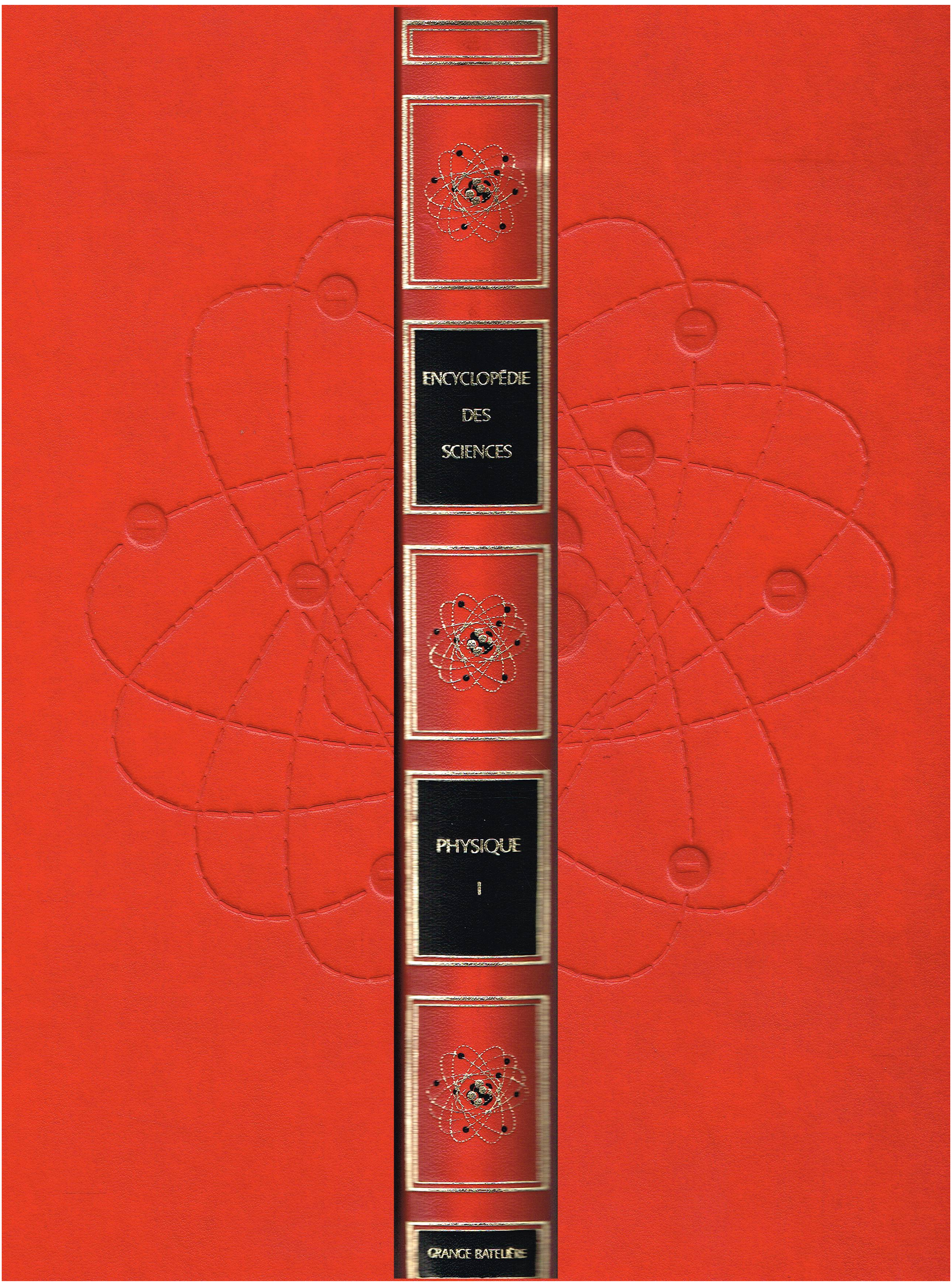
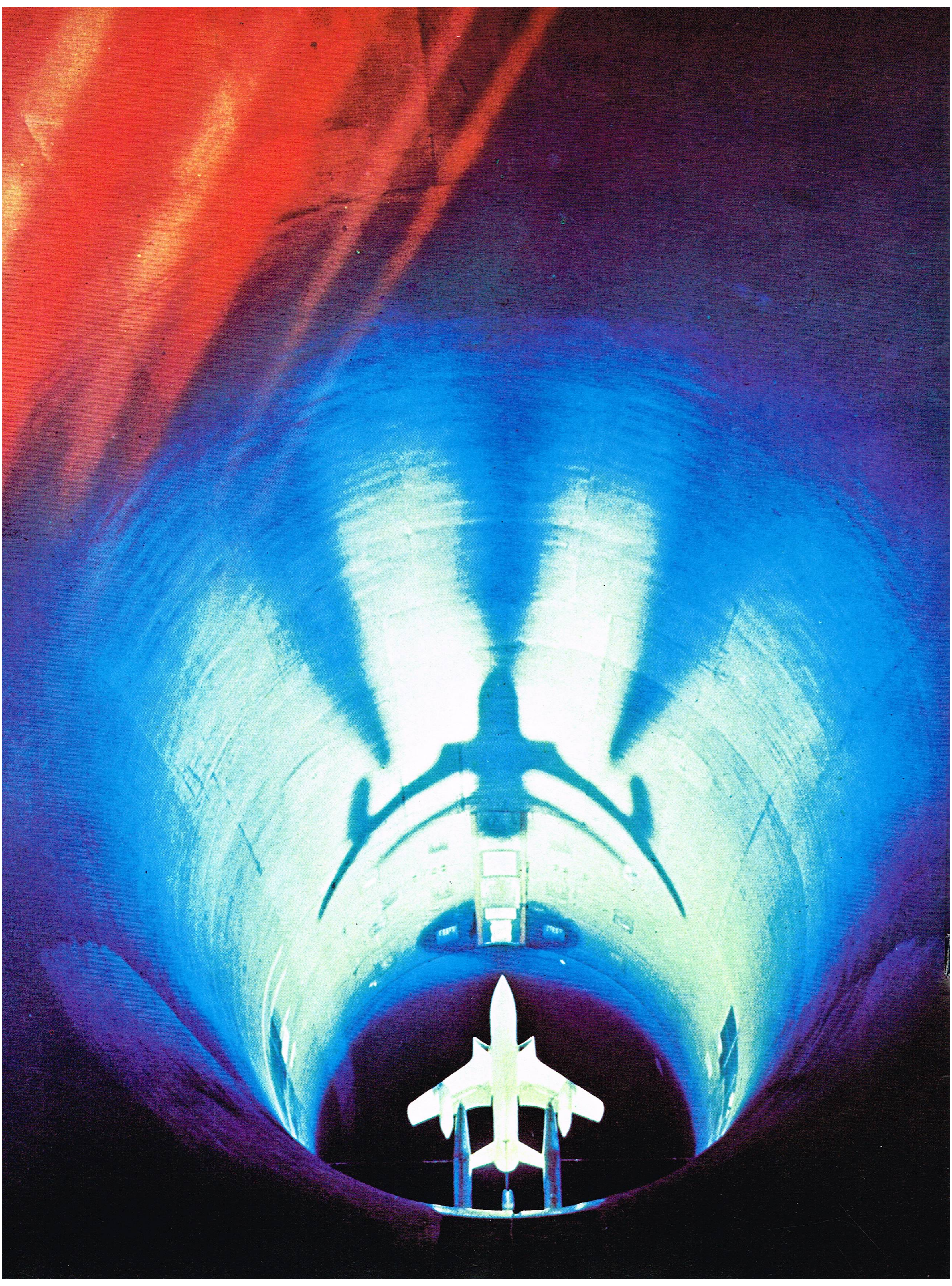

ENCYCLOPÉDIE
DES
SCIENCES
PHYSIQUE
I
GRANGE BATELIÈRE

GRANDE ENCYCLOPÉDIE ALPHA DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

PHYSIQUE
I

GRANGE BATELIÈRE, ÉDITIONS ATLAS, PARIS - ÉDITIONS KISTER, GENÈVE
ÉDITIONS ÉRASME, BRUXELLES-ANVERS



Publiée sous le haut patronage de :
Messieurs les professeurs :
Jean DORST, membre de l'Institut,
Charles FEHRENBACH, membre de l'Institut,
Roger HEIM, membre de l'Institut
Monsieur l'amiral André JUBELIN,
Messieurs les professeurs :
Pierre LÉPINE, membre de l'Institut,
Louis LEPRINCE-RINGUET, de l'Académie française,
Jean-François LEROY, professeur au Muséum national d'histoire naturelle,
Henri NORMANT, membre de l'Institut,
Monsieur Jacques PICCARD, docteur ès sciences h.c.

Ont collaboré à ce volume :

F. AKOUM pour histoire de la physique, méthode expérimentale
et concepts fondamentaux de la physique.
G. DREYFUS pour la mécanique.
P. FLAUD, D. GEIGER, C. ODDOU pour l'aérostatique et l'aérodynamique;
l'hydrostatique et l'hydrodynamique.
C. KLAPISZ pour la thermodynamique.
W. LE GOAN pour électricité et magnétisme.
J. et C. LEWINER pour l'acoustique.
P. MINÉ pour l'optique.

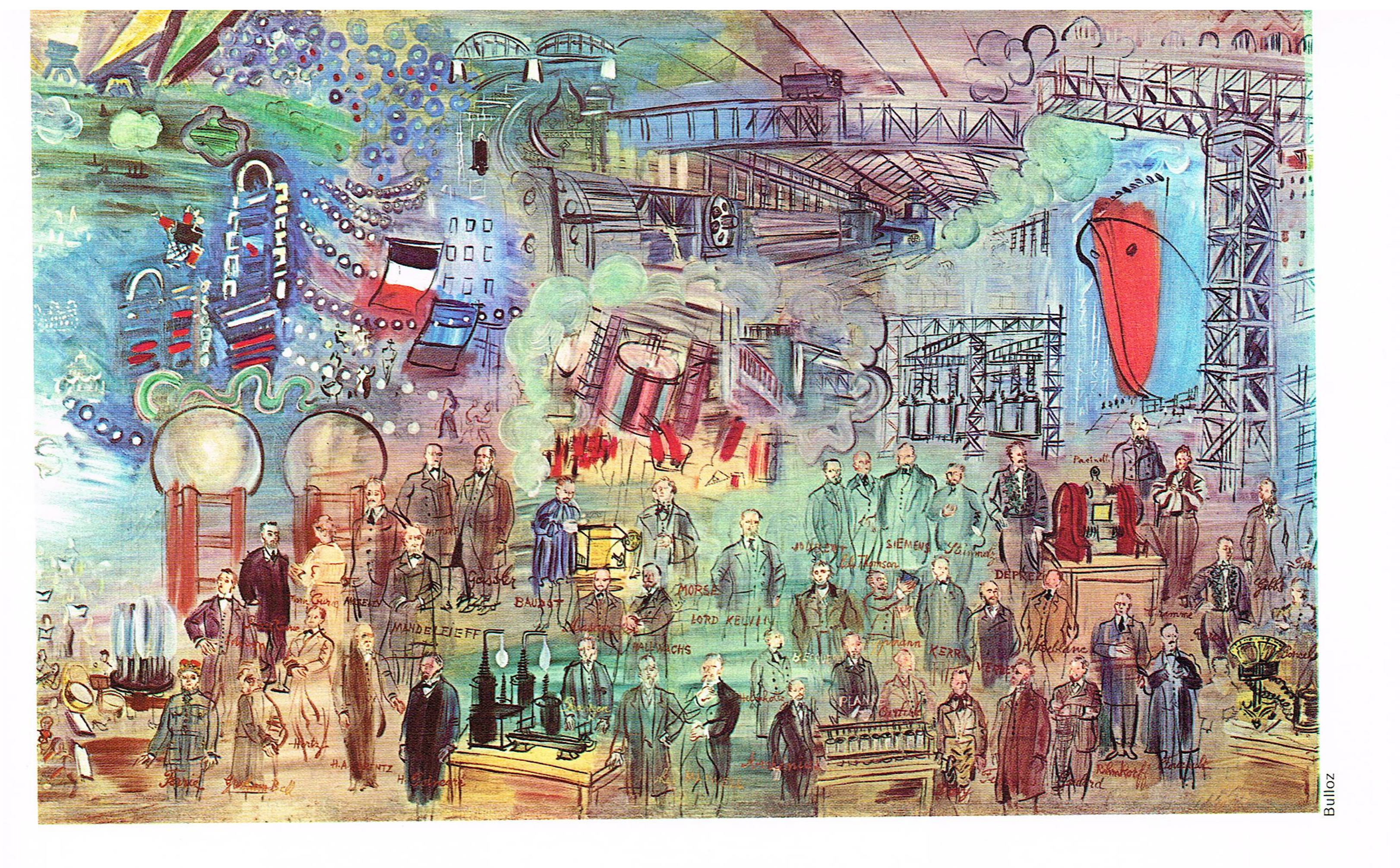
Les schémas portant la référence Richard Colin
ont été réalisés d'après des croquis fournis par les auteurs.

Réalisation	IDÉES ET ÉDITIONS 16, avenue de Friedland, 75008 Paris
Comité de direction	Simone DEVAUX, Uberto TOSCO.
Rédaction	Françoise MENU, Monique LIONS-GENTIL, Vanina DORÉ, Marie-Noëlle PAILLETTE.
Recherche de l'illustration	Mathilde RIEUSSEC.
Mise en pages	Tito TOPIN et Serge BROCHE.
Illustrations techniques	Richard COLIN.
Coordinateur des dessins	Mario LOGLI.
Fabrication	Sylvia COLIN, Jocelyne TÉPÉNIER.
Directeur de la publication	G. BORDES.

S.E.F.

Dans ce volume :

LA PHYSIQUE (I)



Bulloz

▲ **La Fée Électricité,** ***détail de l'esquisse de Dufy (musée d'Art moderne, Paris)*** **[*Spadem, 1976*].**

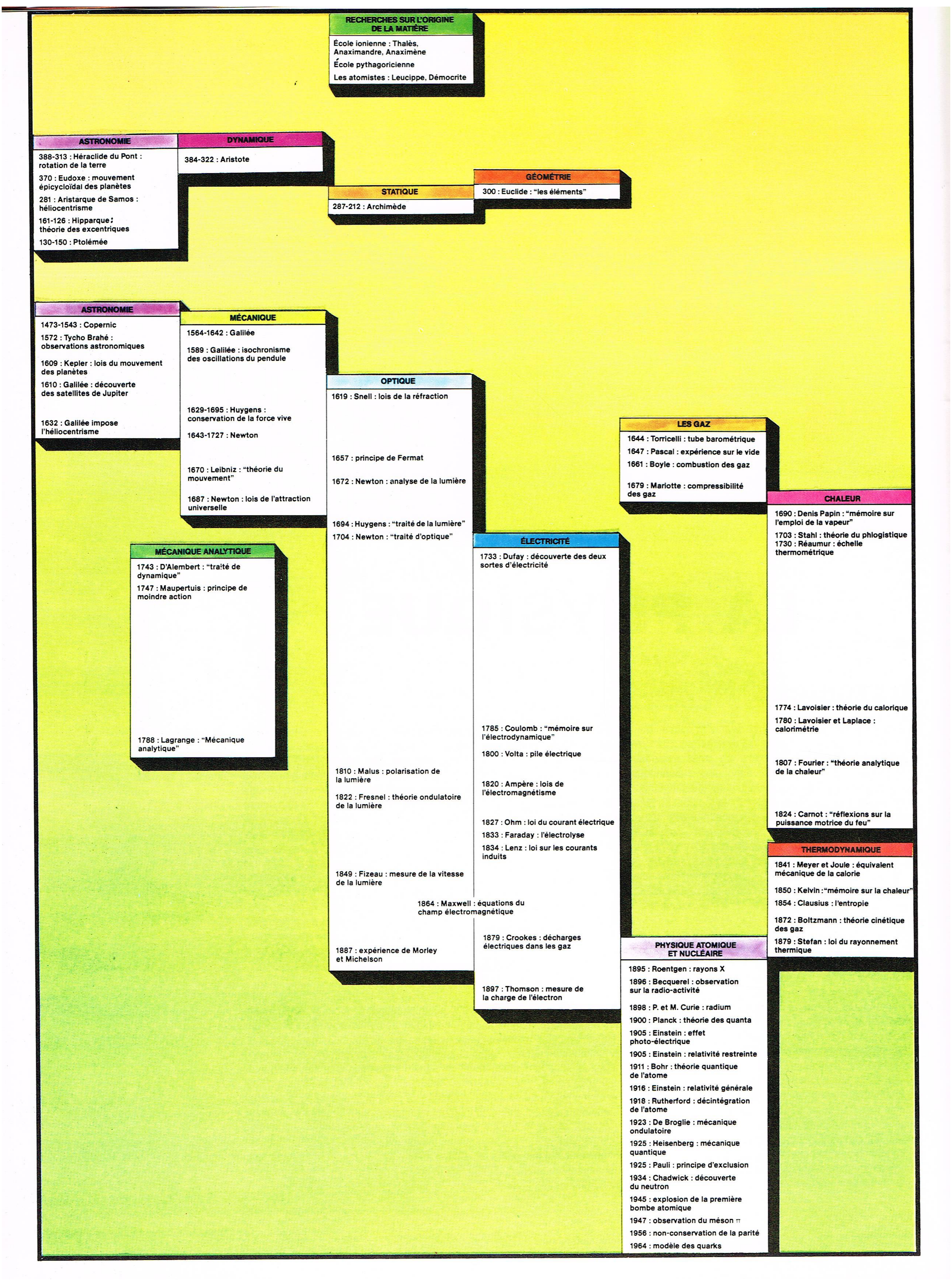
LA PHYSIQUE

HISTORIQUE

Les recherches portant sur l'origine de la physique sont d'emblée hypothétiques et provisoires; et, bien souvent, à une information concrète et vérifiée vient suppléer un ensemble de spéculations « philosophiques » pleines de présupposés. Il est donc largement aléatoire de déclarer que l'activité scientifique s'est révélée être une nécessité et que seule l'observation a permis aux premiers hommes de réaliser le premier catalogue de problèmes. Une antique tradition venue de Grèce fait remonter les premières recherches mathématiques et physiques aux Babyloniens et aux Égyptiens. Aristote rapporte que la naissance de la géométrie est due aux arpenteurs de la vallée du Nil. Cependant l'essentiel de nos connaissances ne permet que d'insister sur les découvertes technologiques attribuées aux Égyptiens et aux Babyloniens. Par exemple, on doit mentionner les travaux de métallurgie (martelage, fonte et alliage), les travaux de tissage, ainsi que ceux de poterie, pratiqués couramment plus de 3 000 ans avant J.-C. L'ensemble de ces travaux suppose acquise la connaissance du principe du tour de potier, de la roue, etc. On date la naissance de l'écriture vers 4 000 avant J.-C.; moyen essentiel de stockage des connaissances, elle semble alors avoir été réservée à des fins religieuses. Aux Égyptiens on doit aussi la mise au point du premier calendrier, ce qui suppose là aussi une longue suite d'observations et une bonne conservation de celles-ci. Cela suppose également une technique de numération; la plus connue est celle des Babyloniens, qui utilisaient un système numérique à base 60. Cela montre qu'ils avaient acquis une maîtrise de l'arithmétique qui leur a permis simultanément de procéder aux premières enquêtes astronomiques.

Jusqu'à l'époque de la Renaissance, les civilisations asiatiques ont développé une science et une technologie au moins égales à celles de l'Europe. C'est en particulier le cas pour l'Inde et la Chine. Ainsi fut inventé au IIIe siècle avant J.-C. ce qu'on nomme aujourd'hui la numération arabe. Les mathématiques chinoises comportaient une algèbre développée, et leur fusion avec les sciences de la nature était assez avancée. Parmi les nombreuses inventions chinoises, citons le papier, l'imprimerie, la poudre à canon, la boussole magnétique, l'art du forage et la roue hydraulique. Le caractère bureaucratique de la société chinoise semble ensuite avoir inhibé le développement scientifique. Peut-être est-ce ce qui explique que la vision organique du monde qui était celle des Chinois n'a pas entraîné l'apparition d'une véritable physique, comme cela a été le cas en Europe avec le règne du quantitatif. On ne saurait oublier cependant que le savoir chinois, par l'intermédiaire de la culture arabe, a pénétré l'Occident chrétien durant de nombreux siècles.

Si les sources extra-européennes du savoir scientifique restent pour une large part méconnues, on peut néanmoins situer un moment décisif de son apparition dans l'explosion culturelle de la péninsule méditerranéenne à partir du VIe siècle avant J.-C.


RECHERCHES SUR L'ORIGINE DE LA MATIÈRE
École ionienne : Thalès, Anaximandre, Anaximène
École pythagoricienne
Les atomistes : Leucippe, Démocrite
ASTRONOMIE
388-313 : Héraclide du Pont : rotation de la terre
370 : Eudoxe : mouvement épicycloïdal des planètes
281 : Aristarque de Samos : héliocentrisme
161-126 : Hipparque : théorie des excentriques
130-150 : Ptolémée
DYNAMIQUE
384-322 : Aristote
GÉOMÉTRIE
300 : Euclide : "les éléments"
STATIQUE
287-212 : Archimède
ASTRONOMIE
1473-1543 : Copernic
1572 : Tycho Brahé : observations astronomiques
1609 : Kepler : lois du mouvement des planètes
1610 : Galilée : découverte des satellites de Jupiter
1632 : Galilée impose l'héliocentrisme
MÉCANIQUE
1564-1642 : Galilée
1589 : Galilée : isochronisme des oscillations du pendule
1629-1695 : Huygens : conservation de la force vive
1643-1727 : Newton
1670 : Leibniz : "théorie du mouvement"
1687 : Newton : lois de l'attraction universelle
OPTIQUE
1619 : Snell : lois de la réfraction
1657 : principe de Fermat
1672 : Newton : analyse de la lumière
1694 : Huygens : "traité de la lumière"
1704 : Newton : "traité d'optique"
1810 : Malus : polarisation de la lumière
1822 : Fresnel : théorie ondulatoire de la lumière
1849 : Fizeau : mesure de la vitesse de la lumière
1864 : Maxwell : équations du champ électromagnétique
1887 : expérience de Morley et Michelson
LES GAZ
1644 : Torricelli : tube barométrique
1647 : Pascal : expérience sur le vide
1661 : Boyle : combustion des gaz
1679 : Mariotte : compressibilité des gaz
CHALEUR
1690 : Denis Papin : "mémoire sur l'emploi de la vapeur"
1703 : Stahl : théorie du phlogistique
1730 : Réaumur : échelle thermométrique
1774 : Lavoisier : théorie du calorique
1780 : Lavoisier et Laplace : calorimétrie
1807 : Fourier : "théorie analytique de la chaleur"
1824 : Carnot : "réflexions sur la puissance motrice du feu"
MÉCANIQUE ANALYTIQUE
1743 : D'Alembert : "traité de dynamique"
1747 : Maupertuis : principe de moindre action
1788 : Lagrange : "Mécanique analytique"
ÉLECTRICITÉ
1733 : Dufay : découverte des deux sortes d'électricité
1785 : Coulomb : "mémoire sur l'électrodynamique"
1800 : Volta : pile électrique
1820 : Ampère : lois de l'électromagnétisme
1827 : Ohm : loi du courant électrique
1833 : Faraday : l'électrolyse
1834 : Lenz : loi sur les courants induits
1879 : Crookes : décharges électriques dans les gaz
1897 : Thomson : mesure de la charge de l'électron
THERMODYNAMIQUE
1841 : Meyer et Joule : équivalent mécanique de la calorie
1850 : Kelvin : "mémoire sur la chaleur"
1854 : Clausius : l'entropie
1872 : Boltzmann : théorie cinétique des gaz
1879 : Stefan : loi du rayonnement thermique
PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLÉAIRE
1895 : Roentgen : rayons X
1896 : Becquerel : observation sur la radio-activité
1898 : P. et M. Curie : radium
1900 : Planck : théorie des quanta
1905 : Einstein : effet photo-électrique
1905 : Einstein : relativité restreinte
1911 : Bohr : théorie quantique de l'atome
1916 : Einstein : relativité générale
1918 : Rutherford : décintégration de l'atome
1923 : De Broglie : mécanique ondulatoire
1925 : Heisenberg : mécanique quantique
1925 : Pauli : principe d'exclusion
1934 : Chadwick : découverte du neutron
1945 : explosion de la première bombe atomique
1947 : observation du méson π
1956 : non-conservation de la parité
1964 : modèle des quarks

La physique grecque

En premier lieu, il faut rappeler que la dénomination « physique » ne correspond pas chez les Grecs à ce que nous sommes susceptibles de mettre sous ce terme actuellement. Pour les Grecs la physique est « une recherche sur les causes »; elle est donc apparentée à la médecine (ou biologie) et à l'astronomie; elle est avant tout une enquête, une recherche. Ce n'est que rétrospectivement que l'on peut parler de « physique grecque ».

La physique n'a pas encore d'objet propre; on ne peut la considérer que solidaire d'un ensemble plus vaste, celui des cosmogonies où s'ordonne une pluralité de sens. Réfléchissant à leur place dans le monde, les premiers physiciens sont pour nous poètes, prêtres, gardiens d'une certaine tradition religieuse. Les premières œuvres des physiciens de l'école de Milet (la physique ionienne) traduisent, en un autre vocabulaire, la tradition cosmologique religieuse présente chez Homère et Hésiode. Mais cette traduction fait s'affirmer une fonction de connaissance dégagée des cadres antérieurs de la religion. Une première rationalisation émerge sur le fond d'une vieille tradition; celle-ci n'en est pas pour autant complètement dégagée d'un ensemble d'autres préoccupations. La nouveauté réside, semble-t-il, plus dans un nouveau mode de savoir; celui-ci accueille la discussion critique, l'argumentation, et d'autre part il récuse l'explication de la nature qui ferait appel à des forces surnaturelles, tout en conservant une place pour « les dieux », place extérieure à cette doctrine.

L'école de Milet

Ce qu'on appelle la physique ionienne regroupe les travaux de trois personnages : Thalès, Anaximandre et Anaximène. Leurs conceptions restent bien mal connues et ne le sont que par ce qu'Aristote et autres « doxographes » en ont rapporté. On ne peut donc s'appuyer que sur une très mince documentation pour essayer d'en tracer les grandes lignes. On attribue à ces trois philosophes l'idée de la nécessité d'une recherche de l'origine de la matière. Quelle est pour celle-ci l'élément originaire? Il semble que la renommée de ces personnages soit due aussi, pour une grande part, à leur pratique d'« ingénieur » avant la lettre. Ils auraient été capables d'effectuer les premiers calculs de distances, et on attribue même à Thalès la prévision d'une éclipse.

Enquêtant sur « ce qui est au commencement de tout », Thalès posa que l'élément recherché était l'eau. On doit supposer que la question de savoir comment l'eau pouvait persister dans l'ensemble de tous les autres objets matériels ne se posa qu'ensuite. Aristote rapporte que Thalès aurait déclaré que « la terre est sur l'eau ». C'est donc au sens où Thalès rapporte en dernier ressort l'ensemble des éléments matériels à l'eau qu'il faut entendre cette phrase. Mais l'essentiel tient surtout à la question posée plus qu'à la réponse. Ce qu'inaugure Thalès c'est l'idée d'une recherche tout à fait spécifique : la recherche d'un principe originel de la génération, qui est l'élément ou la matière impérissable de toutes choses.

C'est Anaximandre qui succéda à Thalès dans l'école de Milet; il conserve la question de Thalès, mais lui apporte une nouvelle réponse : le principe recherché n'est pas l'eau mais l'« illimité ». Aristote rapporte que cette modification n'a surgi qu'en raison de la difficulté à rendre compte de l'existence du feu, quand on admet comme Thalès que l'eau est l'élément originel de toutes choses. Une autre source indique qu'Anaximandre conçoit un modèle de développement du monde. Celui-ci serait né d'une semence de chaud et froid, et en conséquence une sphère de feu se serait développée tout autour de l'air entourant la Terre, comme l'écorce autour d'un arbre. Le fait nouveau tient ici à la tentative de rationaliser le développement du monde.

Le troisième penseur de l'école de Milet fut Anaximène. Profitant des leçons de ses maîtres, il chercha à parer aux écueils où celles-ci conduisaient. Reprenant à son tour la question de Thalès, il se mit en quête d'un élément qui, par ailleurs, participerait à l'illimité d'Anaximandre : il posa donc l'air, dont la diffusion était infinie pour lui. Il établit d'autre part une solidarité entre l'âme et le souffle; le pneuma *signifie aussi bien l'unité de l'âme que l'air dans lequel les objets matériels s'établissent. L'air, comme élément, était pensé comme origine des changements qui ne pouvaient se produire que par condensation ou raréfaction de celui-ci. La valeur de toutes ces recherches tient, on l'a vu, plus à la fécondité des questions posées qu'à leur réponse spécifique.*

Les pythagoriciens

Après l'école de Milet, deux groupes sont à retenir de notre étude. Celui des pythagoriciens, et celui des atomistes.

Les pythagoriciens, groupés dans une secte autour de Pythagore, avancent l'idée que les choses sont constituées de nombres, que l'Univers est identifiable à une gamme musicale tandis que l'âme l'est à une lyre. Leur contribution à l'histoire des idées peut être résumée en indiquant la part décisive qu'ils ont prise au développement des méthodes de déduction en mathématique, ainsi qu'à l'introduction d'une idée d'harmonie qui serait présente dans le mécanisme du monde. Nous leur devons de plus la découverte des nombres irrationnels, ainsi que de multiples études obscures sur l'acoustique et l'astronomie.

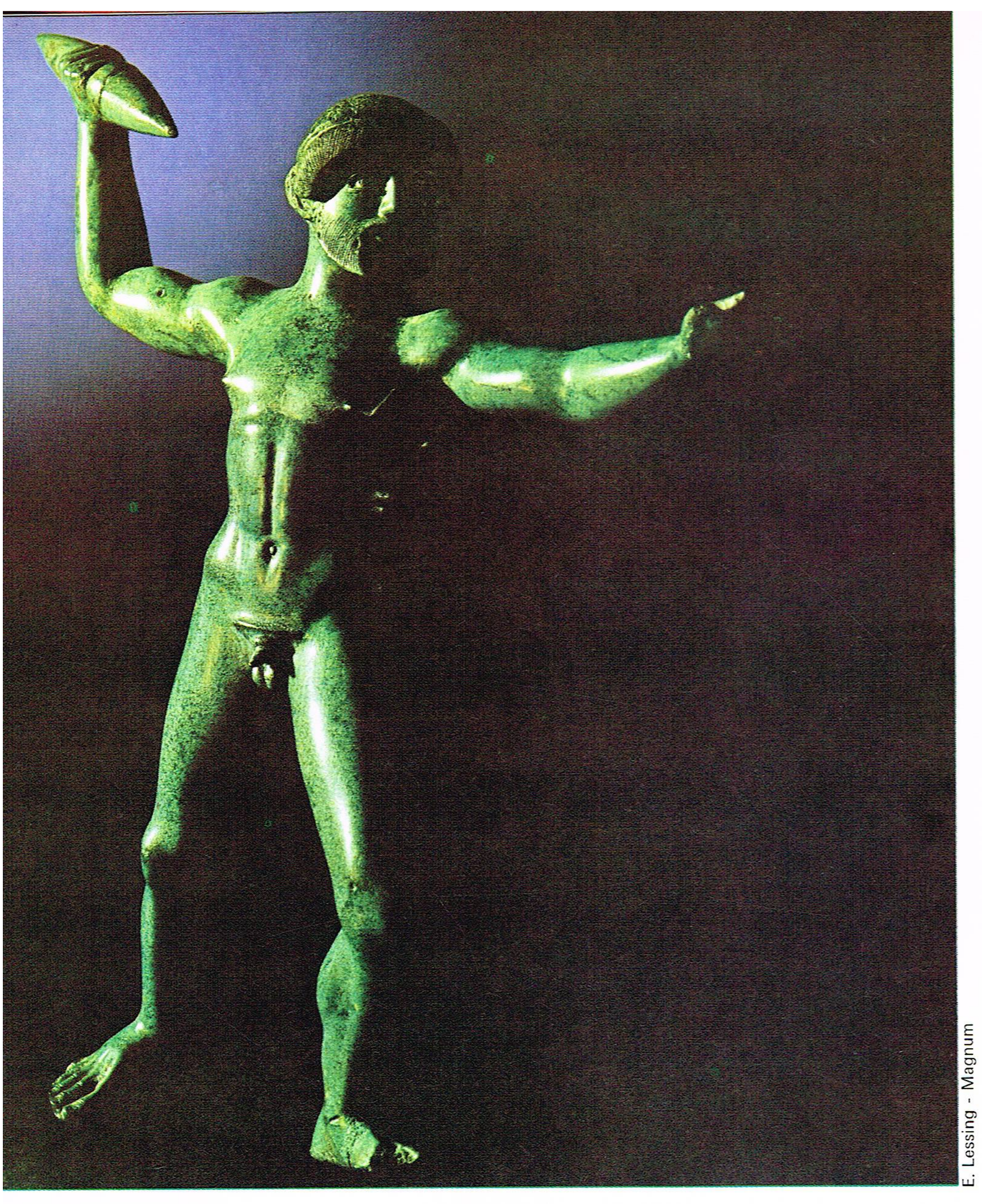
De 500 à 420 avant J.-C., le problème central qui divise les philosophes est celui du changement. Il engage tout le développement virtuel de la physique. D'Héraclite pour qui « toutes choses s'écoulent », à Parménide pour qui nul changement n'est pensable, cette question est reprise en main par ceux qu'on appelle les « physiciens » : Empédocle et Anaxagore. Mais la question du changement est posée dans son étendue la plus large et ne se réduit pas à un problème de « philosophie naturelle »; elle rebondit et sera reprise dans les œuvres des deux penseurs les plus connus de la Grèce : Platon et Aristote.

Empédocle

Auparavant, il faut mentionner l'apport d'Empédocle : celui-ci introduit la notion de « racines » élémentaires desquelles proviennent tous les objets matériels (terre, air, eau et feu). En second lieu, il développe une problématique de la proportion entre ces éléments, destinée à rendre compte de la diversité du sensible.

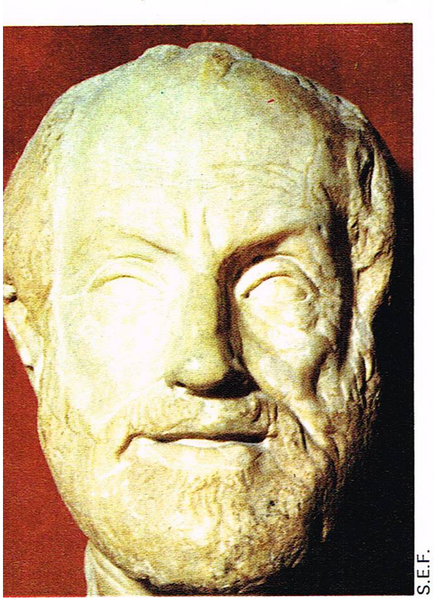
Anaxagore, quant à lui, s'attaquant au problème de la génération, produisait l'hypothèse

◀ ***Page ci-contre, les grandes dates des sciences physiques.***



E. Lessing - Magnum

▲ **Zeus, dieu de la foudre, statuette retrouvée à Dodone (Grèce).**
▼ **Aristote (384-322 av. J.-C.), dont la pensée, codifiée et fixée, continuera à être tenue pour une vérité indépassable jusqu'à la fin du Moyen Age (musée du Louvre, Paris).**



S.E.F.

selon laquelle « en toute chose il y a une portion de toute chose ». Il ouvrait le champ à une spéculation sur l'origine de la matière qui n'était plus hypothéquée par le dénombrement précis des éléments originaires.

Leucippe de Milet et Démocrite

Leucippe de Milet et Démocrite, affrontant les mêmes questions, attribuèrent aux seuls atomes et au vide la réalité. La diversité du sensible ne pouvait être expliquée que par des modifications dans l'arrangement de ces atomes (atome veut dire en grec insécable). La physique est donc alors l'étude des combinaisons possibles d'atomes qui ne sont pas tous de même nature. Le monde s'explique alors par une nécessité mécanique; ainsi, l'ensemble desp ropriétés des corps tient à la plus ou moins grande densité en « pores », par où les atomes passent et se combinent.

L'ensemble de ces doctrines, sommairement résumé, a été longtemps considéré comme des balbutiements dont l'incidence sur l'histoire de la physique a été, somme toute, négligeable.

Il n'en va pas de même pour Platon et Aristote. La pensée du second a été codifiée et fixée et continuera à être tenue pour une vérité indépassable jusqu'à la fin du Moyen Age. Quant à Platon, Galilée s'en recommandera pour tenter de rompre avec la physique d'Aristote encore dominante à son époque. Il faut donc réserver à ces deux penseurs une place privilégiée.

Platon

Platon résume et présente l'essentiel de sa doctrine physique dans le Timée. *Il la présente comme « vraisemblable », puisque intégrée à un mythe. Le monde ne peut être pour lui le fruit d'un hasard : une intelligence l'a produit. Ce que l'homme peut faire, c'est essayer de conjecturer sur les éléments dont a usé cette intelligence, ainsi que sur la manière de l'arrangement de ceux-ci. Le point décisif tient au choix de ces éléments : ce sont pour Platon des figures géométriques (triangles, polyèdres réguliers et cercles). La Terre est sphérique (Platon tire cette idée de Pythagore), immobile ainsi que placée au centre du monde. Reprenant à son compte les préoccupations des astronomes grecs, Platon tente d'expliquer les apparences irrégulières que présente le ciel (surtout le mouvement des planètes). Platon les rapporte à une combinaison de mouvements circulaires et uniformes. D'autre part, les phénomènes physiques, sensations, pathologies, sont eux aussi rapportés à des considérations de géométrie. Un tel privilège tient à toute la philosophie de Platon; le monde conçu par Platon est assimilé à un tout autosuffisant, qui ne peut être que sphérique, forme la plus parfaite pour les Grecs. Et c'est bien parce qu'il y a un ordre dans la nature que celle-ci vaut la peine d'être étudiée; cet ordre manifeste une téléologie (c'est-à-dire une finalité) dans la conception platonicienne.*

Aristote

Avec Aristote, la physique se constitue réellement comme telle; un domaine d'objet lui est prescrit, une méthodologie se constitue, et un ensemble de concepts émerge, codifiés et assurant la mise en forme intellectuelle de la nature. Esprit encyclopédique, Aristote, dont l'influence fut décisive en Occident, systématise et généralise une multiplicité d'intuitions des penseurs qui lui étaient antérieurs. Sa physique n'a rien d'une physique expérimentale, articulée à la mesure et à la mathématisation; elle est une physique des qualités. L'ensemble des modifications de la nature ne se comprend que par la diversité des rapports qu'entretiennent entre eux le chaud et le froid et le sec et l'humide. Les qualités réagissent entre elles de façon à entremêler leurs déterminations; elles forment la matière de tout objet naturel. Tout objet, se composant d'une matière et d'une forme, se laisse placer dans une hiérarchie, selon la plus ou moins grande perfection de sa forme. La nature, dans laquelle rien ne se produit en vain, est comparée, quant à son fonctionnement, à la pratique artisanale; elle se trouve pensée, de ce fait, comme produite, donc comme pourvue d'une finalité. Cette assimilation engage une conception de la nature, régulière, constante et continue : la nature ne fait pas de sauts brusques.

Le problème central de la physique d'Aristote consiste à distinguer les mouvements entre eux (altération, génération, déplacement). Il faut s'arrêter à sa conception du déplacement local, c'est-à-dire à sa théorie des lieux naturels. Dans la nature, tout objet se trouve non seulement déterminé dans la hiérarchie des êtres, par sa matière et par sa forme, mais aussi par sa place et par son lieu d'élection. En ce sens, Aristote privilégie le repos, qui est la règle pour chaque objet, sur le mouvement. Toute tentative de déloger l'objet est pensée comme mou-

vement violent, et par nature l'objet lourd (le grave) vise à revenir à sa place. C'est cette théorie qui rend compte de la chute des corps.

L'historien de la physique A. Koyré dit de la physique d'Aristote qu'elle attribue « une place pour chaque chose et chaque chose à une place ». Cette théorie du lieu naturel contraint Aristote à nier l'existence du vide; le monde étant réglé par un ordre cosmique très strict, toute hypothèse introduisant le vide viendrait introduire un dérèglement de cet ordre. Ainsi, la dynamique d'Aristote soutenait que tout corps inanimé (le javelot par exemple) ne se mouvait qu'autant qu'un moteur exerçait constamment son action sur lui.

Pour l'astronomie, Aristote, prenant à son compte la tradition issue de Platon et d'Eudoxe, décrète que l'Univers est fini et qu'il se compose de deux sphères homocentriques. *Mais il innove en distinguant absolument deux parties dans l'Univers : la* sphère sublunaire, *qui comprend la Terre et tout ce qui se trouve sous la Lune, et le* supralunaire, *lieu d'élection des étoiles. La sphère sublunaire se trouve remplie par une multitude d'éléments périssables et corruptibles. Au contraire, le supralunaire se compose d'un milieu, l'éther (cinquième élément), dans lequel il n'y a de place que pour des objets incorruptibles et donc éternels. Cette distinction très tranchée fut plus tard intégrée dans une perspective théologique par saint Thomas d'Aquin, pour qui le « haut » était divin et le « bas » déchu.*

Mais une série de difficultés était encore présente; d'Aristote à Copernic, la partie de la physique qui suscita les argumentations les plus vives a été l'astronomie. Toute une lignée de savants (Platon, Aristote, mais aussi Hipparque et Ptolémée) vont tenter d'assurer et de perfectionner la théorie de l'Univers à deux sphères homocentriques qu'avait proposée Eudoxe comme première base. Le problème central consistait à rendre adéquate cette théorie avec les observations qu'il était possible de faire. En particulier, il s'agissait, sans changer les hypothèses de travail, de justifier les irrégularités de mouvement, non des étoiles fixes, mais des planètes.

La première brèche ouverte dans la théorie de l'Univers à deux sphères homocentriques le fut par Hipparque : il montra que le centre réel autour duquel tournait le Soleil ne pouvait s'identifier avec la Terre.

Une théorie convergente fut prônée par Ptolémée : c'est le système *dit* des épicycles. *Il consiste à penser que les planètes se meuvent toujours sur une orbite circulaire, dont le centre lui-même suit le tracé d'un autre cercle; le mouvement irrégulier des planètes s'explique alors par la superposition de deux mouvements circulaires réguliers. Cette théorie, géniale, douée d'une grande souplesse, pouvait ainsi justifier de toute irrégularité en couplant à l'infini divers mouvements uniformes qui se résolvaient en un mouvement irrégulier.*

Passé la révolution copernicienne, on a pu s'intéresser rétrospectivement aux cosmologies antiques qui attribuaient un mouvement à la Terre. Les plus célèbres furent celles d'Héraclide du Pont, et surtout d'Aristarque de Samos. Le premier suggéra que le mouvement du Ciel était dû à la rotation journalière de la Terre sur elle-même plutôt qu'à un mouvement de rotation de la sphère des étoiles. Le second avança que le Soleil était au centre d'une sphère des étoiles de grande dimension. Mais ces conceptions restèrent minoritaires; d'autre part, elles semblent avoir été beaucoup plus intuitives, donc moins cohérentes que celle de Ptolémée.

Archimède

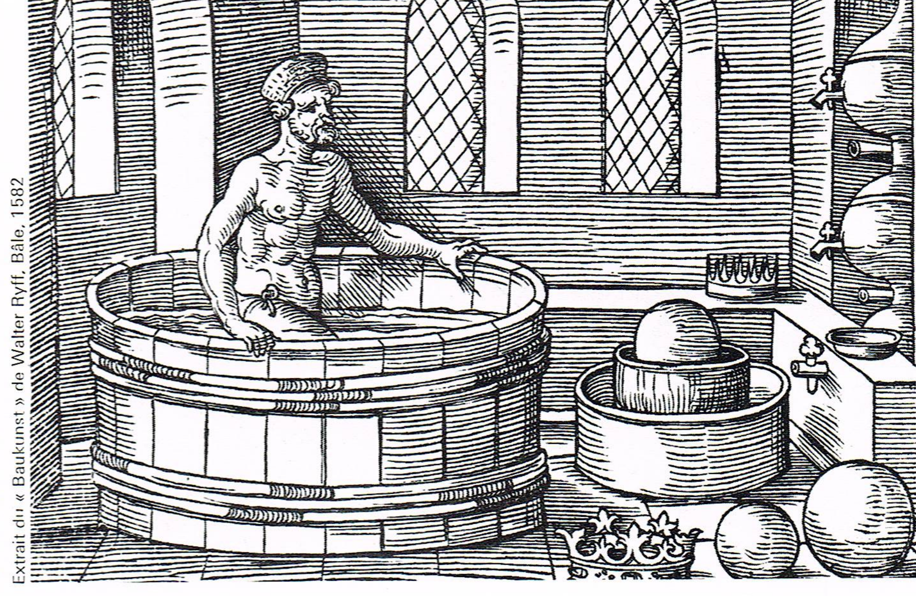
Mais d'autres champs entiers de notre future physique furent défrichés avec le travail d'Archimède. Archimède est reconnu comme un des esprits les plus inventifs aussi bien en physique qu'en mathématiques. Il semble avoir profité de sa connaissance de la mathématique d'Euclide. Sa contribution essentielle à la physique tient à sa promotion d'une partie de la mécanique : la statique. Il fixa la loi d'équilibre du levier, en développant une théorie du centre de gravité, que pourtant il ne définira pas. Il lança aussi les premiers éléments de l'hydrostatique en découvrant une possibilité de mesure des masses volumiques de chaque métal.

Jusqu'à la Renaissance et ses rares précurseurs, il faut surtout considérer que la physique ne s'approfondit que dans les cadres de la science grecque; une armée de moines compile, commente et intègre le système d'Aristote à l'exégèse des textes bibliques. Cette conciliation qui prend des formes diverses aboutit à la mise au clair d'une doctrine à prétention de complétude et extrêmement cohérente. Mais sur ce fond se produiront certains remaniements qui, cependant, n'altéreront pas la physionomie générale des instruments dont dispose l'humanité pour penser son appropriation de la nature.

La physique classique

On peut considérer que la rupture avec la science grecque, avec le cadre cosmologique dans lequel celle-ci s'était constituée, s'est faite avec Copernic, Kepler et Galilée. Mais leurs travaux n'ont été rendus possibles que par un long cheminement de la pensée, une transformation des techniques instrumentales, et surtout par la mise en œuvre d'un nouveau mode de questionnement. Dans le courant de cette vaste période qu'on appelle le Moyen Age, il faudrait mentionner un nombre considérable de personnages.

La physique, quant à elle, comporte trois branches : la mécanique terrestre, l'astronomie et


Extrait du « Baukunst » de Walter Ryff, Bâle, 1582

▼ Archimède *et l'hydrostatique (gravure de la fin du XVIe siècle).*

▶ *A gauche, enluminure extraite du* Traité de la sphère *de* Nicolas Oresme. *A droite,* Christian Huygens, *physicien, mathématicien et astronome hollandais.*


Rapho


Gemeentemuseum

l'optique. Il faudra attendre Newton pour que les deux premières soient réunifiées sous des règles générales. Chronologiquement, c'est la théorie astronomique qui sera la première assaillie. Déjà Nicolas de Cues (1401-1464) est considéré comme l'un des premiers à rejeter la structure hiérarchisée de l'Univers. Mais il faut rappeler une des suites de cette contestation de l'idée d'un monde fini, si bien décrite par A. Koyré : « La bulle du monde a commencé par enfler et s'élargir avant d'éclater. » La physique classique, en attendant d'avoir les moyens conceptuels de penser le monde comme infini, doit d'abord l'élargir. D'autre part, toute une lignée de praticiens, d'ingénieurs en construction repose sur de nouvelles bases les conceptions aristotéliciennes du mouvement; la physique parisienne (avec Buridan et G. Benedetti) mais aussi Albert de Saxe, Nicolas Oresme et Léonard de Vinci s'opposent à Aristote. Pour eux un objet lancé, séparé de ce qui l'a mis en mouvement, persiste à se mouvoir.

Mais pour marquer, du point de vue de la méthode, les traits constitutifs de cette nouvelle physique, il faut mentionner trois principes :

— le cosmos antique va être détruit, et y sera substituée la géométrisation de l'espace;

— la physique va être mathématisée; on passe d'une physique des qualités à une science de l'ordre et de la mesure;

— il y aura mise en œuvre de techniques expérimentales nouvelles et même fictives : des instruments perfectionnés seront mis au point, des expérimentations systématiques avec comparaison des résultats, établissement de correspondances, seront effectuées quotidiennement.

Cela aboutira à briser les cadres de l'ancienne science pour leur en substituer de nouveaux. Tout ceci ne se fera que grâce à la diffusion des résultats d'expériences, à la création progressive de réseaux de correspondances entre savants. Puis, plus tard, des institutions viendront relayer ces diffusions encore hasardeuses; elles auront la charge du stockage des informations, des hypothèses, etc. Les Académies, les sociétés savantes se mettront en étroites relations et par ce biais se constitueront des centres collectifs de travail.

La physique au XVIIe siècle

La mécanique

La mécanique se réduisait dans ses acquis positifs à la statique d'Archimède; mais, par contre, elle se soutenait encore de la différence entre mouvement naturel *et* mouvement violent, *issue d'Aristote. On doit sa constitution à Galilée (1564-1642). Pour Galilée, la science de la nature doit élucider le problème central, celui de la chute des corps. Il faut en découvrir la loi générale. Galilée est un très habile expérimentateur. Pour réaliser ses expériences, il met au point un plan incliné, sur lequel il fait rouler des billes. La physique de Galilée est une physique de la pesanteur. Sans arriver à la formulation correcte de la loi de la chute des corps (qui correspond à un mouvement uniformément accéléré), il l'approche. Pour ce faire, Galilée doit débusquer certains présupposés de l'ancienne physique. En particulier, il doit considérer que tous les corps sont graves, donc susceptibles de chute; il doit affirmer que le repos, comme le mouvement, est à expliquer, à la différence d'Aristote qui considérait le repos comme l'état normal de tout corps. Par là même, Galilée met fin à la théorie des lieux naturels qui faisait obstacle à toute compréhension mathématisée de la chute des corps. Il établit que, dans le vide, tous les corps sont lourds et tombent à la même vitesse. En s'intéressant à la* vitesse *du corps, comprise comme rapport de la distance parcourue au temps écoulé, Galilée mettra au jour la notion d'*accélération. *Dès lors, le mouvement est compris comme une notion générale, indépendante de la présence d'un corps singulier;*

l'espace est géométrisé en tant que la différence qualitative haut/bas ne tient plus ; aucune direction n'est privilégiée. Le mouvement n'est plus un processus, mais un état.

La seconde loi de la physique classique est ici approchée, mais c'est à Descartes (1596-1650) que nous en devons la formulation exacte : « Tout corps abandonné à lui-même persiste dans son état d'immobilité ou de mouvement aussi longtemps que quelque chose ne vient pas le modifier. » Descartes constitue une physique mécanistique (tous les objets naturels et en particulier les animaux peuvent être réduits à des machines ou à des automates). Pour cette raison, ce qui retient son attention est la figure du contact. Il s'intéresse dès lors à la transmission du mouvement. Formulant les lois du choc, Descartes use d'une loi sous-jacente à leur écriture : après le choc, on doit retrouver la même quantité de mouvement que celle qu'on avait antérieurement. Or cette loi, qui stipule l'équivalence entre quantité de matière et quantité de mouvement, apparaîtra erronée.

Il faudra attendre les travaux du Hollandais Christian Huygens (1629-1695), qui, expérimentant sur les horloges, découvrira l'erreur de Descartes et montrera que c'est la force vive qui se conserve. De Descartes à Huygens, on passera de la mécanique statique dont Descartes (mais aussi Roberval [1602-1675], dont l'œuvre avait assimilé la chute des corps à un simple problème d'équilibre des masses) s'était fait le promoteur, à la dynamique qui engage une problématique de la force, ou de la quantité d'action motrice.

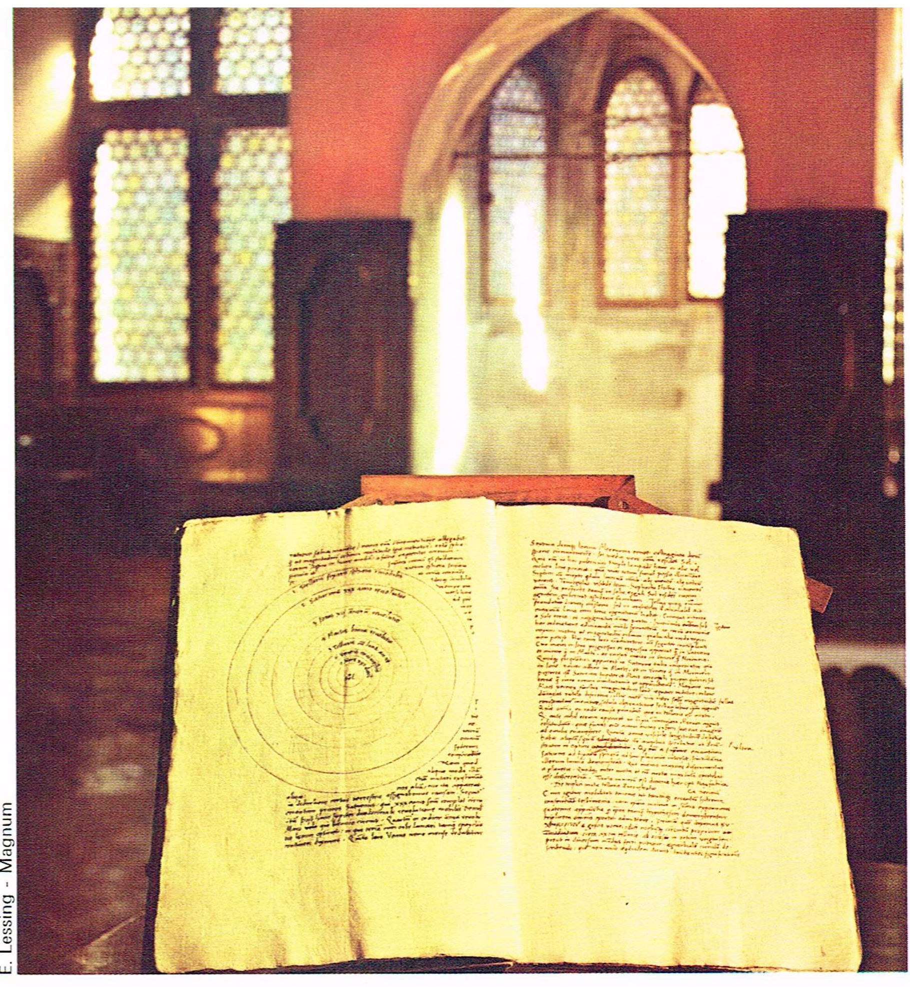
Leibniz (1646-1716), esprit encyclopédique, contribuera à son développement de façon décisive. La querelle concernant la détermination de ce qui se conserve dans le mouvement mécanique occupa la première place pendant une cinquantaine d'années ; pour résoudre ce problème, il fallait distinguer entre elles les variables, les considérer comme réductibles à des grandeurs géométriques, et présupposer que ni la matière, ni l'ordre, ni surtout le mouvement ne sauraient naître spontanément. Trois étapes se dessinent : Galilée détermine la chute des corps, Descartes conçoit le mouvement uniforme et rectiligne, Huygens et Leibniz, refusant d'identifier la matière à l'étendue spatiale, peuvent introduire la notion de force.

Mais c'est surtout Newton (1643-1727) qui unifiera la mécanique en lui donnant sa loi fondamentale : la force est le produit de la masse par l'accélération. Une nouvelle notion est introduite, celle de masse, notion purement physique, qui ne peut plus se confondre avec le poids, notion impure et issue d'une expérience sensible. Le concept de force, lui aussi, est dégagé d'une interprétation sensible et est soumis à la mesure.

Tout le XVIIIe siècle considérait le mécanisme comme seul susceptible de rendre compte du monde terrestre ; Mersenne (1588-1648), qui fut le correspondant inlassable de Descartes, Thomas Hobbes (1588-1679), l'auteur du Léviathan, en furent les protagonistes les plus actifs.

L'astronomie

Mais la physique classique s'est surtout constituée par le biais de l'astronomie. Une suite de découvertes et de travaux mathématiques va aboutir au renversement du système de Ptolémée.

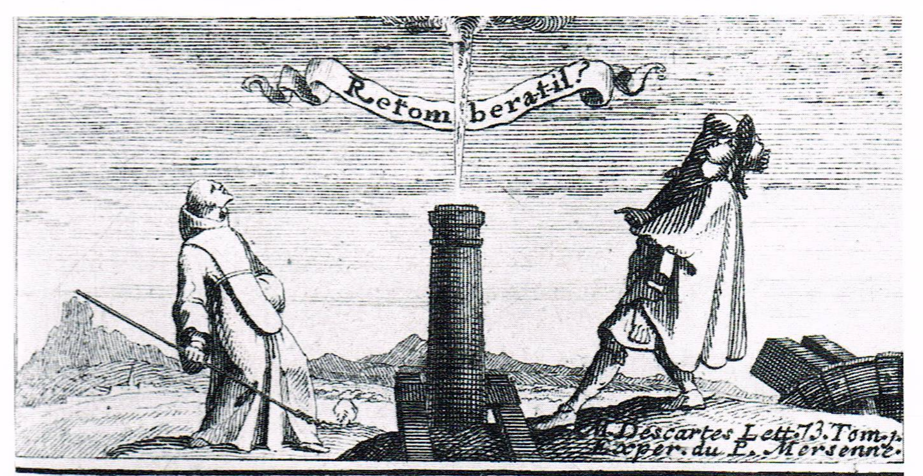


E. Lessing - Magnum

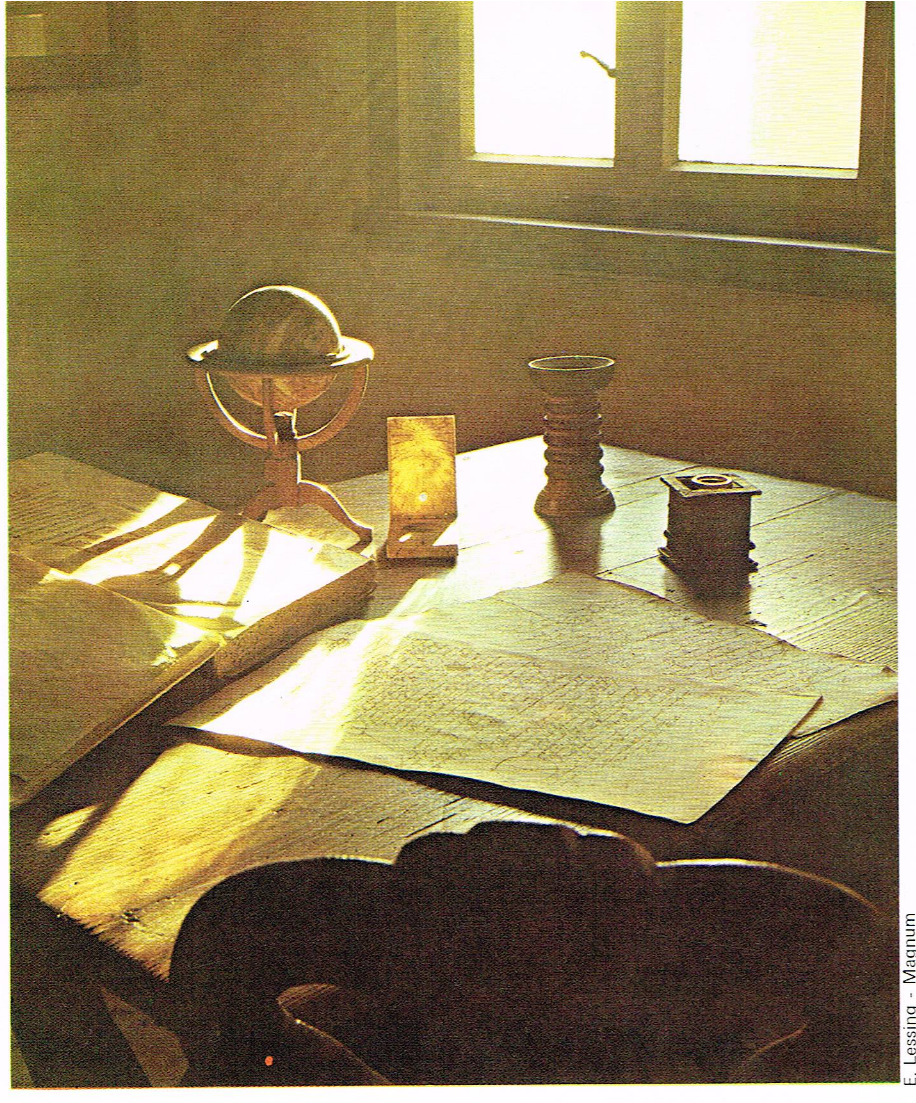
▲ L'original du De revolutionibus orbium celestium de Copernic, exposé à Cracovie (Pologne).

Initialement, Copernic (1473-1543) porta le coup décisif qui conduisit à mettre en doute le géocentrisme. Copernic est tenu par l'histoire comme celui qui substitua l'héliocentrisme au géocentrisme. Il se réclame de la tradition pythagoricienne, mais, il faut bien le noter, malgré cette référence, il conservera l'idée d'un mouvement circulaire pour la Terre. Dans son livre capital, publié en 1543, le De revolutionibus orbium celestium, Copernic met en œuvre des techniques mathématiques nouvelles qui assureront la société scientifique d'alors de sa compétence ; son travail n'était plus intuitif mais coordonné à un renouvellement des anciens appareils d'exposition de l'astronomie. Mais Copernic, bien que délogeant la Terre de sa place

▼ Gravure extraite de Conjoncture sur le cours de la pesanteur, ouvrage du XVIIe siècle dû au mathématicien Pierre Varignon.



Snark International



E. Lessing - Magnum

▲ **Le bureau de Kepler reconstitué au musée Kepler de Weil der Stadt (Allemagne) et réunissant la première édition de l'Almageste de Claude Ptolémée, des instruments d'astronomie, une lettre écrite à sa femme et une autre à l'empereur Rudolf.**

▼ **Galilée devant le Saint-Office au Vatican (1847, tableau de R. Fleury; musée du Louvre, Paris).**

Bulloz

centrale, en mettant à cette place le Soleil, conserve l'idée d'un monde sphérique et fini; son monde reste limité par la sphère des étoiles fixes, sphère elle-même soustraite au mouvement. L'hypothèse de Copernic permettait de limiter le recours aux épicycles ptolémiens, mais non pas de faire disparaître cette théorie. Pour tenir cette hypothèse, il fut d'ailleurs contraint de s'inscrire en faux contre l'ancienne mesure du monde; pour lui, le diamètre du monde est 2 000 fois plus grand que celui du monde médiéval.

Le système de Copernic ne parvint pas à s'imposer immédiatement aux yeux des autres astronomes qui lui étaient contemporains. La diffusion même de cette hypothèse ne se fit pas sans à-coups.

Tycho Brahé (1546-1601), astronome éminent, remet à jour un ensemble de données vieillies depuis longtemps; il fait aussi se réaliser de multiples progrès techniques. Mais il fut surtout celui qui tenta de négocier le compromis entre le système de Ptolémée et celui de Copernic. Il refusait le principe de la mobilité de la Terre, mais conservait toutes les harmonies mathématiques issues de Copernic; son travail visait aussi à concilier les nouvelles méthodes avec les exégèses traditionnelles de l'Écriture sainte. Bien que ne souscrivant pas à l'innovation révolutionnaire de Copernic (l'héliocentrisme), il fit beaucoup pour familiariser les astronomes avec les appareils mathématiques de Copernic.

Il faut mentionner Thomas Digges et surtout Giordano Bruno qui, les premiers, affirmèrent l'infinité du monde. Bruno (1548-1600), dans une œuvre complexe, opère une transformation radicale de l'image traditionnelle du monde; il affirme l'infinité de l'Univers, la géométrisation de l'espace et la relativité du mouvement. Mais il paya très cher son audace; il fut brûlé en 1600 comme sorcier.

Kepler (1571-1630), disciple de Brahé, fit franchir un pas décisif à la nouvelle astronomie. Partisan de l'héliocentrisme, il se riva à un travail difficile (déterminer le mouvement de Mars) qui l'amena à rompre avec une vieille idée d'origine grecque, à savoir que le mouvement des planètes ne pouvait qu'être un cercle. En 1609, il formula une loi : les orbites des planètes ne sont pas des cercles mais des ellipses dont le Soleil n'est qu'un des foyers. Ainsi la théorie des épicycles ne put que tomber en désuétude.

Mais c'est à Galilée (1564-1642) que doit revenir le mérite d'avoir su imposer l'hypothèse de Copernic. Il eut à affronter l'Église, et celle-ci ne le laissa pas en paix avant qu'il se rétractât publiquement. Mais il fit plus que de diffuser l'hypothèse de Copernic; il lui donna des assises et, ce faisant, la vérifia, donc la confirma. Pour cela, il eut recours à son invention : la lunette astronomique. *Les progrès techniques de l'optique ont donc conditionné l'affermissement de la nouvelle astronomie. Galilée, par le moyen de la lunette, trouve un nombre élevé d'étoiles qui étaient encore méconnues; par contre, il n'a pas tranché la question de l'infinité du monde. Il le déclare indéterminé.*

L'optique

Une troisième branche de la physique se développa avec force : ce fut l'optique. Ses progrès, on l'a vu avec Galilée, conditionnèrent le développement de l'astronomie. Les mêmes noms vont apparaître que ceux mentionnés pour la mécanique, ce qui témoigne à la fois de la polyvalence des scientifiques du XVIIe siècle et de l'unité de leur horizon de recherches.

Jusqu'au XVIIe siècle, la théorie de la vision qui prévalait supposait que les objets émettent des images qui, voltigeant, viennent frapper l'œil et le pénètrent. Léonard de Vinci avait émis l'hypothèse selon laquelle l'œil lui aussi émettait un rayon qui s'appropriait les objets extérieurs. Les Italiens Mandico et Porta expérimentent les premiers sur le rayon lumineux en utilisant un prisme. Il fallut surtout attendre des progrès techniques décisifs dans le polissage des verres pour que l'optique acquît ses premiers titres de scientificité.

[1]

PHILOSOPHIÆ NATURALIS Principia MATHEMATICA.

Definitiones.

Def. I.

Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.

Aer duplo densior in duplo spatio quadruplus est. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunq; diversimode condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem sub nomine corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusq; pondus. Nam ponderi proportionalem esse reperi per experimenta pendulorum accuratissime instituta, uti posthac docebitur.

B Def.

Pineider

Kepler fut le premier à donner la première théorie rationnelle des lentilles. Galilée, quant à lui, construisit le télescope qui lui permit de corroborer l'hypothèse de Copernic. Mais c'est surtout Descartes qui, dans sa dioptrique, fixa définitivement la loi de réfraction des rayons lumineux. Fermat, Canalieri et F. M. Grimaldi contribuèrent grandement au développement de l'optique en donnant respectivement la loi de propagation de la lumière, celle de la distance focale des lentilles pour les parallèles, ainsi que la mise en évidence du phénomène de la diffraction. Mais surtout Huygens assimila la lumière à une onde, un transport d'énergie. Cette onde se déplace dans un milieu transparent, pénétrant tout l'Univers, l'éther.

Cependant, la synthèse la plus magistrale se trouve dans l'œuvre de Newton et en particulier dans les Philosophiae naturalis principia mathematica *publiés en 1687. Newton tire parti de deux traditions antagonistes : la philosophie mathématique (Descartes, Galilée), et la philosophie corpusculaire qui se réclame non pas de Platon mais de Démocrite (Gassendi, Roberval, Boyle, Mooke). Nous lui devons la formulation exacte des lois du mouvement; par ce biais, il put réconcilier les mécaniques terrestres et célestes, ayant pu démontrer l'identité des gravitations terrestre et céleste et découvrir la loi fondamentale d'attraction qui les lie. L'assimilation du calcul différentiel, qui est aussi l'œuvre de Newton, aboutit à considérer les êtres mathématiques comme un flux. Newton, pour asseoir sa théorie de l'attraction, fut contraint d'introduire le vide et l'action à travers le vide.*

◄ *Page du* Philosophiae naturalis principia mathematica, *l'œuvre magistrale de Newton, publiée en 1687, sur l'application du calcul mathématique à l'étude des phénomènes naturels.*

SIDEREUS NUNCIUS 19

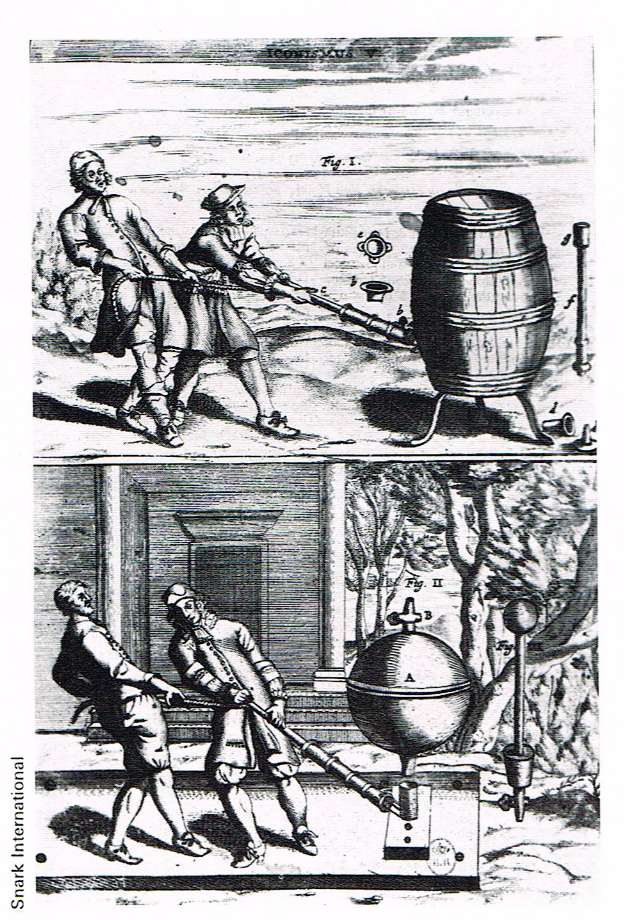
Biblioteca Ambrosiana



E. Lessing - Magnum

▼ *A gauche, page manuscrite du* Sidereus nuncius *(1610) de* Galilée, *dans lequel celui-ci décrit le fonctionnement de sa lunette astronomique. A droite, le bureau de* Newton, *dans sa chambre du Trinity College, sur lequel on a réuni son manuscrit sur l'aberration de la lumière et les réglettes de Neper utilisées pour le calcul des logarithmes.*

▶ *Gravures illustrant la célèbre expérience de Magdebourg (1654) par laquelle* Otto de Guericke *mit en évidence la pression atmosphérique.*

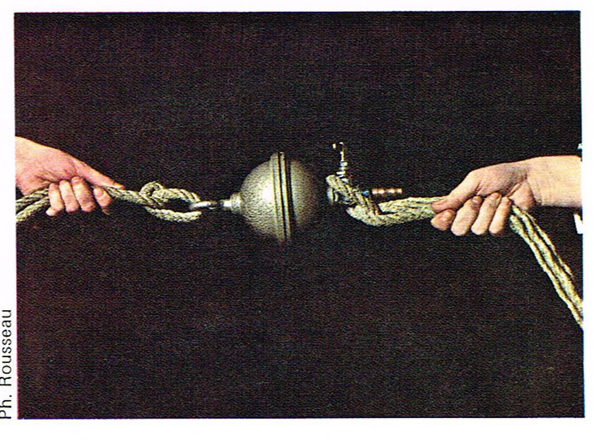


Snark International

Il faut mentionner aussi ses travaux d'optique; il réussit à décomposer de la lumière et à fixer la première théorie scientifique des couleurs du spectre. Il mit au point une théorie « corpusculaire » de la lumière. Celle-ci était sensée se décomposer en particules très fines appartenant aux différentes couleurs, mais séparées dans le spectre. Cette théorie fut suffisamment puissante pour occulter la théorie de Huygens qui ne trouvera sa confirmation qu'avec Fresnel.

La pression atmosphérique

Il faut aussi mentionner, dus au développement du mécanisme, les travaux concernant la pression atmosphérique. *E. Torricelli (1608-1647) et B. Pascal (1623-1662) démontrent son existence en réalisant la fameuse expérience du puy de Dôme. Ainsi s'écroula le vieil adage, « la nature a horreur du vide ». C'est en ce sens que l'ancienne notion d'un monde plein et achevé rejoignit le tissu d'erreurs tenaces que la physique avait eu à combattre.*



▶ *L'expérience de Magdebourg dans une démonstration actuelle.*

Ph. Rousseau

Un Allemand, Otto de Guericke (1602-1686), tenta de vérifier les résultats de l'expérience de Pascal; pour les besoins de cette vérification, il construisit un appareil qui se révéla être le premier modèle de pompe pneumatique. Par le moyen de cet appareil, les premières notions sur l'élasticité et la masse de l'air furent acquises. C'est à Otto de Guericke que nous devons aussi l'invention du baromètre.

L'Anglais Robert Boyle (1626-1691) et le Français Edme Mariotte (1620-1684) développèrent les travaux issus de Guericke et parvinrent, chacun de son côté, à formuler la loi selon laquelle volume et pression de l'air sont inversement proportionnels entre eux.

*On peut ainsi terminer la description des découvertes du XVII*e *siècle, période décisive de rupture avec l'Antiquité. On l'a vu, cette révolution a affecté aussi bien la méthode d'appréhension de la nature que les techniques mises en œuvre à cette fin. Pour les hommes du XVII*e *siècle, les cadres définitifs à travers lesquels nous percevons les phénomènes naturels sont désormais fixés.*

*L'espace et le temps sont devenus des notions absolues, préexistantes à toute mesure possible; le XVII*e *siècle tiendra pour vérité cette conception et s'emploiera donc à développer, préciser, améliorer ce qui a été déjà mis au jour; mais il faudra attendre encore longtemps pour qu'un doute soit avancé à propos du caractère définitif du mode d'appréhension des phénomènes.*

*La physique au XVIII*e *siècle*

*Le XVIII*e *siècle est saisi plus par la fièvre de l'inventaire que par celle de l'invention. Diderot et d'Alembert publieront l'*Encyclopédie, *somme de connaissances de toute nature, où les connaissances techniques ne seront pas négligées. Ils reprennent à leur compte les projets d'inventaire que Leibniz avait prônés au début de ce siècle.*

Les salons s'intéressent à la physique et les expériences « d'électricité amusante » défrayent alors la chronique mondaine.

*Celle-ci n'était que la traduction joyeuse d'un travail bien plus complexe qu'avaient entrepris certains physiciens. Avant le XVIII*e *siècle, si l'électricité n'était pas connue, il n'en allait pas de même pour ce qui se révélera être son voisin, à savoir le magnétisme. William Gilbert (1544-1603) avait écrit en 1600 un traité qui inventoriait toutes les formes d'aimantation. Mais ce fut l'Anglais Francis Hawksbee qui le premier mit en évidence les phénomènes électrostatiques issus du frottement du verre. A S. Gray (1670-1736) et C. F. Dufay (1698-1739) nous devons la découverte respectivement de la conductibilité électrique (des métaux par exemple) ainsi que de la différence permanente entre deux sortes d'électricité. Von Kleist et Petrus Van Musschenbroek (1692-1761) tentèrent d'électriser toute l'eau contenue dans une bouteille, en y plongeant une tige métallique liée à une machine débitant de l'électricité. Recevant une décharge électrique, au moment d'écarter la tige, Musschenbroek exploita son expérience; ce dispositif fut appelé « bouteille de Leyde », ancêtre des premiers condensateurs. Franklin considéra ce phénomène comme analogue, à l'échelle macroscopique, à la foudre accompagnée d'éclairs. T. F. Dalibard (1703-*

1799) vérifia son hypothèse en obtenant un jour d'orage, après avoir dressé des tiges de fer, des étincelles. Ce dispositif, lui, était l'ancêtre du paratonnerre.

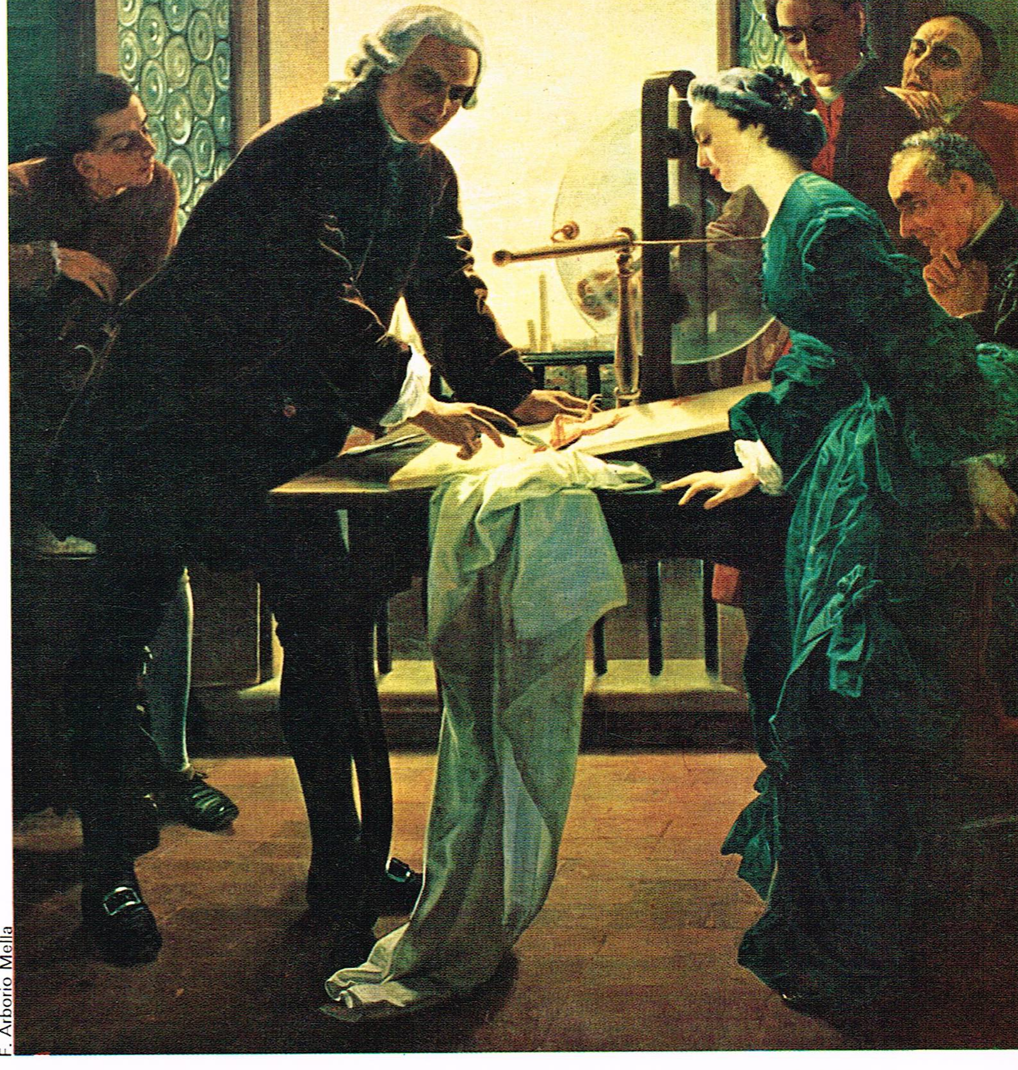
Mais le temps des expériences spectaculaires prit fin avec Coulomb (1736-1806) ; usant d'un dispositif expérimental, la balance de torsion, il put mesurer les forces d'attraction et de répulsion électrique. Galvani (1738-1798) assimila le fluide nerveux à l'électricité en réalisant des expériences célèbres sur des grenouilles ; mais, malgré son succès, ses conceptions furent combattues par son élève Volta (1745-1827) qui mit un terme à l'électrostatique en introduisant ce qui sera plus tard qualifié de pile.

L'optique

L'optique ne se développa, au XVIIIe siècle, que sur les fondations que lui avait fournies Newton. John Dollond (1706-1761), cependant, par sa construction d'une lentille achromatique (qui ne dispersait pas la lumière), rendit caduque l'idée de Newton selon laquelle une telle construction était impossible à réaliser. Une telle mise au point fit se développer la technique optique, et du même coup un grand nombre de découvertes annexes furent réalisées (lunettes astronomiques, microscope, etc.). Deux disciplines se développèrent alors : la photométrie et la spectroscopie. Pierre Bouguer (1698-1758) parvint à mesurer l'intensité des sources lumineuses. Herschel, Wollaston et von Fraunhofer entreprirent l'analyse détaillée du spectre lumineux. Plus tard, poursuivant ce travail, Becquerel, en 1842, démontrera la continuité entre les rayons ultraviolets, les infrarouges et la lumière.

Mais là n'est pas l'essentiel ; l'interrogation qui subsistait portait encore sur la nature de la lumière. Deux séries d'expériences parvinrent à détrôner la théorie de Newton. D'une part, l'Anglais Thomas Young (1773-1829) met au jour le phénomène dit des interférences (observation d'une frange de raies lumineuses à la rencontre de deux rayons de lumière). Il note qu'il faut revenir, pour expliquer ce phénomène, à la conception ondulatoire de la lumière. Il parvint à mesurer les distances qui séparent les raies et à les attribuer aux longueurs d'onde. D'autre part E.L. Malus (1775-1812) découvrit que la lumière pouvait être polarisée par réflexion ; F. Arago (1786-1853), reprenant les travaux de ce dernier, découvre la polarisation chromatique, et J.-B. Biot (1774-1862) la polarisation rotatoire.

Ces mises en évidence n'avaient pas trouvé leur théoricien ; elles étaient à intégrer dans une conceptualisation théorique. C'est à Fresnel qu'on doit l'assimilation théorique de ces expériences. Fresnel (1788-1827) transforme l'ancienne théorie ondulatoire en soutenant que les ondes lumineuses sont transversales,



F. Arborio Mella

▲ *L'expérience de* **Galvani** *sur l'électricité animale (Antonio Muzzi, université de Bologne).*

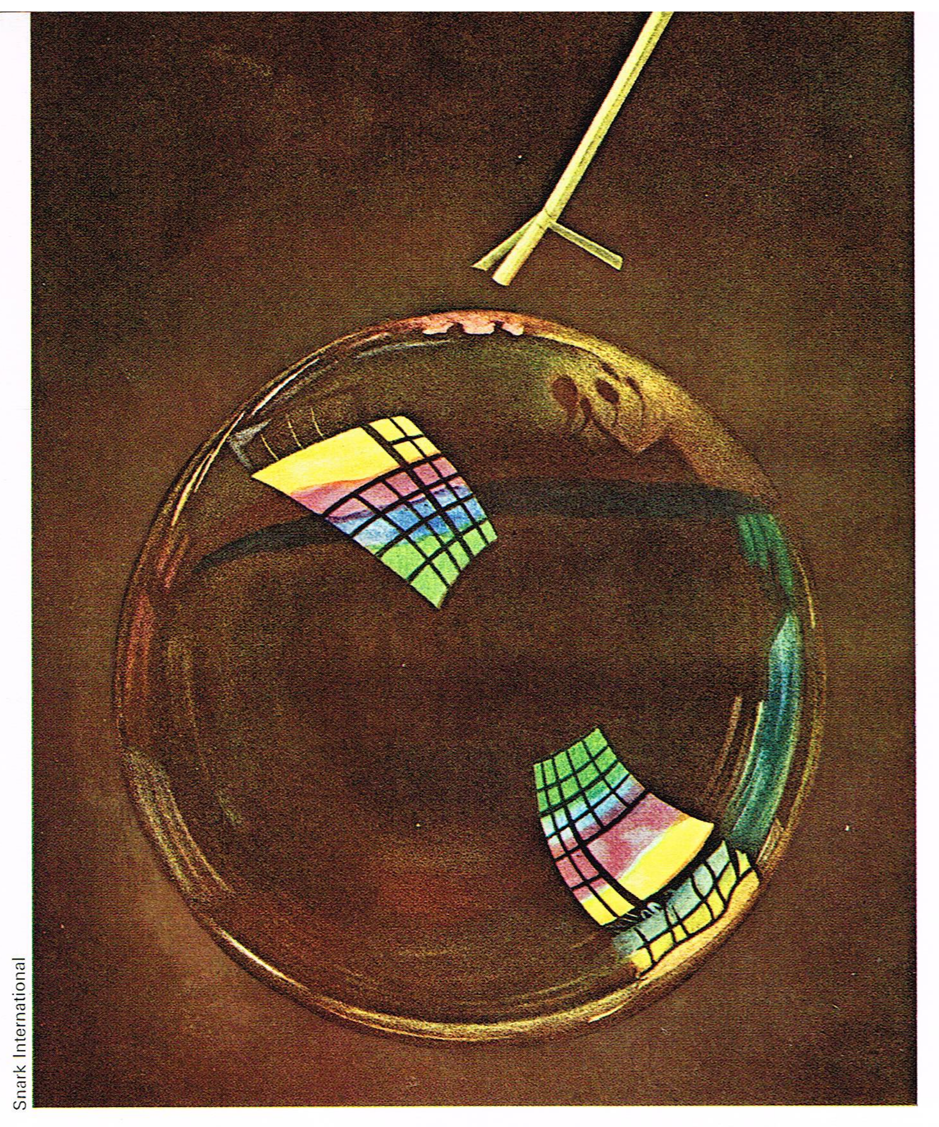
▼ *A gauche,* **Expérience sur l'électricité naturelle,** *gravure ancienne du XVIIIe siècle.* *A droite,* **divers types de bouteilles de Leyde :** *A, un modèle du XVIIIe siècle, ancêtre des premiers condensateurs ; B, une bouteille anglaise ; C, un modèle plus récent.*



Bulloz



Bulloz



Snark International

▲ « La bulle de savon » : *la coloration des bulles est un phénomène dû aux interférences de la lumière sur des lames minces.*

perpendiculairement à la direction du faisceau. Or cette transformation suffit à réhabiliter la théorie ondulatoire, qui désormais était susceptible de rendre compte de toutes les expériences récentes. La théorie corpusculaire semble alors définitivement fausse, et Fresnel a reconquis l'unité d'explication des phénomènes lumineux.

Le physicien L. Foucault (1819-1868), en prouvant que la lumière se propage plus vite dans l'air que dans l'eau, confirme en 1850 la théorie de Fresnel, car, d'après Newton, le contraire devait en être le résultat. La lumière étant tenue pour une série d'ondes transversales, on put rapporter la lumière non plus à une couleur mais à une donnée physique précise, la longueur d'onde. *Combinée aux résultats de la spectroscopie, la théorie ondulatoire permet à G. R. Kirchhoff (1824-1887) d'interpréter les raies obscures du spectre solaire. D'autres physiciens, dont Bunsen et Angström, observèrent que des métaux portés à l'incandescence émettaient des radiations spécifiques.*

Dans le même temps, d'après Newton, mécanique céleste et physique se développèrent rapidement, au fur et à mesure des progrès techniques et de l'enrichissement de l'appareil mathématique. Les mathématiciens Clairault, d'Alembert et Euler, puis plus tard Gauss et Cauchy tentèrent de résoudre le problème dit des trois corps (déterminer l'orbite d'une planète, compte tenu de l'attraction qui la lie à au moins deux autres corps). D'Alembert et Lagrange règlent mathématiquement la mécanique ; Laplace s'essaie à déterminer la question de l'origine de l'Univers. Auparavant, les Bernoulli avaient fixé vers 1738 les bases de la mécanique des fluides.

L'acoustique

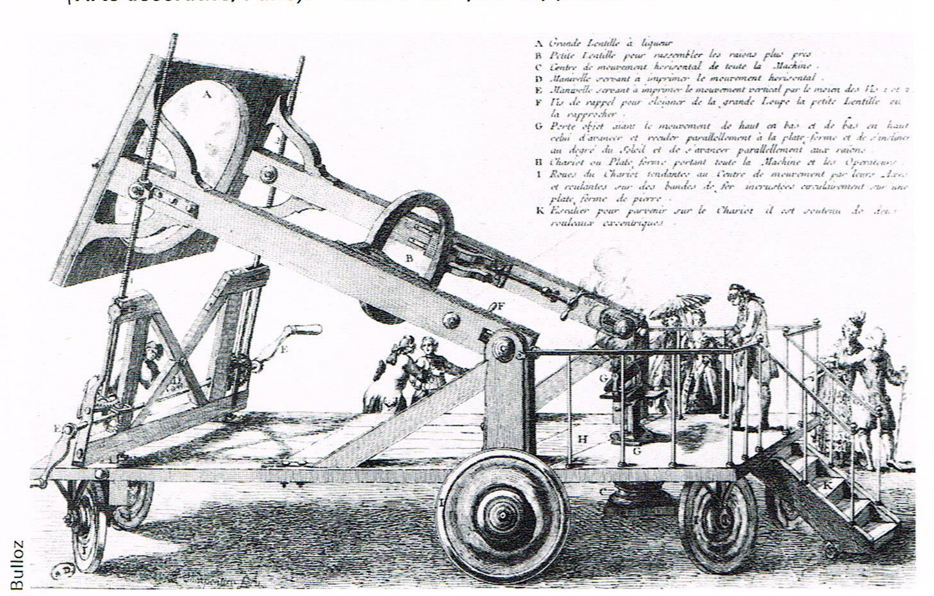
L'acoustique, depuis la résolution du problème des cordes vibrantes par le père Mersenne, laissait indéterminée la question de la vitesse du son. Newton avait certes calculé une vitesse, mais elle se révéla n'être pas la bonne ; ce fut Laplace qui trouva la solution en faisant remarquer qu'il y a une multitude de paramètres concourant à l'établissement d'une vitesse déterminée. J. Sauveur (1653-1716) fit une étude remarquée de l'ensemble des questions attenant à la nature de la vibration sonore.

La calorimétrie

*L'étude de la chaleur connut aussi d'importants développements dans la physique classique. Pour les alchimistes, tel Paracelse, la combustibilité de la matière était due à un principe associé au soufre. Jusqu'au XVIII*e *siècle, les théories se multiplièrent dans la recherche d'une substance responsable de la chaleur, sans distinguer entre celle-ci et la température. En 1718, Stahl nomme phlogistique la « terre inflammable » perdue ou reçue par la matière au cours d'une combustion. En 1760, J. Black (1765-1834) pose l'équation de la calorimétrie et précise bientôt la notion de chaleur spécifique ainsi que celle de chaleur latente. En 1775, Lavoisier explique la combustion des métaux par la fixation de l'oxygène. Il définit ensuite un nouveau fluide, le calorique, alors que Laplace pense au contraire la chaleur comme mouvement de particules élémentaires de la matière. Ces deux hypothèses vont subsister jusqu'à ce que la seconde l'emporte au cours du XIX*e *siècle. Mais dès 1798, Rumford (1753-1814) avait montré à propos du forage des canons que la chaleur produite paraissait inépuisable, et ne pouvait donc être une substance mais plutôt un mouvement.*

C'est toutefois en 1824 que Sadi Carnot (1796-1832) pose les bases de la thermodynamique en étudiant les machines à vapeur inventées par Watt. En 1840, Joule (1818-1889) montre l'équivalence de la chaleur et du travail, et le principe de Mayer-Joule concernant la conservation de l'énergie s'impose bientôt. Dans le même temps, Clausius (1822-1888) introduit la notion d'entropie et montre à la

▼ *Gravure du XVIII*e *siècle représentant une loupe géante qui servit à l'expérience des verres ardents (Arts décoratifs, Paris).*



Bulloz

suite de Carnot qu'elle augmente irréversiblement au cours de l'évolution d'un système isolé. Au milieu du XIXᵉ siècle, la thermodynamique a donc ses fondements, complétés par les recherches de Fourier sur la propagation de la chaleur.

Le développement de la théorie cinétique des gaz s'effectua ensuite à partir de l'hypothèse du « chaos moléculaire » et s'édifia grâce à Clausius, Maxwell, Boltzmann, Gibbs et Nernst en particulier. Usant du calcul des probabilités, cette théorie relie la description microscopique et l'étude des propriétés macroscopiques. Elle permet de retrouver la loi de Mariotte, celle de Gay-Lussac sur la dilatation des gaz, conduit à de nouvelles interprétations mathématiques des propriétés des gaz et de celles des phénomènes thermiques. Ainsi, l'augmentation de l'entropie est désormais associée à l'évolution vers le désordre comme état le plus probable pour un système clos. Ces recherches ont ouvert la voie à la mécanique statistique moderne qui s'est encore développée au XXᵉ siècle à partir des travaux d'Einstein, Ehrenfest et Uhlenbeck.

La physique au XIXᵉ siècle

L'électromagnétisme

Avec la thermodynamique, ce que le XIXᵉ siècle va considérablement développer sera l'électromagnétisme. Une fois la pile inventée par Volta, une génération de physiciens s'employèrent à la perfectionner : Becquerel, Daniell, Seebeck, puis Melloni et Nobili en furent les principaux acteurs. Les effets chimiques du courant électrique furent mis en évidence dans l'expérience de l'électrolyse (Carlisle et Nicholson en 1800, puis Davy). Or, peu après, en 1820, le Danois Œrsted (1777-1851) démontre l'effet magnétique de l'électricité. Mais c'est Ampère (1775-1836) qui assimila la nature du magnétisme à celle de l'électricité, fit la distinction entre tension et courant électrique et attribua un sens au courant électrique. Biot et Savart, dans le même temps, mesuraient la force électromagnétique. L'Anglais Faraday (1791-1867) compléta les énoncés d'Ampère en formulant le principe d'induction en 1831. Selon celui-ci, le courant n'est pas créé par le champ magnétique en tant que tel mais il l'est par les variations du champ, et Henry et Lenz mirent le point final aux recherches portant sur l'induction en mettant au jour le phénomène de self-induction. Faraday prit en charge d'autres questions; il réussit à montrer que lumière et électricité sont de même nature. L'Allemand G. S. Ohm (1789-1854) dégagea la correspondance entre l'intensité d'un courant et la résistance du conducteur.

Mais le travail de synthèse entre tous ces éléments sera effectué par J. C. Maxwell (1831-1879). Reprenant les travaux de Faraday sur la polarisation magnétique, Maxwell systématise deux expériences, celle d'Œrsted et celle de Faraday : un champ magnétique qui varie est accompagné d'un champ électrique, mais l'inverse est aussi vrai. Le champ est alors assimilé à un réservoir d'énergie. Les équations *dites* de Maxwell *décrivent alors la structure du champ électromagnétique. Les lois de Maxwell, alors, sont d'une autre nature que celles de la théorie mécanique classique. Ces lois ne servent pas à la coordination des phénomènes entre eux; elles permettent de prévoir un futur, une fois qu'est établie notre connaissance du présent. L'ensemble de ces considérations permet à Maxwell de supposer comme effet d'un champ électromagnétique une onde électromagnétique. En effectuant la synthèse entre la théorie de la lumière, du magnétisme et de l'électricité, Maxwell accomplit un travail qui semble définitif. La physique semble alors ne consister qu'en deux branches, la mécanique et l'électromagnétisme.*

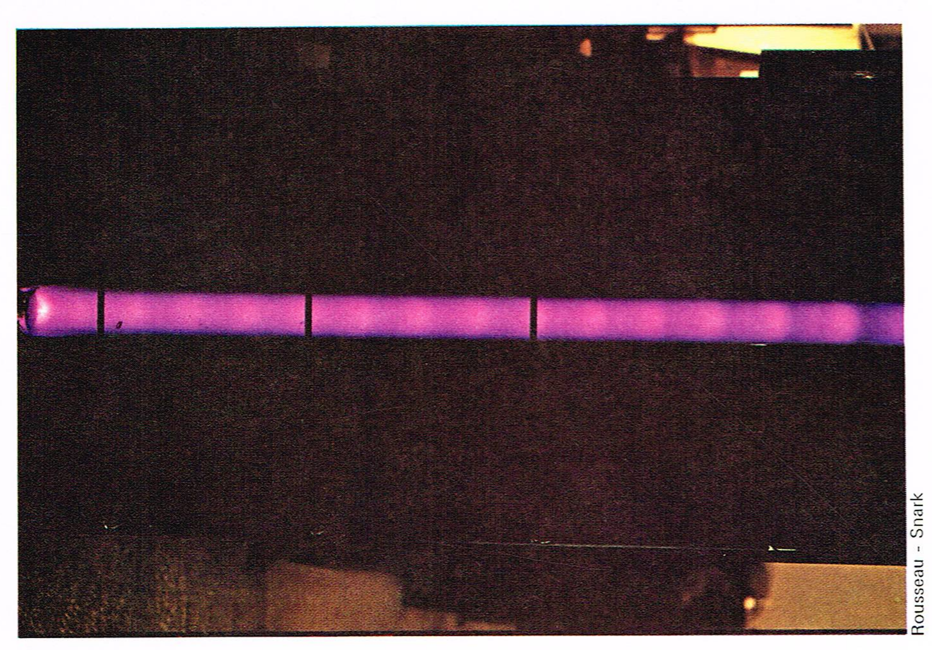
Les rayonnements

Avant la révolution einsteinienne, quelques nouveautés émergent. En étudiant les effets d'une décharge électrique dans un tube à gaz raréfié, Crookes et Goldstein décèlent un rayonnement issu de la cathode qu'ils qualifient de « rayons cathodiques ». Il faut donc déterminer sa composition et sa nature. Une divergence sur cette nature (ondulatoire ou corpusculaire) se produisit entre Goldstein et Thomson. Un physicien français, Jean Perrin (1870-1942), montra que dans le dispositif expérimental étudié, le rayonnement se composait d'une multitude de petits grains chargés d'électricité négative, qu'il appela « électrons ». Ce bouleversement (Maxwell supposait que l'électricité était un fluide continu) se confirma quand il fallut interpréter certains effets : en particulier, l'effet photo-électrique et les lois de l'électrolyse. Lorentz et Zeeman confirmèrent cette vue en proposant d'associer la vitesse des électrons et la nature de l'onde électromagnétique pour expliquer la diversité du rayonnement. Ils purent même ainsi rendre compte de la découverte de Roentgen qui avait mis en évidence un rayonnement particulier qui traversait tous les volumes, à condition que ceux-ci ne soient ni os, ni métal (ce sont les rayons X). Un grand nombre de travaux tente de réaliser une synthèse de ces découvertes. J. Thomson et Aston inventèrent un appareil décisif : le spectrographe de masse, qui permit d'étudier le spectre de la masse des « ions ».

Tentant de découvrir si les rayons X sont émis par des cristaux, Henri Becquerel (1852-1908) montre que ceci n'est vrai que pour le sel d'uranium. Pierre et Marie Curie s'attaquent au problème de l'origine de ses rayons radioactifs. Ils montrent que le thorium en émet aussi; ils découvrent de nouvelles substances, le



▼ L'Inventeur James Watt dans son laboratoire *(tableau de J. Reynolds, Institution of British Engineers).*


Rousseau - Snark

▲ ***A la fin du XIX[e] siècle, en Angleterre, Crookes et Goldstein, étudiant les effets d'une décharge électrique dans un tube à gaz raréfié, décèlent un rayonnement issu de la cathode qu'ils qualifient*** **de rayons cathodiques.**

polonium et le radium, qui émettent ce rayonnement. Ce fut Rutherford, qui, ayant d'abord distingué trois genres de rayonnements radioactifs, réussit à assimiler les rayons α *(alpha) à des atomes d'hélium ionisés. Découverte qui fut tout à fait déroutante pour les physiciens : ce fut une des failles irréductibles qui atteignirent l'édifice de la physique classique.*

La physique moderne

Depuis Newton, l'ensemble des lois de la mécanique répondait au principe galiléen de la relativité. Ces lois valaient pour tout système en translation rectiligne et uniforme par rapport à un système de référence. En même temps, cela interdisait d'observer la translation d'un quelconque de ces systèmes, de la mesurer par des expériences mécaniques. Il n'en était cependant pas de même du côté de l'optique, et les équations de l'électromagnétisme ne satisfaisaient pas au principe galiléen de relativité. La vitesse de la lumière y intervenait en effet comme une constante, ce qui permettait de tenter la mise en évidence de la translation de la Terre par rapport à cet étalon. Comme on supposait l'existence d'un « éther » en repos et propageant la lumière, cette mesure aurait révélé le mouvement terrestre par rapport à l'espace absolu. Tel était le projet qui avait animé les expériences de Michelson et Morley au cours des années 1880. Mais ces tentatives se soldèrent par un échec répété. Il se confirmait cependant que la lumière se propageait avec une vitesse constante, mais celle-ci était identique dans toutes les directions, indépendamment des mouvements relatifs de la source lumineuse et de l'observateur. Contre toute attente, la loi mécanique de la composition des vitesses était mise en défaut. Plusieurs hypothèses avaient alors été avancées, en particulier celle de Fitzgerald et Lorentz concernant l'existence d'une contraction de la matière en fonction de la direction du mouvement. Mais c'est en 1905 qu'intervint une théorie conforme aux résultats de l'expérience comme aux lois de l'électromagnétisme. Elle fut élaborée par un jeune ingénieur du Bureau des brevets de Berne, Albert Einstein.

La théorie de la relativité

La théorie de la relativité restreinte *d'Albert Einstein rendait compatibles le principe de relativité galiléen et l'invariance de* c, *vitesse de la lumière dans le vide. Il n'était désormais plus question d'éther. S'appuyant sur ces bases, Einstein utilisait les formules de Lorentz qui rendaient les équations de l'électromagnétisme invariantes dans les transformations galiléennes. Mais ceci n'était possible qu'en rompant avec les conceptions antérieures sur l'espace et le temps absolus. Désormais le temps de l'observateur est relatif et dépend du mouvement du système. Ainsi, deux événements simultanés pour un observateur peuvent être successifs dans un autre système de référence. Mais la distance est également relative, puisqu'elle ne peut plus comme auparavant être fondée sur des mesures simultanées. Ainsi l'existence d'une vitesse limite absolue,* c, *a des conséquences qui bouleversent tout le cadre de la physique classique.*

Cela amène tout d'abord une révision des lois de la mécanique permettant de les rendre valables pour des vitesses proches de c *(299 792 km/s). Un autre effet en est la connexion établie entre la masse et l'énergie, la formule* $E = mc^2$ *démontrant leur équivalence, leur capacité de se transformer l'une en l'autre. La masse, quant à elle, apparaît d'ailleurs variable et augmente avec la vitesse, tendant vers l'infini lorsqu'un mobile approche la vitesse de la lumière. Tout cela heurtait le bon sens et souleva de vives polémiques. Mais l'expérience confirma bientôt la conception de la relativité, par l'étude des électrons cathodiques, du rayonnement des étoiles, des phénomènes atomiques, etc. D'autre part, à la suite de Minkowski, Einstein accentua l'amalgame entre les grandeurs que sont le temps et l'espace. Celles-ci sont en effet associées et rendues permutables dans une structure quadridimensionnelle. Aux trois coordonnées de l'espace s'ajoute une variable de temps* ($\tau = \sqrt{-1}\,ct$) *l'ensemble constituant l'*espace-temps *ou* continuum. *Un nouvel invariant est substitué aux précédents absolus : il s'agit de l' « intervalle » où les mesures de temps et de longueur sont combinées.*

Cependant, si le continuum peut être considéré comme euclidien dans la relativité restreinte, il n'en est plus de même après l'introduction par Einstein en 1916 de la relativité généralisée. *Celle-ci ne concerne plus seulement les systèmes en mouvement uniforme, mais aussi ceux en mouvement accéléré, et formule des lois valables dans tous les cas. L'identité de la masse d'inertie et de la masse pesante, vérifiée par L. Eötvös, amène à concevoir l'équivalence de l'inertie de la matière et de la gravitation. Cette dernière traduit le caractère accéléré du système de référence, correspond à une déformation de l'espace-temps au voisinage de la matière, à une courbure locale du continuum. Cela conduit à avancer une nouvelle loi de la gravitation, celle de Newton n'en constituant qu'une approximation. Pour cela, Einstein fit appel aux géométries non euclidiennes, au calcul tensoriel, cependant que l'expérience confirmait sa théorie en vérifiant la déviation de la lumière au voisinage du Soleil, l'avance du périhélie de Mercure due à l'attraction des autres planètes, le freinage de la propagation des ondes hertziennes passant près du Soleil*

et le « rougissement » de la lumière des étoiles lointaines. Jusqu'à la fin de sa vie, Einstein s'efforça de développer une théorie unitaire après avoir proposé un modèle d'Univers courbe, fini mais non limité. D'autres recherches furent également menées à ce niveau, en particulier par Lemaître, Langevin, Eddington, de Sitter, Brans et Dicke, etc., sans que l'expérience ait encore permis de trancher entre leurs diverses conclusions. Quoi qu'il en soit, la théorie de la relativité générale ne peut plus aujourd'hui être considérée comme une spéculation mais s'intègre au champ de l'expérience.

L'effet photo-électrique

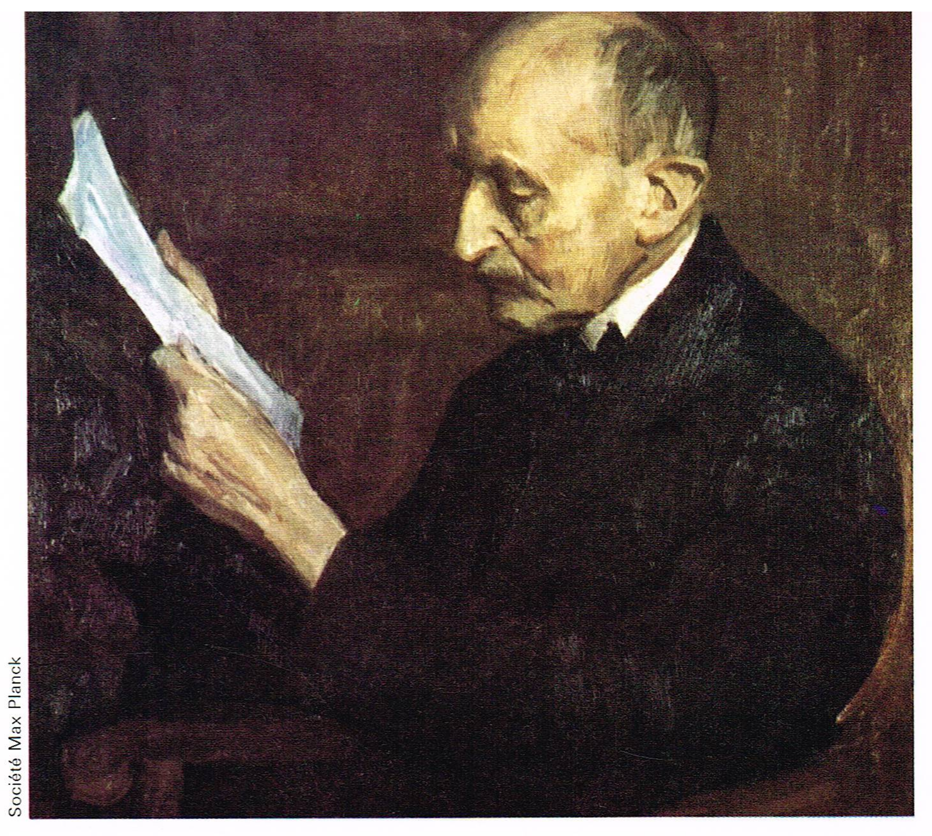
Le nom d'Einstein s'associe également à l'étude de l'effet photo-électrique, publiée en 1905 et qui lui valut le prix Nobel. Elle faisait suite à l'introduction en 1900 par Max Planck des quanta, c'est-à-dire d'une structure granulaire de l'énergie. Celui-ci y avait été amené par l'étude du rayonnement du corps noir où théorie et expérience apparaissaient brutalement contradictoires. Rejetant l'idée d'une continuité fondée sur l'oscillation de l'électron, Planck avait posé que le rayonnement correspondait à de l'énergie émise par la matière de manière discontinue, en quantités finies. Celles-ci, les quanta, étaient considérées comme proportionnelles à la fréquence de l'émission et égalisées au produit de cette fréquence par une constante universelle, h, dont toutes les mesures ultérieures ont confirmé la valeur.

Cette théorie permit à Einstein d'envisager une nature corpusculaire de la lumière et d'introduire la notion de photon, c'est-à-dire de quantum de lumière. Dès lors, l'effet photo-électrique s'expliquait par l'impact de ces photons sur le métal, l'extraction d'électrons croissant en fonction de la fréquence de la lumière, puisque celle-ci faisait varier l'énergie des quanta. Cependant cette théorie heurtait de front les conceptions acquises faisant de la lumière un phénomène ondulatoire et continu. De plus, si le point de vue corpusculaire était nécessaire pour expliquer les interactions de la lumière et de la matière, l'interprétation ondulatoire apparaissait elle aussi irremplaçable pour rendre compte des phénomènes de propagation, des interférences, de la diffraction, etc.

La structure atomique

Mais l'introduction des quanta allait aussi bouleverser l'étude de la structure atomique. Celle-ci s'était jusque-là développée à travers les expériences de Jean Perrin sur le mouvement brownien et l'analyse de la radio-activité par Rutherford. Thomson avait envisagé un premier modèle de l'atome où les électrons étaient englobés dans la masse positive. Puis, en 1911, Rutherford le conçut comme un système solaire en miniature ayant pour centre un noyau minuscule, lourd, chargé positivement, autour duquel gravitaient les électrons négatifs. Or, selon la théorie de Maxwell, ces électrons auraient dû émettre un rayonnement continu sur toutes les fréquences, alors que le spectre réel d'un tel rayonnement est fait de raies caractéristiques classables grâce aux nombres entiers.

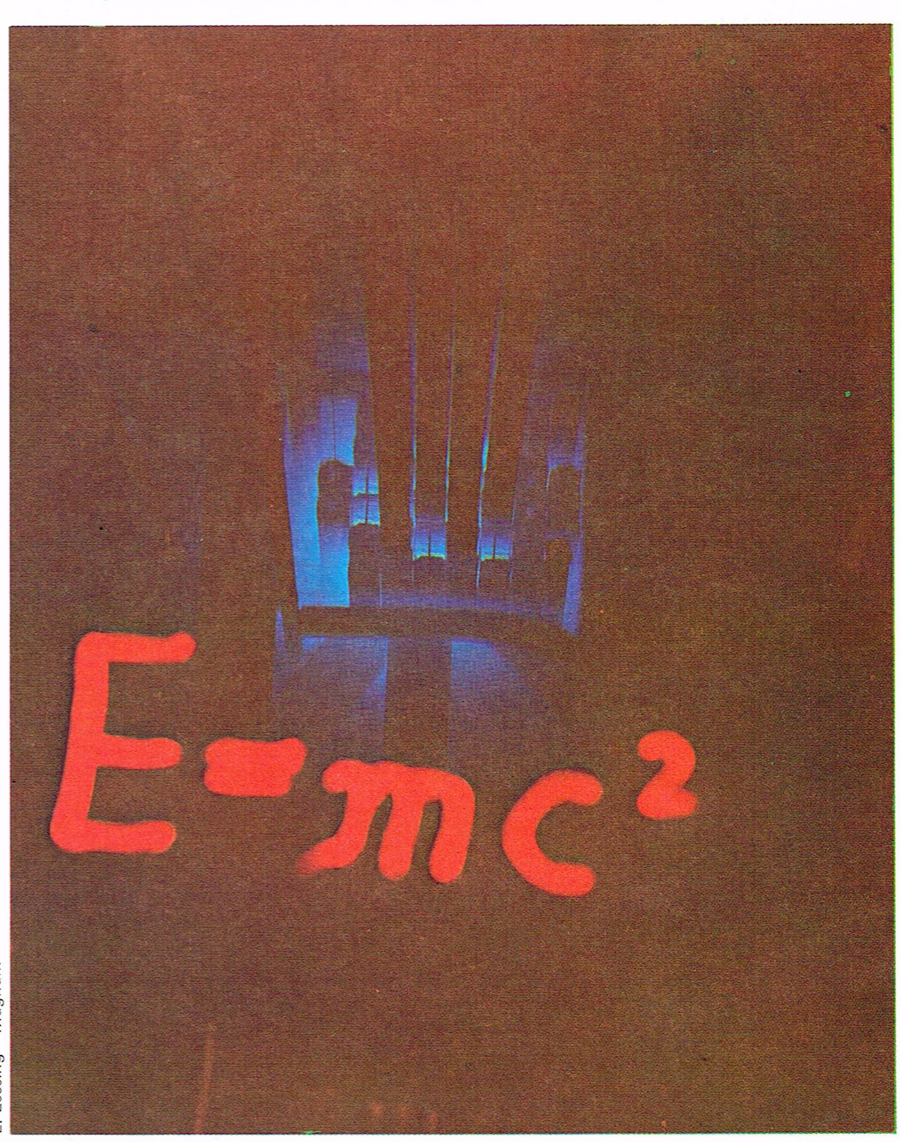
C'est pourquoi, en 1913, Niels Bohr établit une théorie quantique de l'atome supposant que l'électron ne pouvait tourner que sur certaines trajectoires caractérisées par des nombres quantiques. De plus, Bohr considérait qu'un électron



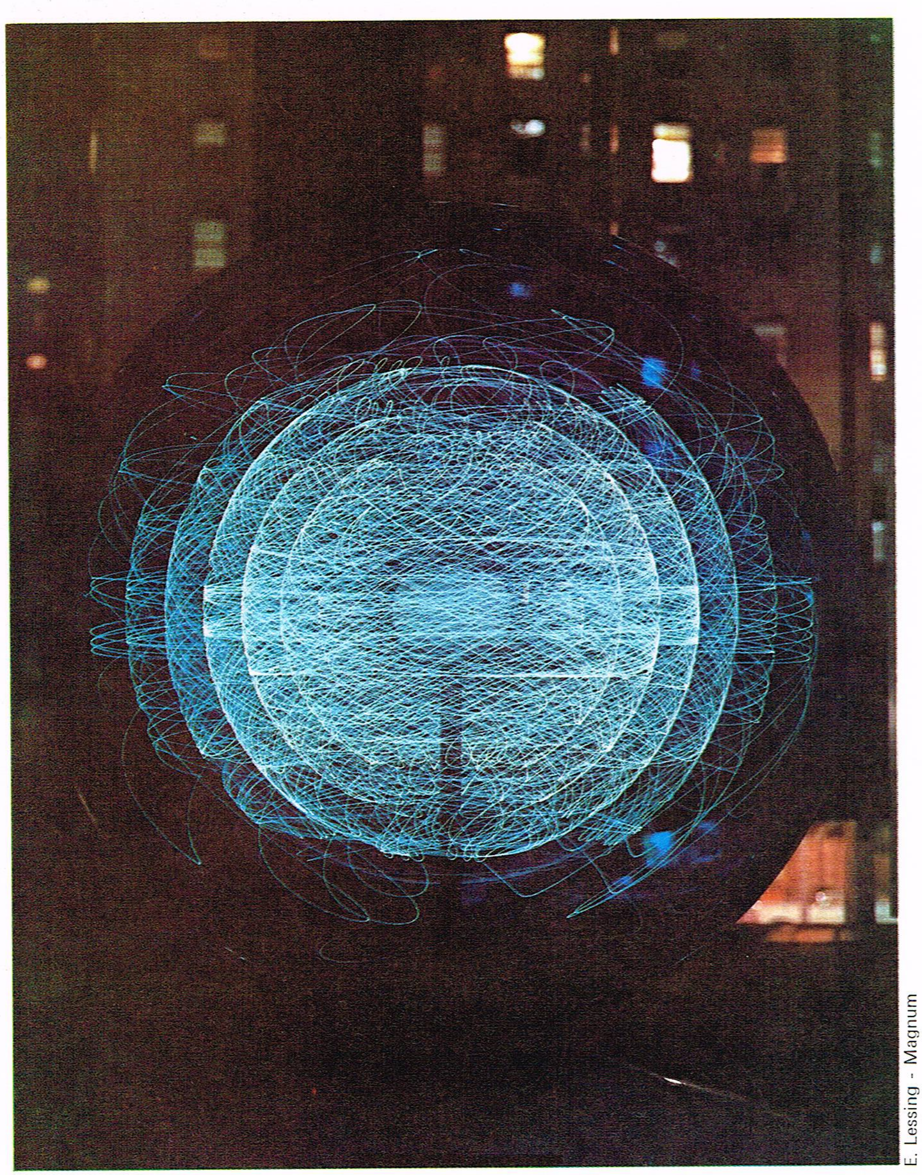
Société Max Planck

▲ Max Planck *(portrait de F. Reusing; Gottingen, société Max Planck).*

▼ *L'éclat violet d'un réacteur atomique et l'équation de la relativité d'Einstein, $E = mc^2$, qui énonce une équivalence entre la matière et l'énergie.*



E. Lessing - Magnum



E. Lessing - Magnum

▲ *L'uranium est un élément radio-actif, et c'est sur lui que Becquerel a découvert la radio-activité ; ici, un atome de l'isotope 235.*

pouvait sauter d'une orbite à une autre en émettant ou en absorbant alors de l'énergie, ce qui lui permit d'expliquer les spectres de rayonnement. Cette théorie fut développée par Sommerfeld qui considéra des trajectoires elliptiques et non pas seulement circulaires, et qui utilisa la théorie de la relativité pour expliquer la « structure fine » des raies de l'hydrogène. Cependant la théorie restait incomplète et ne permettait pas un calcul exact des intensités relatives des raies spectrales. D'autre part, Bohr avait été amené à faire appel à des notions jusque-là inconciliables comme celles d'ondes et de corpuscules en affirmant leur complémentarité. Or ce problème ne concernait pas seulement la lumière, mais aussi les rayons X, dont von Laue avait précisé l'aspect ondulatoire, et plus généralement l'ensemble des radiations électromagnétiques.

C'est en 1923 qu'intervient une refonte avec la mécanique ondulatoire de Louis de Broglie. Celle-ci associe l'onde et le corpuscule, ce dernier ne correspondant bientôt plus qu'à la densité d'une probabilité de présence, à l'intensité d'une fonction d'onde. La mécanique classique n'allait plus tarder à n'être considérée que comme une approximation de cette nouvelle théorie qui fut confirmée en 1927 par Davisson et Germer lorsqu'ils mirent en évidence la diffraction de l'électron, montrant ainsi que même ce corpuscule manifestait des caractères ondulatoires. Un nouveau développement fut l'équation de Schrödinger, qui permet de prévoir les niveaux quantifiés d'énergie à partir de la forme initiale d'une fonction d'onde.

Ainsi, Born put déterminer grâce à elle les probabilités de présence concernant l'énergie et précisa le caractère de la grandeur ψ (fonction d'onde liée aux vibrations de l'électron), montrant que ψ mesurait la probabilité que l'électron fût en un endroit donné. Ainsi un corpuscule n'était plus considéré comme un grain de matière strictement limité, mais comme un nuage localisable en un certain intervalle où la fonction d'onde est d'amplitude non nulle. Mais la conception de Max Born n'amène qu'à une évaluation statistique de la présence de la particule, la répétition d'une expérience dans les mêmes conditions aboutissant d'ailleurs à trouver celle-ci en plusieurs endroits. Aussi la théorie ne permet-elle que de prévoir la probabilité que le système se trouve en tel ou tel état. Quant aux mesures effectuées, elles dépendent des conditions de l'observation, car celles-ci sont en interaction avec le système étudié.

Sur ces bases naissait la mécanique quantique fondée par Heisenberg en 1925. Celui-ci démontra peu après, au moyen des relations d'incertitude, qu'il est impossible de mesurer en même temps la position et la vitesse d'un corpuscule avec une précision sans limites. En effet, l'incertitude sur la position et celle sur la quantité du mouvement sont liées, leur produit étant égal à une constante. C'est dire que plus l'une est petite, plus l'autre est grande, ce qui limite l'exactitude possible des prévisions et se trouve confirmé par l'expérience. Ainsi l'indétermination rencontrée dans l'observation des phénomènes microphysiques devient dorénavant irréductible. On ne peut préciser simultanément les deux variables dynamiques que sont la position et la vitesse, et par conséquent seul le vecteur d'état ψ peut servir à décrire un état, la probabilité de trouver la valeur d'une mesure future dépendant de la fonction d'onde.

Dès lors, décrire un état ultérieur s'effectue à l'aide d'un vecteur unitaire, c'est-à-dire consiste à faire la somme des états possibles. Cela aboutit, d'après l'école de Copenhague, à nier la vérité physique de l'onde associée à la particule et à affirmer l'indéterminisme essentiel de la nature. D'autres physiciens, en particulier Louis de Broglie, se sont depuis élevés contre cette interprétation, réactivant le souci d'une représentation concrète en microphysique et supposant l'existence de variables cachées. Ce débat sur la réalité de la fonction d'onde ne peut être dissocié de l'impossibilité actuelle de séparer le dispositif expérimental du phénomène physique étudié, d'isoler un réel microphysique pur et indépendant des effets de nos manipulations.

Les effets de la révolution quantique se sont multipliés depuis 1925. Ainsi Dirac réinterpréta le nombre quantique, réussit à expliquer avec exactitude la structure du spectre de l'hélium et parvint à intégrer la théorie des interactions de la lumière et de la matière dans la nouvelle physique.

A partir de là s'élabora la statistique de Fermi-Dirac, valable pour un grand nombre d'électrons soumis au principe de Pauli, principe avancé en 1925 et selon lequel deux électrons ne peuvent

avoir le même état quantique. La théorie de Dirac était aussi une première tentative pour unifier divers langages mathématiques, pour construire une mécanique quantique et relativiste. D'autres essais ont eu lieu depuis, en particulier ceux de Tomonaga et Schwinger utilisant la notion de superquantification, et, plus récemment, la synthèse mathématique tentée par Lichnenowicz. Dirac avait également prévu dans sa théorie l'existence d'un anti-électron; celui-ci, le positon, *fut découvert peu après par Anderson dans le rayonnement cosmique. Quant à l'existence d'*anti-particules *correspondant à chacune des particules connues, elle ne fut mise en évidence que plus tard, à partir de 1955, quand l'utilisation d'un accélérateur de particules suffisamment puissant permit de manifester l'*anti-proton. *Cependant la durée d'observation en reste très brève, car, dès qu'une particule rencontre son anti-particule, celles-ci s'annihilent en se transformant en énergie. Les recherches de Dirac avaient aussi amené à préciser le caractère d'un nouveau nombre quantique, le* spin. *Celui-ci avait été découvert dès 1925 par Uhlenbeck et Goudsmit et correspond au mouvement angulaire propre d'une particule.*

La physique moderne s'est aussi développée à partir des recherches sur les éléments radioactifs. Dès 1903, Soddy avait introduit la notion d'isotopie à propos de variétés d'un même élément qui avaient le même numéro atomique, mais non la même masse. Cette notion fut ensuite étendue aux éléments stables par les travaux de Thomson et Aston. Les premières transmutations artificielles, réalisées par Rutherford en 1919, furent interprétées en 1933 par Irène et Frédéric Joliot-Curie qui montrèrent que certains éléments légers bombardés par des particules α devenaient radio-actifs et émettaient des électrons positifs. D'autres particules n'allaient ensuite pas cesser d'être découvertes, et plusieurs dizaines sont connues à ce jour. Citons en particulier le deutéron *présent dans l'« eau lourde » mis en évidence par Urey, le* neutron *découvert par Chadwick, particule électriquement neutre et constituant du noyau atomique avec le proton, et aussi le* neutrino, *électriquement neutre et de même masse que l'électron. Cependant, pour interpréter la cohésion de la matière nucléaire, Yukawa supposa l'existence du* méson, *particule présente dans les échanges d'énergie entre neutrons et protons et qui, après une vie très brève, devait se diviser entre un électron et un neutrino. Cela amenait à considérer d'autres interactions (dites fortes) que celles envisagées dans la gravitation et l'électromagnétisme. Cette théorie fut confirmée par la découverte expérimentale, en particulier celle du* méson *π par Lattes, Occhialini et C. F. Powell en 1947. Cependant, peu à peu, le grand nombre de particules élémentaires a entraîné des recherches visant à ordonner cette multitude. Ainsi Gellmann et Zweig ont proposé en 1964 un modèle où les* quarks, *qui auraient une charge électrique fractionnaire, seraient les constituants fondamentaux des particules à interactions fortes. Ils n'ont cependant pas été mis en évidence expérimentalement. Il en est d'ailleurs de même pour d'autres particules. Citons par exemple les* tachyons, *dont la vitesse serait supérieure à celle de la lumière et dont la masse serait un nombre imaginaire.*

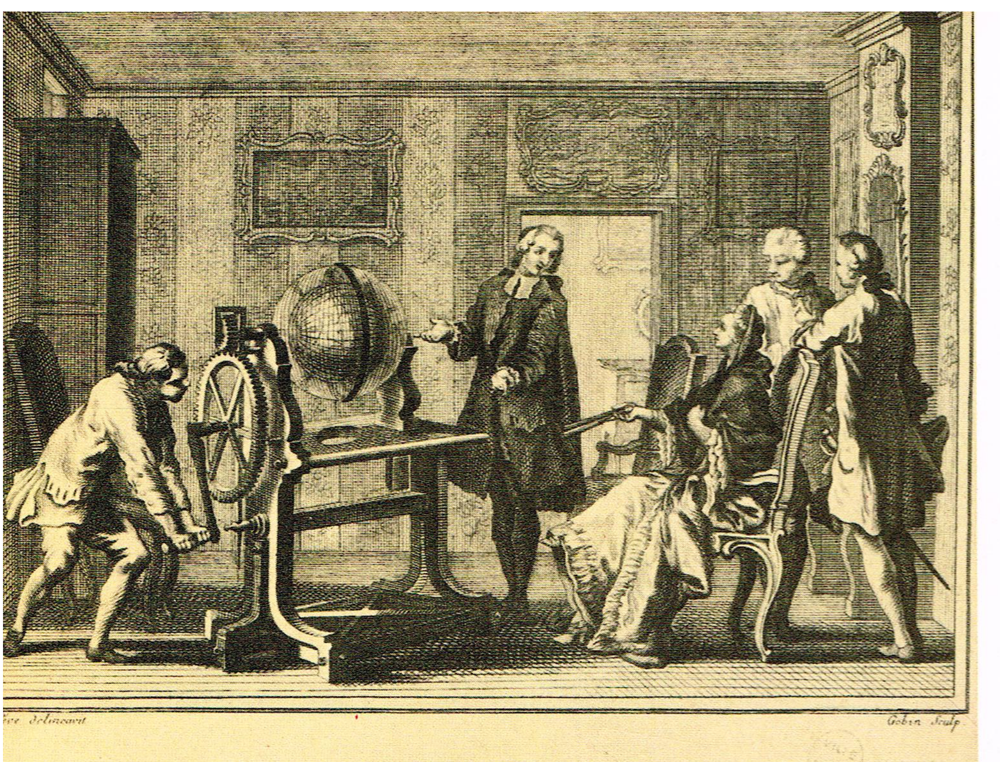
On connaît aussi aujourd'hui un autre type d'interaction : l'interaction faible, responsable du rayonnement β, dont la théorie est due à Fermi. C'est l'étude de telles interactions qui amena en 1956 Lee et Yang à affirmer que pour elles la loi de conservation de la parité était violée. Une expérience organisée par Mme C. S. Wu leur donna raison, montrant ainsi l'importance de la « chiralité », c'est-à-dire de la distinction entre la gauche et la droite, dans les phénomènes naturels. D'autre part, une expérience réalisée en 1964 au Brookhaven National Laboratory a montré que les interactions faibles violent aussi l'invariance par « inversion du temps ». Jusque-là, le fléchage du temps ne pouvait être établi qu'au niveau de systèmes macroscopiques où des lois statistiques étaient applicables. Ainsi, on peut repérer en fonction de l'entropie l'ordre dans lequel ont été prises deux photos d'un système macroscopique isolé évoluant spontanément. Ce n'était au contraire pas possible dans le cas d'un microsystème, car la réaction pouvait avoir eu lieu dans les deux sens. L'expérience de Brookhaven montrerait cependant que l'irréversibilité du temps se manifeste aussi au niveau de certaines réactions élémentaires.

La physique et la technologie

On ne saurait conclure ce récit historique sans rappeler que la physique se développe en liaison étroite avec de nombreuses inventions techniques. Il en est ainsi en notre siècle pour la T. S. F. et la télévision, pour l'éclairage par luminescence, pour les ultra-sons, le radar, le laser, etc.

Mais les plus marquantes sont dues à la physique atomique. Les recherches sur les produits résultant de l'action de neutrons lents sur l'uranium, commencées par Fermi en 1934, aboutirent en effet à la découverte du phénomène de fission qui fut précisé par Hahn et Strassmann. Ce phénomène libère une grande quantité d'énergie rayonnante et thermique; l'étude des réactions en chaîne par Francis Perrin amena à découvrir qu'en introduisant une masse critique, la réaction devient explosive. En 1942, la première pile atomique, où le dégagement d'énergie est lent, fut construite à Chicago sous la direction de Fermi. Enfin, en 1945, explosait la première bombe atomique obtenue par suite des travaux d'une équipe de physiciens réunie aux États-Unis et animée par Oppenheimer. Peu après, les bombes lancées sur Hiroshima et Nagasaki annonçaient à l'humanité les débuts de l'« ère atomique », plaçant celle-ci sous le signe d'une puissance destructive depuis lors largement accrue, notamment avec l'invention des bombes H. Quant à l'usage quotidien de l'énergie atomique, il ne cesse de croître avec la multiplication des centrales nucléaires, l'utilisation de réacteurs, etc.

Ainsi le visage de la physique moderne s'est modelé rapidement à partir des révolutions relativiste et quantique. Outre les tentatives d'unification entre ces deux dernières, les domaines de recherche sont aujourd'hui multiples : physique nucléaire, physique des plasmas, astrophysique, électronique, superconductivité, physique de l'espace, etc. L'étude des états extrêmes y apparaît décisive : très hautes ou très basses températures... Mais la figure de la physique ne peut être dissociée de celle de la technologie, et son développement soulève des interrogations à la mesure des conflits qui nous agitent.



▲ *Gravure du XVIIIe siècle retraçant* l'Expérience physique servant à expliquer les causes du déluge.

Bulloz

LA MÉTHODE EXPÉRIMENTALE

Dès l'avènement de la physique classique avec Galilée, la méthode expérimentale est tenue pour la caractéristique principale de la physique. Mais on ne peut l'approcher qu'en sachant qu'une telle expression est le foyer, le nœud d'une série de questions. Il faut justifier son singulier et signaler son organisation, mais auparavant il nous faut saisir dans quels jeux d'oppositions cette expression s'inscrit.

Un fait d'expérience ne possède pas en lui-même une vérité assurée. La notion d'expérience renvoie à la généralité la plus grande ; tout objet se saisit, se tient « dans » une expérience ; celle-ci n'a pas à être délimitée, elle est d'emblée plurivalente... Bien avant la mise au jour de la loi de la chute des corps par Galilée, les corps lourds et inanimés tombaient ; c'était là un fait d'expérience, absolument compact. Mais tant que ce fait n'était pas pris en charge par une théorie, il subsistait un doute sur la possibilité de sa répétition. La prise en charge théorique assure donc que la coordination de deux phénomènes n'est pas provisoire, mais au contraire qu'ils sont unis par un lien de nécessité. Il faut donc distinguer deux notions : celle d'**expérience** et celle d'**expérimentation**.

L'expérience alors, en elle-même, ne serait guère autre chose qu'une réserve, un cadre dans lequel se tiendrait une multiplicité confuse, aléatoire et désordonnée de « phénomènes ». Le sens du rappel à l'expérience est donc en physique, dès qu'il dépasse la valeur polémique qu'on peut lui accorder, profondément ambigu. L'expérience qu'on suppose vérifiée ne parle pas d'elle-même. C'est en ce sens qu'on peut soutenir que l'observation n'est pas non plus une notion simple. Elle suppose, pour avoir droit à des titres de légitimité, un ensemble d'hypothèses à vérifier, un privilège de droit accordé à certains effets ; ne nous frappent que les faits susceptibles de retenir notre attention. Or, celle-ci n'est pas, en l'absence d'appareils qui la relayent (instruments de mesure...), rigoureusement égale et uniformément dirigée. La notion de fait d'expérience est donc à critiquer au moins sous deux de ses conséquences. Quand Aristote tenait pour un fait d'expérience, pour une loi, le fait que « pour les animaux à qui la nature a fait un corps trop velu, la queue se trouve diminuée, comme c'est le cas chez les ours », on peut faire la critique d'un tel propos, en remarquant que la généralisation s'est établie sur des bases qui ne sont ni assez larges, ni assez claires. L'observation, qui s'en tient donc à la perception commune du sensible, ne peut donner matière à l'établissement d'une loi. Le rapport naïf, spontané et sensible qu'entretient l'homme avec le monde joue, pour l'activité scientifique, un rôle d'obstacle ; G. Bachelard mais aussi bien d'autres épistémologues ont reconnu qu'entre la connaissance sensible (celle de l'expérience quotidienne) et la connaissance scientifique, il y a une rupture, un fossé. La connaissance sensible abolit les différences et fait passer pour homogènes, identiques ou comparables les différents objets matériels. Une telle position tient à ce qu'on a pu appeler le « réalisme naïf ». Les Grecs avaient déjà percé une brèche dans ce réalisme, en considérant que les sens humains sont trompeurs. Mais il s'agit de beaucoup plus quand on en vient à considérer les expérimentations et simulations que les physiciens d'aujourd'hui effectuent.

L'expérimentation dès lors est un travail ; en tant que telle, elle use d'instruments singuliers, dont les puissances sont connues, elle met en corrélation un objet avec un dispositif (pensons au plan incliné de Galilée), et elle établit des échelles de mesure. Un tel travail vise donc à réduire au minimum les inconnues, les présupposés naïfs et va jusqu'à réfléchir tous les éléments nécessaires à l'accomplissement de l'expérience. Là où l'expérience laisse impensées les conditions qui la rendent possible, au contraire l'expérimentation tend à intégrer à son propre développement la réflexion et la critique de ces conditions. Bachelard disait : « La physique n'est plus une science des faits, mais une technique d'effets (effets Zeeman, Clark, etc.). » Une telle formule vise à rappeler que l'activité scientifique n'a que peu à voir avec celle du collectionneur qui se contente de classer ce qu'il trouve, mais au contraire, qu'elle met en œuvre des moyens, des instruments techniques destinés à mettre en évidence quelque effet caché.

Pendant tout le XVIIe et le XVIIIe siècle, les savants font appel à des expériences fictives, dont ils n'ont pas les moyens de réalisation, pour confirmer ce que d'autres expériences réalisées avaient pu mettre en évidence. Il ne s'agit pas là d'un recours à l'imagination tout à fait arbitraire, mais bien de l'embryon d'une nouvelle pratique qui sera amplifiée dans la physique moderne : elle consiste en « une sorte de coup d'État théorique », par lequel ce qui n'est qu'une intuition vient forcer les anciens cadres pour imposer une nouvelle problématique. Ces expériences fictives sont donc en elles-mêmes un tissu d'hypothèses provisoires ; la fiction qu'introduisit Galilée, à savoir le principe d'inertie (qui, en l'état de la science de son époque, n'était pas démontrable et déductible), ne dépendait pas directement du nombre de phénomènes invoqués pour le justifier. La question que Galilée s'est posée est du type : « Que se passerait-il si les corps tombaient sans que rien ne vînt interférer dans leur chute (c'est-à-dire la résistance de l'air, les frottements, etc.) ? » A. Koyré a montré que l'expérimentation à laquelle Galilée recourt n'a pas le sens univoque d'un appel à l'observation, mais au contraire qu'elle privilégie la déduction ; à tel point qu'en une formule paradoxale on peut soutenir que la physique se fait indépendamment de toute expérience.

La première conclusion à laquelle nous aboutissons permet de formuler la prévalence de la théorie sur l'expérience. En d'autres termes, Bachelard signalait qu'en physique le construit l'emportait sur le donné. Quand il voulait qualifier le type de dispositif qu'utilise la physique contemporaine, il avançait la notion d'artefact. La pile de Volta, qui est un empilement de disques de métal séparés par du feutre imbibé d'acide sulfurique, ne relaie ni ne correspond à un objet naturel. Aucun objet naturel n'a pu être découvert dont la pile ne serait qu'une amplification du point de vue de ses effets. La pile de Volta fournit un courant continu électrique. Cette pile est un pur artefact, un artifice expérimental.

La physique contemporaine, eu égard à son degré de complexité, ne peut plus promouvoir des « expériences pour voir » ; il s'agit toujours de tenter de vérifier une hypothèse. Or l'hypothèse n'est pas plus arbitraire qu'évidente ; elle est toujours une synthèse intégrant plusieurs hypothèses partielles. Certaines de celles-ci, à défaut d'être définitivement assurées, sont tenues conventionnellement comme inaltérables ; tout le travail du physicien consiste donc à rapporter la variation des résultats à la diversité des conditions de l'expérience. La mise en évidence des paramètres réellement importants constitue alors le travail

central et décisif. Mais ceci ne peut se faire qu'en multipliant les dispositifs, de manière à accuser et privilégier la puissance d'un paramètre supposé. Tout un travail de vérification, puis de rectification nécessaire, est constitutif de l'expérimentation ; les différences d'éclairage du phénomène à observer doivent servir à démultiplier les relevés de mesure. L'ensemble des résultats doit ensuite être discuté dans le cadre des théories existantes. Mais cette discussion reste provisoire et approchée, tant qu'on n'est pas assuré de ne pas avoir négligé un paramètre essentiel, nécessaire à la compréhension du phénomène étudié. Et cela d'autant plus que le dispositif de l'expérience n'est pas pur et transparent, et que donc un effet parasite accompagnant tel ou tel appareil peut venir brouiller le champ de l'expérience.

Si l'objectif d'une telle pratique consiste en l'établissement de lois, il faut néanmoins noter que la notion de loi n'est pas unitaire (voir *Physique et mathématique*). Toute loi néanmoins ne subsiste pas indépendamment des autres lois : elles se répondent entre elles, organisant un réseau serré de connaissances ; elles se solidarisent dans des théories et s'accompagnent de concepts scientifiques. Par exemple, Bachelard décrit le *concept de capacité électrique* en se rappelant que la notion de capacité ne doit pas être comprise dans son acception usuelle. Au contraire, ce concept doit lui-même être compris comme solidaire d'un corps de concepts indiqué par la formule algébrique de la condensation électrique. La loi, en tant que telle, assure la cohésion mathématisée de ce corps de concepts.

Le procédé par lequel la loi est établie est l'*induction* (au sens de la logique), terme qui qualifie un mouvement de « montée » où la diversité de relations répétables entre des grandeurs est ramenée à un principe. Mais on ne produit pas une loi en découvrant une relation cachée entre des phénomènes et en amassant des connaissances. La loi n'est pas une traduction mathématique et synthétique de faits empiriques. Elle est rigoureusement inventée. L'induction consiste donc bien à remonter du particulier au général (sens classique du terme), de façon que la généralité atteinte (la loi) permette de prévoir toutes les spécifications particulières, mais pas seulement. Ceci n'est vrai que pour les lois physiques élémentaires (par exemple la chute des corps dans le monde, à l'échelle humaine). Mais dans tous les cas, l'hypothèse est l'élément essentiel de tout procédé inductif. Pour les lois complexes de la physique quantique, leur compréhension doit être plus cherchée vers le « haut » (la *théorie* dont la loi n'est qu'un élément) que vers le « bas » (les *données empiriques* dont elles rendent compte). La loi qui, à l'âge classique, visait à montrer le caractère nécessaire d'une cause pour expliquer un phénomène répétable, était aussi comprise comme une forme sous laquelle la cause originaire de toutes choses (théologique) avait prescrit l'arrangement des choses dans le monde. Il s'agissait alors de les découvrir, comme si un voile les dissimulait aux yeux de l'humanité.

La physique moderne a brisé cette représentation et introduit l'idée que la loi était plus à inventer qu'à découvrir. Toujours approchée, la connaissance que l'on peut avoir du monde est désormais contrainte de voir dans ses propres théories et hypothèses plus de réalité que dans les données empiriques initiales. Il serait possible de conclure en précisant la hiérarchie des moments de la méthode expérimentale. Cette hiérarchie est double ; elle est d'abord *temporelle* au sens où des priorités s'instaurent, où un enchaînement nécessaire d'opérations se trouve requis. Mais elle est aussi *épistémologique*, au sens où, par exemple, l'observation se trouve toujours, bien que première chronologiquement, équivoque épistémologiquement. L'observation initiale est singulière et chargée d'effets parasites. Par puissance d'invention, ingéniosité, une première conjecture est proposée (par exemple l'idée d'inertie des corps pour Galilée). C'est à ce moment-là que le travail de l'induction (généralisation) est effectué. Les deux phases sont souvent chronologiquement aussi bien que logiquement inséparables. Le produit de ces deux phases consiste en l'établissement d'une loi qu'on peut qualifier de supposée. Elle est provisoire et demande à être vérifiée.

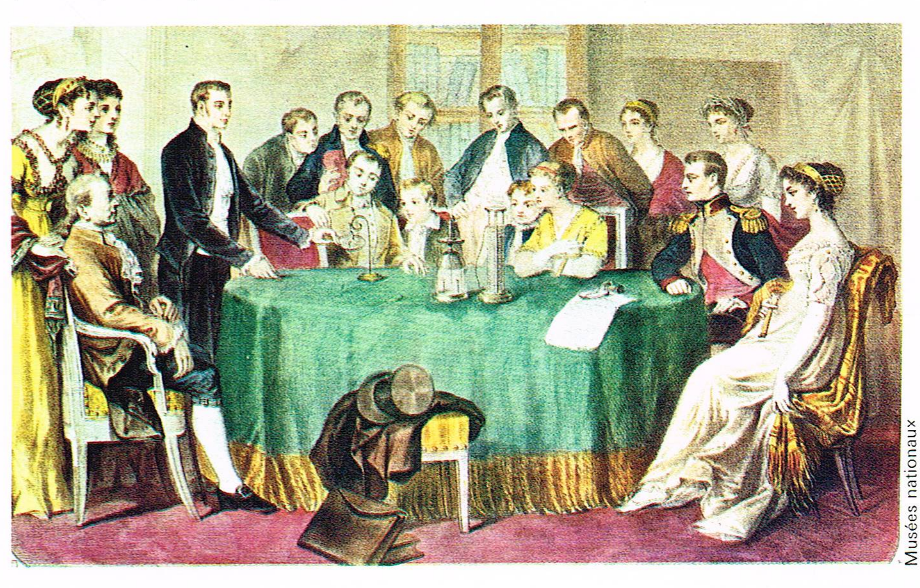
Cette vérification ne se fait qu'en pratiquant le mouvement inverse de l'induction, la *déduction*. Il s'agit là d'un mouvement de « descente », visant à prévoir un cas singulier, homogène et analogue au phénomène étudié dans l'observation initiale. L'expérimentation, c'est-à-dire le dispositif technique destiné à prévoir ce cas singulier, trouve ici sa place (le plan incliné pour Galilée). L'observation finale étant obtenue, quel que soit son résultat, il faut recommencer. Mais ce recommencement se fait toujours en variant les conditions sensibles de l'expérience, de façon à multiplier les mesures et donc, par là même, à tenter de déceler l'existence d'un nouveau paramètre, encore indécelable.

Les physiciens recommencent indéfiniment ce cycle, de manière à diminuer au maximum les effets de brouillage, en augmentant ainsi les chances d'épuiser la diversité du phénomène. Mais cette description reste trop rigide, affaiblissant la tension réelle présente dans le travail des physiciens. La partie la plus obscure de ce cycle reste le moment dit de l'*invention*, de l'ingéniosité. D'autre part, la théorie n'est pas singulière, et, provenant des données empiriques, elle s'oppose aux théories qui l'ont précédée, au corps constitué des concepts antérieurement présents. A tel point que l'on peut soutenir que les théories ne procèdent jamais des faits, parce que ceux-ci ne se manifestent que déjà transformés dans la théorie précédente (la chute des corps, dont la loi qui a été mise au jour par Galilée avait été l'objet d'élaborations multiples).

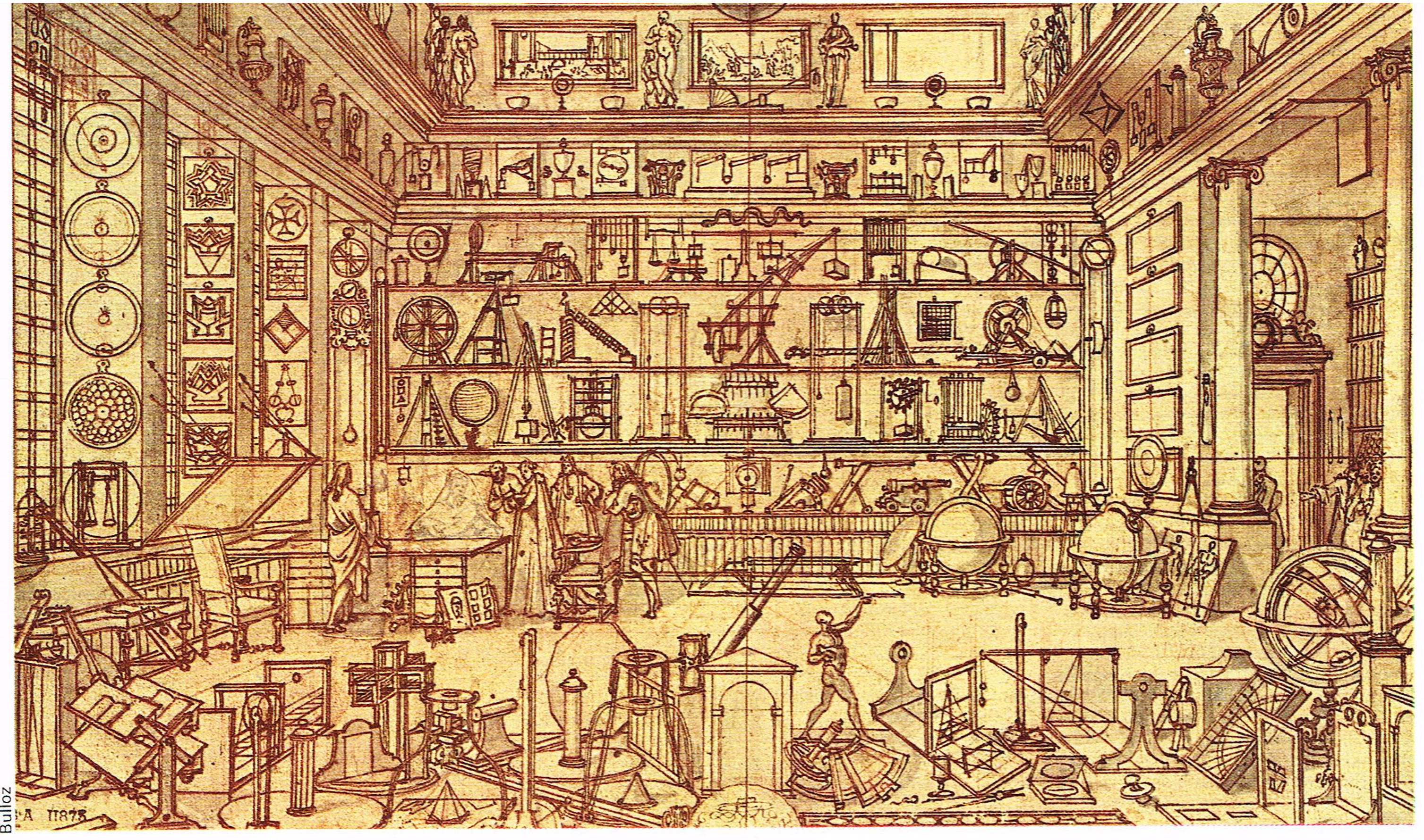
Citons l'épistémologue de la biologie Georges Canguilhem : « Il n'y pas à proprement parler de méthode inductive. Ce qui est déduction, c'est-à-dire invention d'hypothèses dans la science expérimentale, est le signe le plus net de l'insuffisance de la méthode à expliquer le progrès du savoir. » Tout compte fait, la méthode expérimentale n'existe pas, au sens où des principes de méthode, c'est-à-dire d'un mécanisme de savoir-faire codifiable, suffiraient à eux seuls à énoncer des lois en physique.

On ne peut pas pour autant considérer la physique comme une affaire de mots. Elle n'est pas seulement une construction logique établie par convention. Ce n'est pas la psychologie qui permet de rendre compte de l'objectivité scientifique. La cohérence interne ne suffit pas à valider un ensemble d'énoncés et par conséquent les preuves de la justesse d'une théorie ne sont concluantes que si un passage par l'expérimentation a eu lieu. C'est dire que l'expérience n'est pas simplement l'application de la théorie mais surtout la mise à l'épreuve des concepts. Cependant ces derniers ne sont jamais définitivement prouvés et aucune vérification n'a une portée absolue. De ce fait, une certitude scientifique n'a de valeur qu'aussi longtemps qu'elle résiste à l'épreuve des faits, et l'expérience ne vérifie la théorie que dans la mesure où elle ne la contredit pas. Selon Karl Popper, « un système faisant partie de la science empirique doit pouvoir être réfuté par l'expérience ». Toute preuve n'est donc que temporaire et toute théorie est susceptible d'être contredite : tel est le sens du critère de « falsifiabilité » avancé par Popper. Le « degré de crédibilité » (Watanabe) d'une théorie semble en définitive dépendre d'un réseau complexe de preuves qui n'est jamais achevé ou définitif.

▼ Volta *devant le Premier consul.*



Musées nationaux



Bulloz

▲ *Le* Cabinet de physique, *dessin de Sébastien Leclerc (École des beaux-arts, Paris).*

LES CONCEPTS FONDAMENTAUX DE LA PHYSIQUE

L'histoire de la physique montre qu'une science ne se développe pas de façon linéaire, selon le modèle d'une généralisation continue et sans heurts. La validité d'une théorie ne s'établit que si elle est capable de rendre compte des erreurs dont elle se sépare. Ainsi aucun concept physique n'est déterminé une fois pour toutes, mais il donne toujours lieu à des remaniements et à des refontes. Le savoir ne s'accumule pas selon une addition de couches successives, ses limites ne se déplacent qu'en fonction des mutations qui scandent son devenir. C'est pourquoi, à la suite de Bachelard, on nomme « rupture épistémologique » le moment de naissance ou de renouvellement où s'institue une science. Cette dernière n'est pas pour autant pure de toute erreur, et sa mise en question reste toujours possible. Ce qui distingue une science parmi tous les autres savoirs, c'est la rigueur de sa mise en forme et son souci de la preuve, mais non le fait qu'elle permettrait de connaître le réel tout entier ou d'atteindre un quelconque absolu. La physique ne doit donc pas être considérée comme un savoir mort mais comme une activité qui perdrait son ressort si elle perdait toute dimension pratique. Ainsi l'étude de ses concepts va nous montrer que ceux-ci ne sont pas restés uniformes mais ont été l'objet de multiples rectifications et restent en chantier.

Physique et mathématique

Du point de vue de l'histoire, les rapports qu'ont entretenus physique et mathématique comme disciplines peuvent être distribués sommairement en trois périodes.

Le premier temps fut celui de l'exclusion réciproque : ainsi Aristote précisait que les figures sur lesquelles travaillent les mathématiciens sont des figures idéales dont le monde réel ne donne que des exemples. La physique par contre a à faire avec des objets matériels dont la configuration présente toujours des défauts ; la physique est donc, à ce moment, plus apparentée à la zoologie, à l'astronomie qu'à la mathématique. Mais cette partition ne résistera pas à l'avènement de la physique classique, qui substitue à une physique des qualités une science de la mesure et de l'expérimentation.

Le travail de Galilée représente la seconde référence à laquelle nous devons nous arrêter. Il paraît être la figure la plus inventive dans l'incorporation de la mathématique à la physique. Galilée déclare : « La nature est écrite en langage mathématique dont les lettres et les syllabes sont triangles et cercles. » Galilée se réfère à Platon et à Archimède, son entreprise consciente tient dans la volonté de mathématiser la physique. Il faut ici traduire des réalités physiques en grandeurs géométriques ; ainsi pour le temps et la vitesse dans la détermination du mouvement. Précisément Galilée détermine mathématiquement des faits déjà connus ; sa puissance créatrice tient à son usage de la méthode hypothético-déductive traditionnellement réservée à la géométrie, dans la science de la nature. Galilée, et à sa suite Descartes, ramènera des différences qualitatives à des différences de quantité. La science classique de type galiléen introduit la loi physique comme rapport où une grandeur varie en fonction d'une autre grandeur. Perfectionnée par Newton, la mathématisation de la physique, après Galilée, s'étend ; en particulier, on n'en reste plus à une géométrisation, on y intègre d'autres champs de la mathématique, surtout le calcul différentiel. L'idéal de la science newtonienne consiste dans la volonté de mettre au jour une loi fonctionnelle ; l'équation centrale de la physique newtonienne, $F = m\gamma$ (la force est égale au produit de la masse par l'accélération), exprime un rapport mathématique où le lien entre les trois variables est devenu un lien de nécessité logique, indépendant de toute considération qui privilégierait l'un des trois termes. La formule devient le nœud qui lie trois grandeurs ; et elle est première, instigatrice de toute recherche visant à déterminer une des variables. Mais cette formule reste simple, et au fur et à mesure que la physique affirmera ses recherches, elle empruntera aux mathématiques des schémas, des notions de plus en plus complexes. Ainsi les lois physiques jusqu'au début du XXe siècle n'useront comme appareil mathématique que des proportions, des équations différentielles et d'autres à dérivées partielles. Elles sont en général destinées à établir un lien causal entre deux états d'un objet dans le monde, dont le second succède au premier. Cette progression dans l'incorporation des différentes structures formelles mathématiques conduit à la démultiplication des unités de mesure, à leur précision (la distinction entre le poids et la masse).

L'établissement de correspondances (le sens de la formule mathématique classique) conduit donc à un double travail : l'écriture du rapport mathématique lui-même ainsi que la mise au jour de variables fécondes et spécifiées. L'idéal de la science classique consiste alors aussi, une fois posée la relation initiale entre diverses grandeurs, à retrouver, en développant et en combinant cette relation avec quelques autres, l'établissement d'une loi plus restreinte ; le progrès de la science procède alors par enveloppement.

Le troisième temps à considérer, où un nouveau rapport, irréductible au précédent, se cristallisera, tient dans la révolution introduite par Einstein. Le travail d'Einstein ne visera pas d'abord la mise au jour d'un rapport entre grandeurs physiques, mais introduira une hypothèse concernant les conditions de possibilité de toute mesure physique et de connexion mathématique de ces mesures. C'est donc à un appareil mathématique très raffiné, le calcul tensoriel, que devra faire appel Einstein.

Les problèmes épistémologiques afférents au rapport physique/mathématique sont nombreux et loin d'être réglés.

L'usage d'appareils mathématiques dans la physique est permanent et irremplaçable. En premier lieu parce qu'il s'agit de mesurer et d'ordonner entre eux les phénomènes. Mais ce n'est là qu'une remarque minime. Les concepts mathématiques sont au cœur des théories physiques. Sans le concept d'équations à dérivées partielles, la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell n'aurait pu voir le jour. La théorie physique emprunte à la mathématique aussi bien sa structure formulée (disposition des énoncés, axiomatisation des principes, rythme hypothético-déductif) que la production de ses concepts.

Une fois remarqué que les « hypothèses physiques se formulent mathématiquement » (Gaston Bachelard), il faut tenter de déterminer la nature de ce rapport.

Pour Galilée, mais aussi pour un grand nombre de scientifiques ultérieurs, tel Poincaré, la mathématique ne joue que le rôle d'un langage pour la physique : Poincaré par exemple décèle la nécessité de faire intervenir les mathématiques pour les lois physiques, dans la mesure où celles-ci coordonnent des grandeurs de manière que cette relation soit répétable. Il insiste sur l'importance des conventions (pas arbitraires) bien choisies, dont l'usage permet de fixer des unités et des échelles de mesure. D'autre part, pour tenir cette position, il faut pouvoir aussi assimiler la mathématique à un langage, c'est-à-dire à un système d'énoncés pourvus de règles (lexicales, de formation de proposition et de déduction logique). Un tel langage est ici considéré d'un point de vue logique, comme langage bien fait. Mais le problème subsiste; à supposer que la mathématique soit un langage, il faut s'interroger sur le privilège qu'il revêt pour la physique. Est-ce de façon miraculeuse et incompréhensible que la physique ne pose ses questions que mathématiquement? Est-ce qu'un autre langage serait susceptible de se substituer aux mathématiques, tout aussi efficace et opérationnel pour la physique? On peut considérer que la physique contemporaine nous contraint à récuser ce genre de questions. G. Bachelard, qui s'éleva avec force contre l'idée que les mathématiques n'étaient qu'un langage, pense la théorie physique comme issue d'un dialogue entre deux travaux : l'expérimentation et la mathématisation.

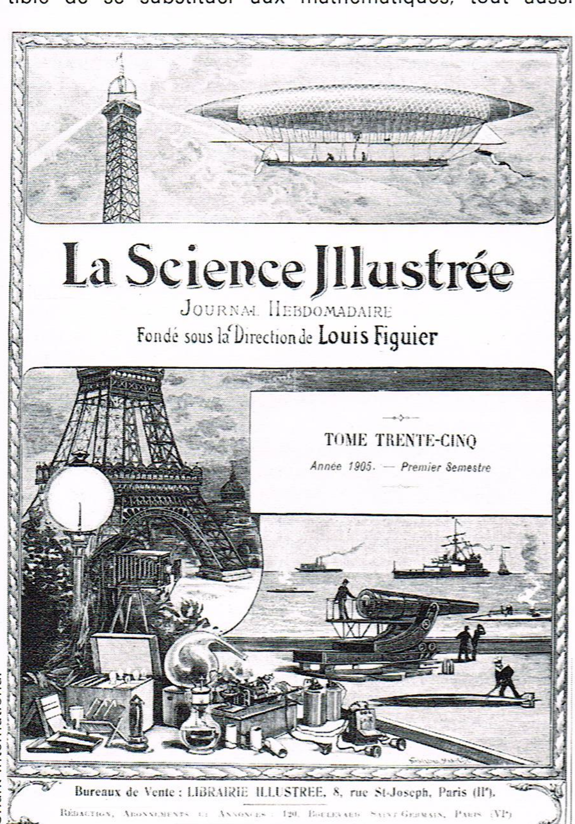
Mais physique et mathématique diffèrent entre elles, en tant que seule la mathématique peut se développer sans emprunt. Il ne faut pas croire pour autant que les recherches mathématiques fonctionnent comme un jeu gratuit, développant des théories, des modèles, des opérateurs présentés pour eux-mêmes, que le physicien aurait loisir d'incorporer aux expérimentations qu'il effectue.

Les mathématiques ne sont pas à strictement parler une réserve dans laquelle chacun serait susceptible de puiser à sa convenance pour élaborer le cadre théorique dont il fera usage. L'opérateur mathématique n'est pas plus un squelette auquel s'accrocherait la « chair » de la constitution de l'expérience, qu'il n'est qu'un vêtement susceptible d'être changé. On peut donc admettre que l'adéquation mathématique/physique ne doit rien avoir d'incompréhensible; « tout symbole physique a une signification mathématique » (M. Bunge). Il faut donc considérer que, si les mathématiques ne sont pas, comme le pensait Galilée, le langage par lequel la nature parle, elles sont néanmoins pour la physique les conditions de possibilité de son développement. En effet, les mathématiques constituent, non seulement la forme de la rationalité physique, mais aussi le mode de traduction des effets de l'expérience; elles donnent, par là même, accès au réel qu'elles démontrent.

Mouvement et vitesse

Dans la pensée antique, le problème du mouvement est un problème très général; la notion de mouvement est apparentée au changement. Aristote conçoit quatre modes de changement ou de mouvement : la *génération*, l'*altération* (changement qualitatif), l'*accroissement* ou *décroissement*, et le *déplacement*. Le mouvement est pensé comme le contraire du repos, et à eux deux ils sont les constituants d'un genre, celui de la mobilité. Le mouvement est une catégorie essentielle, en tant que tout être, dès qu'il se meut, peut être divisé en deux; ce qui demeure permanent et inamovible en lui (l'essence), et ce qui est susceptible d'être remplacé, enlevé de son être (l'accident). Mais Aristote accorde un privilège au permanent, tout comme il privilégie le repos sur le mouvement. Le repos pour les corps inanimés est la règle, à tel point que le mouvement est qualifié, pour ces corps, de violent quand il n'est pas dans la nature du corps en question d'avoir un mouvement naturel (la flamme va vers le haut). D'autre part, Aristote suppose que, pour ce qui est du déplacement des objets, quand ce déplacement est violent (le javelot), une force constante est nécessaire pour maintenir une vitesse constante. Il doit donc supposer que le mouvement se transmet par l'éther présent dans l'atmosphère. A proprement parler, Aristote ne possède pas les concepts de force et de vitesse.

C'est à Galilée et à Newton que nous devons la critique de cette conception (qui avait été d'ailleurs réélaborée par les physiciens de « l'impetus ») et la promulgation de la mécanique classique. La conception classique pense le mouvement comme un état et non plus comme un moment antérieur au repos qui serait la norme. Le mouvement est donc étudié pour lui-même. La grande nouveauté tient au fait que « le mouvement et le repos n'existent plus dans les corps eux-mêmes » (A. Koyré). Le mouvement dont traite la physique classique n'est pas le mouvement réel, quotidiennement observé. Il se rapporte à une mathématisation de la nature et par là même n'a plus rien à voir avec le changement. Il est interprété géométriquement, et devient donc un concept mathématique. Mais si Galilée réussit à briser l'ancien cadre théorique, il n'en arrive cependant pas à dégager la notion d'accélération. Il pense que la chute d'un corps se fait à une vitesse constante. Non que Galilée nie l'accélération de la chute des corps, mais elle n'a lieu pour lui qu'au début. L'erreur de Galilée tient à ce qu'il pense la vitesse du corps qui tombe comme proportionnelle à l'espace parcouru et non pas au temps écoulé.



Snark International

◄ ***Frontispice de*** **la Science illustrée** ***(1905).***

Newton, qui s'opposa plus tard à Descartes, plus qu'à Galilée, put dégager la notion d'accélération. Pour cela, il dut substituer à la conception relativiste du mouvement, à laquelle Descartes était attaché, l'idée d'un *mouvement absolu*. Descartes refusait l'idée d'un point fixe de référence, en fonction duquel on pouvait décrire un mouvement. Il donne l'exemple du voyageur qui, sur le pont d'un navire, peut simultanément considérer qu'il se meut par rapport à la terre, mais aussi qu'il ne se meut point par rapport au vaisseau. Newton pense ce raisonnement comme caduc, dans la mesure où le mouvement vraiment physique et absolu ne peut consister en un changement de lieu par rapport à d'autres corps, mais en un déplacement par rapport à un espace absolu. De plus, Newton montre que l'action sur un corps (la projection) donne comme produit un changement de vitesse, qu'il nommera l'accélération ; l'accélération désigne aussi bien la diminution continue que l'augmentation de la vitesse. Mise sous forme mathématique, on peut fixer en mécanique classique la *vitesse* comme la dérivée première de la distance parcourue et l'*accélération* comme la dérivée seconde.

Les développements de la mécanique ont montré l'indissociabilité des notions de matière et de mouvement. On crut longtemps qu'elle constituait les bases inaliénables d'une physique unifiée. La thermodynamique elle-même utilisa comme hypothèse dominante l'identification de la chaleur au mouvement des molécules. En même temps, elle affirma l'impossibilité du mouvement perpétuel en donnant une signification physique à l'irréversibilité. Les théories classiques durent ensuite être remises en cause. Ainsi l'expérience de Michelson et Morley montra l'inexistence de l'éther, ce qui impliquait qu'aucune référence fixe et définitive ne permettait de caractériser un mouvement absolu. La vitesse de la lumière fut alors établie comme invariante, indépendante du mouvement de la source et de l'observateur. Cela rendait inapplicable sur ce point la loi de composition des vitesses. Celle-ci veut dire, par exemple, qu'un observateur marchant dans un train va à une vitesse égale à la somme de la vitesse du train par rapport à la Terre et de celle qu'il a par rapport au train. Cela impliquerait donc qu'un rayon lumineux émis dans un train aurait une vitesse supérieure à celle d'un rayon émis depuis un point immobile par rapport à la Terre. Or l'expérience nous apprend que les vitesses sont identiques dans les deux cas. Leur invariance aboutit à l'élaboration de la théorie de la relativité et à une révision des lois de la mécanique. De plus, alors que la théorie newtonienne supposait la masse invariable, la physique moderne montre qu'elle augmente avec la vitesse.

Espace et temps

Longtemps dominant en Europe, le point de vue d'Aristote fondait l'image d'un monde clos et hiérarchisé. Le Cosmos était alors conçu comme une totalité bien ordonnée où chaque chose était située en un « lieu naturel » précis. Limité par la sphère des étoiles, le monde ne comportait ni trou, ni vide, et rien n'existait hors de lui. C'est ce dogme qui fut brisé par la révolution astronomique des XVIe et XVIIe siècles, puis éliminé par la mécanique classique. Les travaux de Copernic commencèrent par déloger la Terre de sa position centrale dans l'Univers et par en faire une planète en mouvement, non privilégiée. Cependant, même s'il ne pensait pas que le monde était mesurable, Copernic le croyait limité par la sphère des étoiles fixes et organisé harmonieusement autour du Soleil. Kepler, quant à lui, élabora une dynamique céleste où les planètes suivaient des orbites elliptiques et non circulaires : la notion de centre unique disparaissait, cédant la place à celle de foyers doubles. Galilée enfin, grâce à l'usage d'un télescope perfectionné, put révéler l'existence de nombreuses étoiles invisibles à l'œil nu et confirmer l'hypothèse copernicienne.

Dès lors les limites d'un monde élargi s'éloignaient jusqu'à devenir indéterminées. Descartes, par exemple, reconnut que le monde était « indéfini », réservant toutefois l'infinité à Dieu. D'autres philosophes, tels Henry More (1614-1687) et Spinoza (1632-1677), affirmèrent plus nettement l'infinité de l'Univers. Mais ce fut à partir des travaux de Newton que se dégagea la conception d'un **espace** vide et infini. Pour lui, l'espace constituait un réceptacle de la matière, tout en étant distinct de celle-ci, et ses parties étaient extérieures les unes aux autres. Dans cet espace, les corps étaient reliés entre eux par l'attraction universelle qui réglait aussi leurs mouvements. Ainsi s'imposa l'idée d'un espace neutre formant un substrat inerte des corps. L'Univers infini était substitué à l'image d'un monde circulaire et fermé.

« L'espace absolu... demeure toujours semblable à lui-même et immuable », écrivit Newton. Tel est en effet le cadre de la mécanique classique. L'Univers y apparaît comme un mécanisme dont les parties sont distinctes. Tout objet peut y être localisé et y décrit une trajectoire avec une vitesse définie. On peut donc suivre ses états successifs et les expliquer en fonction de lois mathématiques précises. C'est, en effet, au sein d'un espace uniforme qu'interviennent des changements d'états locaux au cours du temps. L'espace géométrique est ici identifié à l'espace réel. Il est euclidien et comporte trois dimensions. Il est isotrope, c'est-à-dire qu'aucune direction n'y est privilégiée. Il est homogène et continu, ne comportant ni région valorisée, ni brisure. Cet espace où se meuvent les corps permet des mesures exactes, des localisations précises, puisque les lois physiques y sont partout identiques. Mais il est aussi inaltérable et éternel, constituant par là une référence absolue et universelle.

L'édifice classique s'appuie toutefois sur un second pilier stable : le **temps.** Lui aussi constitue pour Newton un cadre absolu indépendant des événements. Il coule uniformément, formant un flux orienté et continu. Il est homogène et unilinéaire, permettant d'y situer des successions et fondant ainsi la causalité reliant les phénomènes entre eux. C'est pourquoi Kant posait l'espace et le temps comme conditions *a priori* de toute connaissance humaine, de l'intuition pure et de la raison. Un tel temps peut être figuré par une ligne droite, et il permet une stricte distinction entre l'avant et l'après. Il est universel, identique à lui-même en tout point de l'espace et par conséquent mesurable avec exactitude. On crut pendant longtemps pouvoir assurer la précision de cette mesure en la fondant sur le *jour sidéral*, c'est-à-dire, en fait, sur la rotation de la Terre. Mais il est apparu au XXe siècle que celle-ci est soumise à des irrégularités qui impliquent diverses corrections, en particulier en fonction du mouvement propre du Soleil. Aussi est-ce aujourd'hui le *temps atomique*, correspondant aux périodes de radiation émise, qui est l'étalon de base grâce auquel la précision atteint le milliardième de seconde.

Le caractère irréversible du *temps physique* l'oppose aux mythes d'un *temps cyclique* qui n'entame pas l'identité d'un monde conforme à son origine. Cette irréversibilité n'est cependant intégrée à la physique qu'au cours du XIXe siècle. C'est que tous les phénomènes envisagés jusque-là par la mécanique sont réversibles. Ainsi tout déplacement d'objet peut être suivi d'un retour à l'état initial. Au contraire, en thermodynamique, le principe de Carnot-Clausius pose que, dans tout système clos, la chaleur s'écoule des corps chauds vers les corps froids jusqu'à l'équilibre thermique. Ainsi s'introduit l'irréversibilité des phénomènes, correspondant à une « dégradation » d'énergie, à une dissipation de celle-ci en chaleur irrécupérable. Ce principe d'augmentation de l'entropie a ensuite été interprété à partir de la mécanique statistique. Boltzmann en particulier s'appuie sur la théorie ramenant la chaleur au « chaos moléculaire », à l'agitation désordonnée des particules. Il évalue d'autre part la probabilité d'atteindre un état macroscopique futur et établit une formule où l'entropie est proportionnelle au logarithme de la probabilité. Dès lors, l'évolution vers l'état le plus probable d'un système clos est associée à la croissance de l'entropie, c'est-à-dire à l'augmentation de la puissance de désordre, à la désorganisation. En fait, l'irréversibilité dont il s'agit ici n'existe que pour les phénomènes macroscopiques et les systèmes clos. De plus, elle est d'ordre statistique, et un processus contraire de diminution de l'entropie n'est pas impossible théoriquement. Elle ne concerne d'ailleurs que les ensembles organisés puisque, au niveau microscopique, « il y a bien là des événements, donc du temps, mais pas de flèche du temps » (Blanché).

Cette théorie statistique a été remise en cause plusieurs fois, en particulier par P. et T. Ehrenfest qui l'ont appliquée à la prévision d'états passés et non plus futurs. Or un tel point de vue amène à accorder une grande probabilité à une entropie plus importante pour les états passés que

pour celui correspondant à l'instant de la mesure. Le résultat d'une telle inversion semble donc rendre insuffisante la considération de l'entropie pour caractériser la direction du temps. Beaucoup plus récemment, des simulations sur ordinateur ont été effectuées. Supposant connues la position et la vitesse de chacune des particules d'un système clos, elles consistent à inverser toutes les vitesses au bout d'un temps donné d'évolution, ce qui équivaut à un retour en arrière. On constate alors une diminution pendant un temps égal au premier, puis de nouveau une augmentation de l'entropie. Une pareille expérience implique néanmoins une intervention de l'observateur, un apport d'information. Il semble donc que le changement d'entropie caractérise un temps écoulé, quel que soit le sens du fléchage de celui-ci.

D'autres travaux récents cherchent plutôt à unifier les diverses évolutions statistiques en y dégageant une même flèche de temps. Ainsi Reichenbach, Grünbaum, O. Costa de Beauregard se sont pour cela appuyés sur le principe de retardation des ondes, les deux derniers l'associant au principe de Carnot pour affirmer l'unicité du principe d'irréversibilité. Cependant de telles tentatives ne concernent plus seulement des systèmes clos, comme c'était le cas en thermodynamique, ou supposent peut-être que l'Univers est une totalité finie. Il apparaît en définitive que l'irréversibilité est avant tout un fait d'expérience et reste un principe non démontré, un postulat. En ce sens, affirmer l'irréversibilité au niveau macroscopique revient à reconnaître l'existence d'une causalité liée à un ordre de succession temporel.

On peut envisager à partir d'un état initial d'un système de calculer la probabilité d'un autre état de ce système dans le passé ou dans le futur. Dans les deux cas, on établit un lien de causalité entre le premier et le second. De plus, le premier est connu (au niveau macroscopique) alors que le second n'est que probable. La détermination statistique s'appuie donc sur un lien causal et implique un écoulement du temps. Cela montre que l'irréversibilité tient aux conditions de l'expérience et n'est pas absolue. Certains physiciens ont d'ailleurs pu envisager des changements dans la direction du temps, voire l'existence de particules remontant le cours de celui-ci.

La conception classique de l'espace et du temps absolus a en fait été détrônée de sa position fondatrice par la théorie de la relativité dont l'impact a bouleversé l'Univers. En reconnaissant l'invariance de la lumière dans le vide, Einstein est en effet amené à refuser l'existence de vitesses infinies et par conséquent à nier la possibilité de propagations instantanées. Cela le conduit à rejeter la notion de simultanéité à distance qui n'a de sens que si le temps est absolu, c'est-à-dire si des observateurs différents sont informés en même temps d'un fait, et ceci quels que soient leurs mouvements.

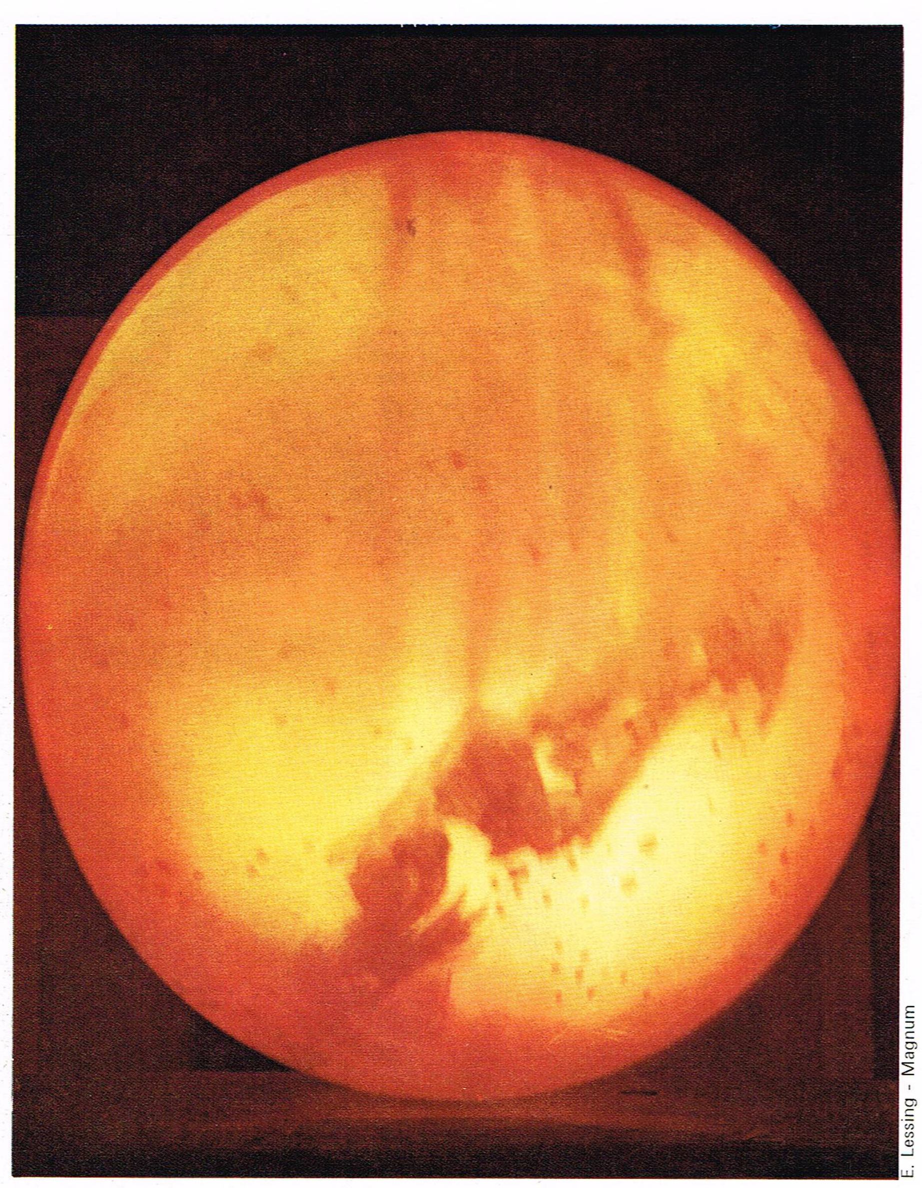
Or cela n'est plus concevable si la vitesse de la lumière constitue une limite, car alors la durée de transmission des informations importe. Ainsi, deux événements simultanés pour un observateur seront successifs pour un autre puisqu'il en sera informé différemment. C'est ce que montre l'exemple de deux observateurs dont l'un est placé à mi-distance de deux points A et B sur une voie ferrée et dont l'autre est au milieu d'un train. Si deux signaux lumineux sont émis au moment où la tête du train est en A et sa queue en B, ils apparaîtront simultanés à l'observateur situé sur la voie. Mais celui qui est dans le train se sera déplacé pendant le temps de transmission des signaux, et il les recevra à des moments différents, ne pouvant donc les considérer comme simultanés. Deux événements distants ne peuvent donc être simultanés pour deux observateurs situés dans des systèmes de référence en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre. Il suffit d'ailleurs d'imaginer que le train se déplace à la vitesse de la lumière pour découvrir que l'observateur qui s'y trouve ne serait jamais atteint par l'un des signaux lumineux et n'en prendrait pas connaissance. On pourrait cependant espérer qu'il existe un repère fixe, l'*espace absolu,* par rapport auquel seraient appréciés les différents mouvements. Or l'expérience de Michelson démontre tout le contraire puisqu'elle prouve que la vitesse de la lumière est invariante dans toutes les directions et qu'elle ne dépend pas des mouvements relatifs de la source lumineuse et de l'observateur. Cela veut dire que l'espace n'est pas empli d'éther et qu'aucun mouvement absolu ne peut y être défini, donc que les notions de distance et de durée n'ont de sens que relativement à un observateur donné. Un seul espace et un seul temps impliqueraient en effet plusieurs vitesses pour la lumière, alors que le fait qu'elle soit unique entraine que ce sont l'espace et le temps qui sont relatifs. C'est ce que conclut Einstein en maintenant le principe de relativité galiléen selon lequel les lois mécaniques sont les mêmes dans tous les systèmes en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres. Aussi les formules de transformation de Lorentz prennent-elles dès lors une signification physique et remplacent-elles les formules de la mécanique classique, même si ces dernières en constituent une approximation pour des vitesses négligeables par rapport à celle de la lumière.

Désormais, il y a une pluralité de mesures de temps et d'espace dépendant des mouvements relatifs des observateurs, ce qui conduit à admettre que ceux-ci ont chacun un espace et un temps propres. Ainsi, étant donné deux observateurs en mouvement relatif, chacun d'eux trouve que l'horloge de l'autre retarde et que le mètre tenu par l'autre est plus court que le sien. C'est que, pour chacun d'eux, il y a contraction du temps propre et que les distances de l'un se raccourcissent pour l'autre (et récipro-



E. Lessing - Magnum

▲ ***Le temps est relatif, seule est absolue la vitesse de la lumière.***



▲ ***Un modèle de l'*expansion de l'Univers.**

quement). On voit donc que la mécanique relativiste fait abandonner les anciens repères absolus et montre qu'espace et temps sont liés dans la dépendance à l'égard du système de référence où s'effectuent les mesures. Signalons que l'expérience a confirmé cette théorie et rappelons celle accomplie en 1971 avec des horloges atomiques placées à bord d'avions qui ont fait le tour de la Terre, ce qui a permis de mesurer pour de grandes vitesses le décalage de temps par rapport à des horloges restées au sol. Cette expérience illustre le « paradoxe de Langevin » selon lequel, par exemple, un voyageur faisant un voyage aller-retour de deux ans à une vitesse inférieure de 1/20 000 à celle de la lumière, retrouverait à son retour une Terre plus vieille de deux siècles.

L'équivalence entre l'espace et le temps en tant que grandeurs physiques a été précisée par Minkowski avec la présentation d'une *géométrie quadri-dimensionnelle* où une variable de temps est associée aux variables d'espace. Précisons que ce n'est pas le temps lui-même qui est introduit ici, mais une variable calculée à partir de lui, le nombre imaginaire « *i* » intervenant dans ce calcul. Cette combinaison où s'enchevêtrent quatre variables est donc nouvelle et constitue l'**espace-temps** ou **continuum,** celui-ci dépendant de quatre paramètres permutables entre eux, sans que le temps perde pour autant toute spécificité. Cet amalgame donne naissance à un nouvel invariant, l' « *intervalle* » *spatio-temporel,* qui constitue une valeur objective et contrôlable par des mesures. Cela implique que le présent n'est pas le même dans tous les systèmes de référence puisque l'ordre de succession de deux événements peut se renverser d'un observateur à l'autre. Mais il existe un passé et un futur absolus auxquels s'ajoute « un ailleurs » dû au fait que la vitesse de propagation des actions et des informations ne peut dépasser la vitesse de la lumière. Aussi nul observateur ne peut-il revenir à un événement passé pour lui ou précéder un événement dans le futur. De ce fait, l'ordre causal est maintenu, et avec lui, le déterminisme.

L'usage d'une théorie non euclidienne de l'espace a été déterminante pour la relativité généralisée. Les effets de la gravitation et l'inertie y sont considérés comme équivalents et ne sont plus attribués à l'action de forces, mais à la modification des propriétés de l'espace au voisinage de toute matière. Une théorie mathématique complexe permet ici une simplification des lois physiques concernant les rayons lumineux et les corps en mouvement, y compris lorsque celui-ci est accéléré et dans les cas de rotation. Les « *courbures* » *de l'espace-temps* sont liées à la quantité de matière en chaque point-événement décrit par quatre variables combinées. Chaque objet décrit une ligne d'Univers suivant les géodésiques, c'est-à-dire les parcours où l'intervalle est le plus court. Un événement n'est donc dû qu'aux effets d'un voisinage et non à l'action à distance d'une force. Ainsi, l'incorporation par la physique du continu de la structure non euclidienne de l'espace-temps permet une refonte unificatrice des lois de la mécanique. A partir de là, Einstein conçut une courbure à l'échelle de l'Univers, faisant du continuum une sorte de sphère au rayon immense, à la fois fini et sans limites.

D'autres modèles ont été ensuite proposés à partir de la relativité, mais le débat est aujourd'hui centré sur la question de l'*expansion de l'Univers*. Nous savons en effet, depuis que Hubble l'a établi en 1928, que les galaxies lointaines s'éloignent de nous avec une vitesse de fuite proportionnelle à la distance qui nous sépare d'elles. Cela a conduit à proposer des modèles non statiques de l'Univers, fondés en particulier sur la théorie du « big bang ». Selon celle-ci, la matière aurait d'abord été concentrée en un espace très restreint puis une gigantesque explosion l'aurait projetée dans toutes les directions il y a plus de dix milliards d'années. Cette hypothèse a toutefois été remise en question avec la découverte de radiosources stellaires, les *quasars*. Ceux-ci, situés par les premiers calculs à des distances de l'ordre de plusieurs milliards d'années-lumière, émettent une énergie considérablement supérieure à celle des objets célestes connus, et cela alors que leurs dimensions semblent très faibles. Aussi a-t-on été amené à supposer que les quasars pouvaient être plus proches qu'on ne le pensait, d'autant que de récents travaux montrent que les galaxies jeunes se comportent comme eux. C'est pourquoi les modèles d'Univers quasi statiques sont aujourd'hui réactivés.

Évoquons en particulier la théorie de Hoyle qui implique une « création continue » de la matière et abandonne donc le principe de conservation de l'énergie. Quant à attribuer les phénomènes observés avec les quasars aux effets de la gravitation, cela exige, d'après Hoyle et Narlikar, de renoncer à l'invariance des constantes de couplage de la physique et conduit donc à définir en chaque point des variations de celles-ci, dues aux effets locaux de l'ensemble de l'Univers matériel. On voit que les recherches en ce domaine aboutiront peut-être à une transformation radicale de la physique, même si aujourd'hui elles ne permettent pas de conclure et de choisir entre divers modèles, que ceux-ci portent sur l'expansion continue ou au contraire sur un état quasi stationnaire de l'Univers.

Quoi qu'il en soit, la révolution relativiste a désormais changé de fond en comble notre conception de l'Univers. Espace et temps ne peuvent plus être considérés comme les formes *a priori* de l'intuition sensible dont parlait Kant. L'espace en soi, le temps absolu, n'ont plus de sens, et il n'existe pas de réceptacle indépendant de la matière et des événements. Quant à la construction physique de l'espace-temps, elle est indissociable des objets qui lui impriment ses caractéristiques.

Ainsi nous faut-il renoncer à croire en un moule absolu de notre savoir, en un cadre fixe de l'Univers, en une référence immuable. Aucun point de vue universel ne garantit une identité entre tous les observateurs possibles, aucun centre n'est privilégié, aucune demeure n'abrite les galaxies.

Énergie

Suggérée par Thomas Young, l'introduction du terme d'énergie (force en acte chez les Grecs) devint déterminante avec la constitution de la thermodynamique. Rappelons que les bases de celle-ci furent posées en 1824 par Carnot à partir de l'étude du rendement des machines à vapeur. Plus tard, Mayer et Joule établirent l'équivalence de la chaleur et du travail, la possibilité d'une conversion réciproque. Dès lors, Helmholtz put généraliser le principe de conservation de la force et ramener chaleur, optique et électricité à des effets des phénomènes mécaniques. Selon lui, « les phénomènes de la nature se réduisent à des mouvements de la matière causés par des forces motrices constantes qui ne dépendent que des rapports de position dans l'espace ». Ainsi, pour le mécanisme, la connaissance de la nature était fondée sur des bases inaltérables : la *matière*, la *force* et le *mouvement*. C'est ce qui fut contesté par Rankine et, à sa suite, par les théoriciens de l'énergétique : Mach, Ostwald et Duhem. Refusant toute réalité à la catégorie de la matière, ils s'opposèrent à la réduction de l'énergie à sa forme mécanique.

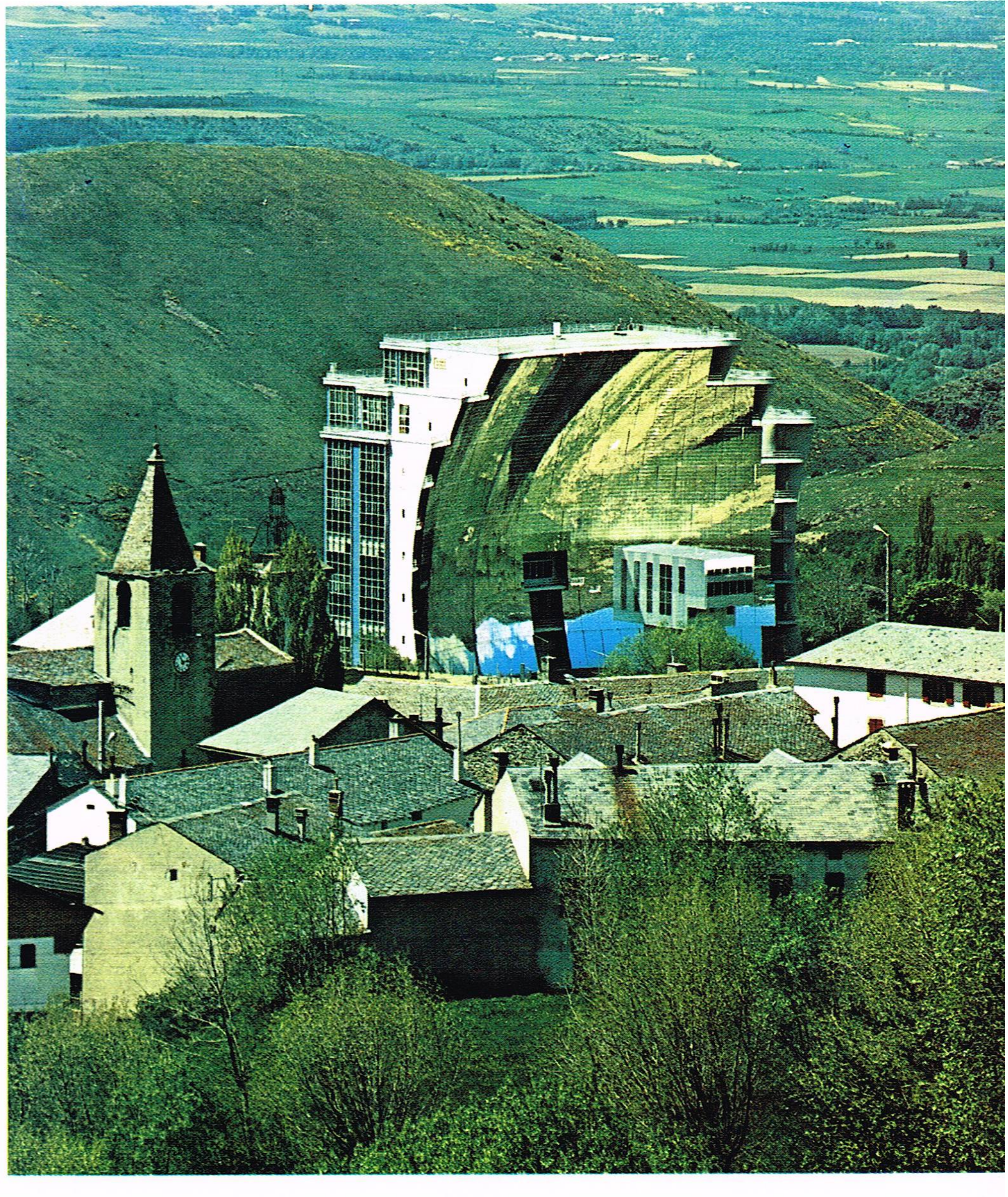
Le second principe de la thermodynamique réélaboré par Clausius permettait de plus d'affirmer l'irréversibilité de l'évolution d'un système isolé, alors que les équations de la mécanique ne concernaient que des phénomènes réversibles. Les tentatives pour unifier la physique autour de la mécanique étaient de ce fait ébranlées et les énergétistes pouvaient tirer argument de cet échec. D'après eux, l'état de crise de la science prouvait ses limites, son impuissance à expliquer la nature, montrait qu'elle n'était qu'un ensemble formel associé à des lois expérimentales. La physique n'apparaissait donc de ce point de vue que comme une théorie abstraite fondée sur un nombre réduit de principes, servant à décrire certains phénomènes sans avoir prise sur la question de la réalité. Mais cela même fit que les énergétistes s'opposèrent aux développements de l'atomisme qui leur étaient contemporains. Si l'importance de l'électromagnétisme et l'abandon de la notion d'éther ont donc semblé leur donner raison, la découverte de la structure granulaire de l'énergie a montré que leur théorie générale était elle-même peu stimulante et aveugle à l'égard de certaines recherches. Ainsi leur critique du dogme mécaniste s'est révélée insuffisante : en tenant « à ce que ses symboles ne contiennent rien de plus, rien de moins que les faits à représenter », l'énergétique s'était peut-être condamnée à être peu inventive. Quant au mécanisme, si ses prétentions totalisantes n'ont pas résisté, il put cependant féconder la théorie cinétique des gaz, Boltzmann s'étant appuyé sur l'hypothèse ramenant la chaleur aux mouvements moléculaires.

Qu'en est-il aujourd'hui, après qu'Einstein a démontré l'équivalence de la masse et de l'énergie ? Si ceci conduit à une énergétique, ce n'est que pour autant qu'elle est indissociable de l'affirmation de la matérialité de l'énergie. En ce sens, matière et énergie apparaissent comme des notions assouplies et non exclusives puisque susceptibles de se traduire l'une en l'autre.

Le terme d'**énergie** appartient maintenant au langage commun. Il a été l'enjeu d'oppositions philosophiques, et certains ont pu lui accorder une signification divine. Mais, en physique, l'introduction de l'énergie a avant tout correspondu à une rupture avec le substantialisme. Celui-ci consiste à supposer l'existence d'une substance permanente, d'un substrat immuable par-delà les divers phénomènes observés. Une telle croyance a constitué par exemple le soubassement de la plupart des théories de la chaleur jusqu'au milieu du XIXe siècle. Identifiée au feu élémentaire, au soufre de l'alchimie, au phlogistique de G. E. Stahl, la chaleur restait un support caché, toujours présent même s'il ne se manifestait pas. Lavoisier, quant à lui, définissait le calorique comme un fluide sans masse pouvant circuler entre les pores de la matière, perceptible ou latent selon les combinaisons entre ce fluide et d'autres substances. Aussi affirmait-il : « Le fluide calorique ne peut être ni détruit ni créé. » Une telle théorie devint vite insoutenable après qu'eut été prouvée l'équivalence entre la chaleur et le travail mécanique, et l'hypothèse dominante devint celle qui faisait de la chaleur un effet de l'agitation moléculaire. Mais la découverte de multiples formes d'énergie a interdit de privilégier sa forme mécanique aux dépens de l'énergie électrique, de l'énergie rayonnante, de l'énergie nucléaire, etc. Si ces multiples formes peuvent se transformer l'une en l'autre, cela ne signifie pas que se maintient une substance indestructible, un contenu intérieur indépendant des formes de manifestations de l'énergie.

On a pu croire un temps avoir atteint une physique complète lorsque au *principe de conservation des forces vives* s'ajouta celui de la *conservation de la masse*, ce qui laissait penser qu'un fond immuable était atteint. Mais cette belle assurance a ensuite volé en éclats, et la conservation de la masse dut être abandonnée lorsque la mécanique relativiste montra que la masse augmentait en fonction de la vitesse.

Que veut donc dire le *principe de conservation de l'énergie ?* Il ne correspond à rien d'autre qu'à l'usage d'une constante numérique dans les transformations énergétiques, c'est-à-dire à la conservation d'une quantité et non d'une substance. L'énergie en général ne peut être définie, puisque n'existent que des formes concrètes de celle-ci. Mais la mathématisation de l'énergie permet de calculer un nombre et de s'assurer de son invariance à travers les transformations de l'énergie interne du système envisagé. Il s'agit donc là d'une équivalence quantitative, sans que pour autant ce qui se conserve soit représentable. L'énergie n'est pas identique à elle-même puisqu'elle se rencontre sous des formes différentes; seule sa quantité peut être dite constante, car elle est chiffrée. C'est par le nombre que s'atteint l'objectivité du réel désignée par les notions de matière et d'énergie.



▲ ***L'énergie se rencontre sous des formes différentes ; ainsi, l'énergie thermique du Soleil est captée dans des fours solaires (ici, celui de Mont-Louis), grâce auxquels on peut réaliser des réactions chimiques et des fusions impossibles jusqu'alors.***

Si l'énergie interne d'un système isolé reste constante, elle ne subsiste pas pour autant dans une identité qualitative au cours de l'évolution spontanée de ce système. Le second principe de la thermodynamique permet au contraire d'affirmer l'irréversibilité de la transformation puisque la déperdition de chaleur est inéluctable. Ainsi une partie de l'énergie dissipée sous forme thermique ne peut être réutilisée, reconstituée sous une autre forme. L'évolution d'un système clos vers l'état le plus probable aboutit à l'égalisation des températures, à l'homogénéité thermique. Cette perte qualitative correspond à une désorganisation du système, c'est-à-dire à une augmentation de l'entropie, de la puissance de désordre. L'entropie dépendant du logarithme de la probabilité, elle peut être chiffrée à une constante près, ce qui instaure ici aussi le règne du quantitatif. On voit donc que la dégradation de l'énergie conduit à abandonner l'idée d'une conservation substantielle et à effectuer un calcul de la perte subie au cours des transformations. Certains ont voulu étendre ce principe à l'Univers en tant qu'ensemble, prédisant à celui-ci une « mort thermique » inéluctable, due à une complète homogénéité, à une totale désorganisation. Mais cela suppose de considérer l'Univers comme un système clos alors que, par ailleurs, on ne lui reconnaît pas de limites. Une telle généralisation apparaît donc spéculative et incontrôlable, même si elle ne peut être exclue.

L'étude des systèmes non isolés, des êtres vivants en particulier, a conduit à envisager plus précisément les phénomènes où l'entropie est décroissante. En utilisant comme modèle le calcul de l'entropie, on a quantifié l'information en montrant qu'elle était aussi calculable à partir du logarithme de la probabilité d'un état envisagé. Ainsi, plus un état est probable, plus l'information est grande, c'est-à-dire que la précision d'une prévision est associée à la quantité d'information. Cette dernière est donc une entropie négative, une *néguentropie ;* elle correspond, non pas au désordre, mais à l'organisation croissante. La résistance à l'augmentation du désordre est donc liée à l'information et à ses transferts, dans la mesure où ils échappent à l'évolution vers l'homogénéité. L'analyse de tels processus est déterminante en cybernétique et en biologie.

La notion d'énergie est indissociable de la physique moderne. Si son usage ne correspond pas à la dissolution de la matière que certains ont pu y lire, il indique pourtant la désubstantialisation de l'objet physique. La mathématisation est ici décisive puisque à la permanence d'une substance s'est substituée l'invariance d'une quantité calculable. Mais la microphysique et la notion de quantum d'action ont montré que la répartition et la transmission d'énergie étaient discontinues. La physique des quanta a par conséquent introduit la temporalité dans l'objet et établi la discontinuité du réel. Ainsi, la structure de l'énergie est devenue décisive dans l'expérimentation et la recherche.

Onde et corpuscules

« Il faut plutôt les inventer que les découvrir. » En parlant ainsi des corpuscules, Bachelard affirme nettement que la physique est réalisation et non pas seulement description d'un donné préalable. L'exemple des corpuscules en effet est particulièrement probant. Leur image est issue de la mécanique, de l'examen du mouvement des projectiles. Elle est liée à une conception de la matière qui est celle d'une substance solide, palpable, faite d'unités insécables. Mais le point de vue corpusculaire appliqué à la lumière, celui de Newton par exemple, a été relayé par la théorie ondulatoire. Celle-ci, conforme aux observations de phénomènes lumineux tels que les interférences et la diffraction, est liée à l'idée d'une propagation continue. Mais l'étude de l'*effet photo-électrique* a réactivé la conception corpusculaire, le *photon* étant défini comme corpuscule sans masse, atteignant une vitesse limite. De fait, chacune des deux théories trouve sa confirmation expérimentale, mais aucune d'elles ne peut prétendre expliquer à elle seule l'ensemble des phénomènes concernés. C'est cette difficulté qui a suscité la notion de « complémentarité » et conduit L. de Broglie à associer **onde** et **corpuscule** dans une *mécanique ondulatoire* généralisée à l'ensemble des corpuscules matériels. De ce point de vue, le corpuscule peut être localisé dans son onde, en un petit intervalle où celle-ci a une amplitude non nulle. La mécanique quantique s'est ensuite développée à partir de l'*équation de Schrödinger* où la fonction d'onde ψ est régie par un opérateur (hamiltonien). Si pour Schrödinger lui-même l'onde est réelle et le corpuscule constitue donc une singularité de l'onde, il n'en est pas de même pour Born et l'école de Copenhague. Ceux-ci ont interprété le vecteur d'état ψ comme une amplitude de probabilité sans réalité physique. Cette conception probabiliste aboutit à ne considérer l'onde que comme le moyen de déterminer la probabilité de présence de la particule. Mais cela implique que cette dernière n'est pas localisée précisément, puisqu'elle peut apparaître en divers endroits, ceci étant indissociable des conditions d'observation.

Si la doctrine de Copenhague refuse d'identifier le *vecteur d'état* à une onde mécanique et de lui accorder une signification physique, c'est qu'il intervient dans la théorie comme un artifice mathématique, ainsi que le montre le grand rôle joué dans les calculs par les nombres complexes où intervient le symbole $i = \sqrt{-1}$. Ainsi les équations d'ondes de la microphysique se distinguent des théories classiques où n'interviennent pas de valeurs complexes. Une traduction est cependant possible dans les lois de la mécanique classique, bien qu'on ne puisse pas associer une onde à chaque particule. Dans le cas d'un collectif de particules en interaction, on n'envisage en effet qu'une seule fonction d'onde associée au système dans son ensemble. La propagation de cette fonction d'onde s'effectue dans un « espace de configuration » qui comporte 3 n dimensions, n étant le nombre de particules. On voit que le vecteur d'état constitue donc une construction mathématique, ce qui fait qu'on le définit comme une amplitude de probabilité puisqu'il permet le calcul de prévisions. C'est une fonction d'onde unique qui rend compte des diverses probabilités d'obtenir telle ou telle valeur, c'est-à-dire de faire se manifester les particules en tel ou tel point. Le vecteur d'état nous renseigne donc sur les potentialités d'existence des corpuscules. Mais ceux-ci ne peuvent plus être considérés comme de petits corps au volume bien délimité et dont on pourrait suivre toutes les trajectoires. Ils ne constituent pas une substance faite d'éléments isolables, porteurs de qualités et repérables à tout instant. Ils ne sont pas de petites choses impénétrables dont les dimensions, la forme et la place pourraient être toujours précisées et seraient strictement prévisibles. Ils ne sont individualisés que dans la mesure où ils se trouvent dans des états différents, car c'est seulement alors qu'ils sont discernables. De plus, ils peuvent être produits et s'annihiler, certaines particules n'ayant d'ailleurs qu'une très brève durée de vie. De ce fait, le réel physique est désubstantialisé, ne comporte plus de substrat inerte, d'identité permanente. Cela amène à abandonner toute représentation imagée pour y substituer un *système d'équations*. La construction théorique s'effectue à partir d'un arrachement par rapport aux imageries et aux sources premières, l'objet étant situé par ses effets et expliqué par sa structure. « Partout où le point agit, il existe », dit Bachelard, c'est-à-dire que l'objet est construit à partir de la formule et donne lieu à une réalisation où il est manifesté par ses actions. La mathématisation de l'expérience se fait donc en rupture avec le réalisme naïf.

L'espace-temps est lui-même atteint par la microphysique. En effet, la discontinuité peut aussi y être introduite, car on ne peut prévoir avec une totale exactitude la trajectoire d'une particule. La propagation du vecteur d'état s'effectue quant à elle dans un espace fictif. Mais surtout les transitions d'un état stationnaire à un autre ont pu être considérées par Bohr comme instantanées, ce qui a fait penser que le cadre de l'espace-temps était alors transcendé. Certains chercheurs américains ont d'ailleurs depuis caractérisé la fonction d'onde de l'Univers comme transcendante. D'autres physiciens sont allés jusqu'à supposer une structure granulaire à l'espace et au temps eux-mêmes. Cependant, l'abstraction croissante de ces conceptions a conduit L. de Broglie à rechercher une nouvelle représentation concrète en microphysique, à réaffirmer le caractère mécanique de l'onde, à tenter de décrire les phénomènes corpusculaires en termes d'espace et de temps. De ce point de vue, les transitions quantiques « seraient simplement des processus très rapides de réadaptation à un nouvel état stable », et le

mouvement de chaque corpuscule serait guidé par une onde concrète.

Doit-on encore aujourd'hui parler d'une dualité onde-corpuscule, même si celle-ci est compensée par la complémentarité ? Ce que montre l'expérience, c'est que des propriétés ondulatoires ou corpusculaires des microsystèmes se manifestent selon le dispositif utilisé. Mais ce dernier est précisément macroscopique, et seule l'amplification des effets des phénomènes microphysiques nous permet une observation. L'usage des termes d'onde et de corpuscule n'a donc peut-être, comme l'indique M. Bunge, qu'une portée analogique correspondant à une traduction en termes de macrophysique. Considérer le corpuscule comme un « paquet d'ondes » ou l'onde comme une apparence due à un effet de masse des corpuscules, c'est toujours réduire à l'un de ses aspects les manifestations d'un microsystème. Mais si ces notions perdent leur sens premier et si l'on rompt avec le « chosisme », alors elles apparaissent inadéquates ou ne peuvent continuer à être utilisées qu'en étant considérablement transformées, ainsi qu'on l'a déjà vu.

L'objet de la microphysique est nouveau ; il échappe aux théories classiques et à leurs catégories. Le *vecteur d'état,* propriété d'un microsystème dans son ensemble, n'est pas une onde mécanique. Le corpuscule, quant à lui, est sans substance. La matière ne peut plus être imagée et son hétérogénéité doit être reconnue. Ce sont les structures mathématisées qui organisent l'expérience, rendent compte de ses effets, permettent les prévisions et donnent accès aux déterminations du réel. Quant aux processus microphysiques, leur appréhension dépend des interactions avec le dispositif expérimental : aussi l'observation n'est-elle pas neutre et constitue-t-elle un mixte, un composé réel de sujet et d'objet, une production d'effets.

Causalité et déterminisme

Afin de rendre compte de la réalité, la physique s'appuie sur le *principe de causalité,* selon lequel tout phénomène a une cause, les mêmes causes produisant les mêmes effets. A ce premier principe est associé le *principe de raison suffisante,* qui pose que tout être ou tout événement a une raison qui l'explique et permet de préciser pourquoi il en est ainsi et non autrement. Cela implique traditionnellement que tout objet a une justification rationnelle et que causes et effets s'enchaînent linéairement.

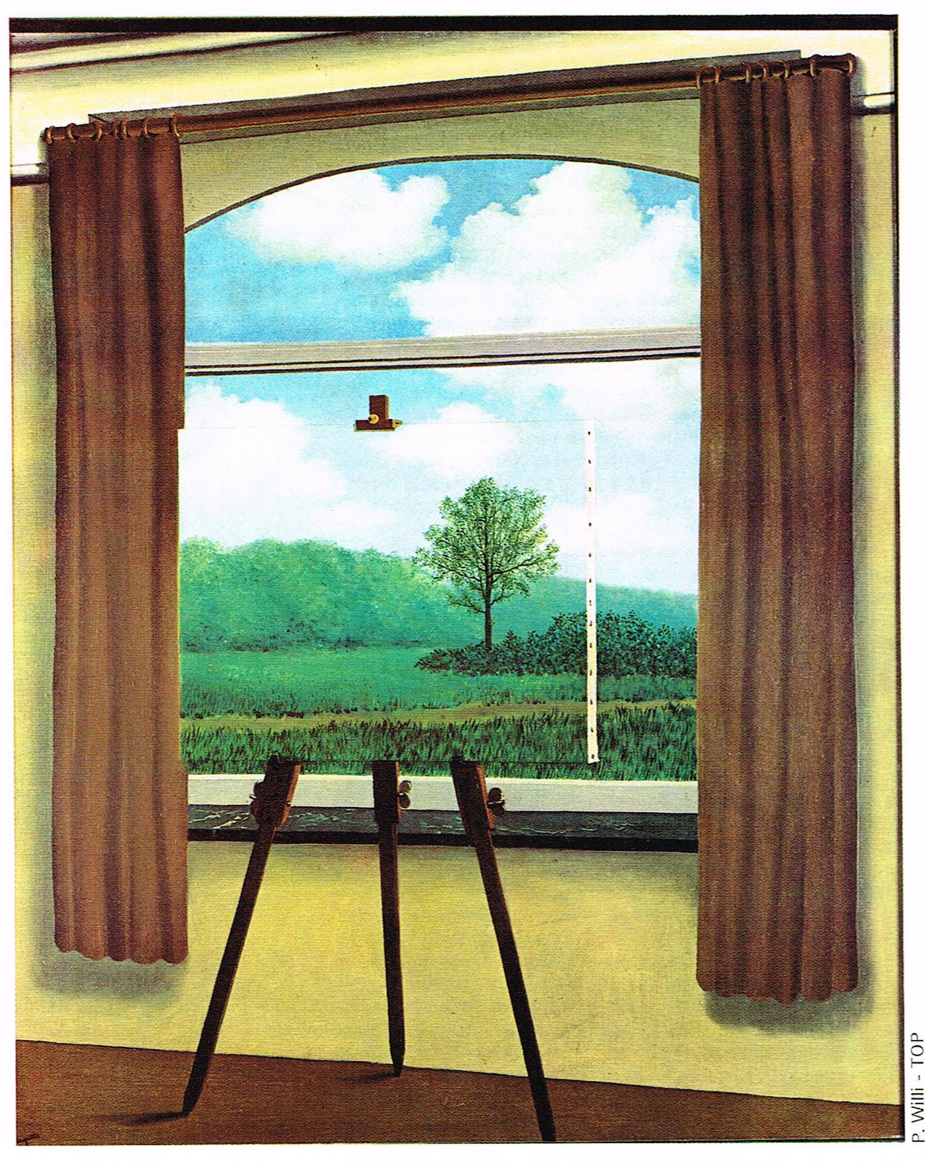
Mais l'énoncé de lois en physique a de plus amené à utiliser la *notion de légalité,* la répétition des phénomènes observables et l'existence de régularités rendant possible d'accéder aux lois naturelles régissant l'Univers. Si ce dernier est considéré comme une gigantesque machine, cela permet de déterminer toutes les lois fondamentales qui le régissent et d'expliquer son évolution. C'est ce qu'affirme Laplace, selon qui la connaissance exacte de la situation de l'Univers à un instant donné permettrait de prévoir avec exactitude ses états ultérieurs. Pour lui, l'état présent de l'Univers est la cause de ce qui va suivre, et la prévision s'effectue grâce à la connaissance des lois de la mécanique. Dès lors, la science serait en quelque sorte la reproduction de la nature ; elle rendrait présents à nos yeux passé et avenir et exprimerait l'existence d'un déterminisme strict. Concrètement, cela correspond à l'étude et à la mesure précise des *conditions initiales* du système étudié, ou encore des *conditions aux limites* dans le cas où il faut envisager des données extérieures au système. Ainsi peut-on dégager la cause déterminante d'un phénomène, prévoir ses conséquences, fixer une loi générale. La mécanique comme la thermodynamique à ses débuts répondaient en effet à de tels critères et montraient l'efficacité de ce postulat de méthode. De fait, le principe de causalité classique était la marque de la rationalité scientifique, de l'emprise sur le réel, de la capacité d'explication d'un Univers ordonné.

L'introduction de la *causalité statistique* a transformé cette conception. Fondé sur le dénombrement, le calcul des probabilités permet d'établir des lois pour les grands nombres, car les valeurs moyennes sont alors les plus probables. On ne peut donc extraire des règles de l'étude de systèmes comportant un grand nombre d'éléments, même si chacun de ceux-ci ne peut être connu avec exactitude ou si le détail des interactions ne peut être suivi. C'est ce qui a lieu dans la mécanique statistique lorsqu'elle étudie l'évolution des systèmes macroscopiques à partir de la définition des états les plus probables. Le lien entre l'état initial d'un système et un état ultérieur ne peut donc plus être considéré comme une détermination absolument stricte. La prévision n'est possible qu'en termes de probabilité, et plusieurs types d'évolution sont possibles, théoriquement du moins.

Cependant, calculer la probabilité pour qu'un événement se produise n'est pas le livrer à un aléatoire pur, puisqu'une règle apparaît au niveau de la répétition ou à l'échelle d'un ensemble. Aussi peut-on parler de *déterminisme statistique* dans la mesure où certaines régularités se manifestent. Les probabilités physiques traduisent donc des propriétés objectives des systèmes ou des processus étudiés et ne peuvent être rapportées à l'irréel. Il faut cependant distinguer la causalité statistique qui intervient à l'échelle d'une collectivité et la probabilité pour qu'un événement singulier ait lieu. Dans le premier cas, c'est la *fréquence statistique* qui se manifeste, sans pour autant que la mesure nous soit épargnée. Dans le second cas, la probabilité traduit une *potentialité* qui n'exclut pas toutefois l'existence d'un hasard objectif puisque la régularité n'est pas ici concernée.

Définir le hasard comme étant la mesure de notre ignorance paraît insuffisant même si l'on prend en considération l'existence de « lois de hasard » relatives à des collectifs. Cela permet seulement de concevoir que le caractère mathématique des probabilités interdit de les projeter telles quelles dans le réel, de croire qu'elles constituent elles-mêmes une cause explicative. Cournot a pu, quant à lui, définir le *hasard* comme rencontre de deux séries causales indépendantes, c'est-à-dire comme un entrecroisement provoquant un effet de surprise. En traduisant ainsi l'expérience commune, il laisse inchangée la *notion de cause*. En fait, celle-ci n'est pas une évidence expérimentale, car elle implique de séparer nettement cause et effet et, en même temps, de les relier dans un rapport logique. Ainsi la cause peut-elle être comprise comme le passé d'un événement aussi bien que comme le principe par lequel on s'assure qu'il s'insère dans un ordre rationnel. Mais la mathématisation de la physique moderne a fait abandonner cette représentation de la cause. Il ne s'agit plus de rapporter un phénomène à un autre mais de mettre en rapport des grandeurs physiques. On n'envisage plus de causes cachées, de principes transcendants, d'intentions animant le monde des choses. Ce n'est pas dire que le réel est opaque et qu'aucune causalité n'est envisagée. Mais cause et effet ne sont plus strictement séparables, et la théorie ne recherche pas des causes mais des lois, des formules. C'est l'appareil mathématique, partie prenante de l'expérimentation, qui permet de prévoir et d'expliciter des effets, sans que cela suppose une cause substantielle et sans que la raison soit pour autant identifiable à la réalité des phénomènes. La causalité n'apparaît donc plus comme l'œuvre d'un législateur, n'exprime pas une nécessité intime du monde, ne fait pas découvrir une finalité des processus ou une raison éternelle ; bref, la physique n'explique pas le *pourquoi* mais le *comment* des phénomènes.

La causalité probabilitaire renouvelle en ce sens le *déterminisme,* tout en excluant le fatalisme ainsi que le rêve d'un savoir absolu. Ce sont en quelque sorte des effets sans cause qui sont envisagés, puisque les déterminations repérées ont un caractère mathématique. Mais de plus, on ne peut dire que les phénomènes obéissent à la théorie ou que celle-ci leur prescrive une loi, puisque les régularités objectives ne se manifestent qu'à l'échelle des grands nombres. Le concept n'est donc pas le réel lui-même, pas plus que son reflet direct. Pourtant la probabilité traduit une détermination effective se manifestant concrètement. Mais le déterminisme ainsi objectivé n'est ni strict ni absolu. Il ne rend pas compte de l'Univers considéré comme un ensemble, ne permet pas une connaissance totale du réel, ne garantit pas l'invariabilité des phénomènes naturels. Il ne fait que traduire le caractère répétable des expériences physiques, la capacité de prévision de nos théories, l'existence de lois et de régularités. De ce fait, rien ne permet de trancher scientifiquement à propos de la nature du hasard. Un événement singulier apparaît en effet aléatoire, et il est impossible d'y repérer une nécessité inéluctable. Cela exclut de ramener le monde à un ordre prédéterminé ou d'en prévoir avec une complète exactitude les états futurs.



P. Willi - TOP

▲ *La notion kantienne d'espace et de temps n'a plus cours. C'est l'occasion pour les surréalistes de faire éclater les formes trop étroites* a priori *de la sensibilité. La dimension du rêve appartiendrait-elle à une autre dimension?* (la Condition humaine, *peinture de Magritte ; collection Claude Spaak) (A.D.A.G.P., 1976.)*

Nous ne sommes pas plus les maîtres de l'avenir que nous ne pouvons suspendre le temps. Ainsi que le démontre L. Brillouin, la connaissance exacte de l'état de l'Univers à un moment donné coûterait une quantité infinie d'informations, c'est-à-dire de néguentropie. Autrement dit, cela exigerait un temps infini, et ce alors même qu'une précision totale est impossible. La démonstration pratique d'un déterminisme complet n'a donc pas de sens scientifique, et toute théorie rencontre le hasard comme limite. L'ordre repéré dans les phénomènes ne peut englober tout le réel, le déterminisme n'a pas une portée infinie, et la science ne peut se clore en un savoir achevé. Nos certitudes ne suffisent pas à éliminer l'aléatoire et à exclure le désordre; la rationalité n'est pas exhaustive. C'est pourquoi M. Serres peut paradoxalement affirmer : « Le réel est et n'est pas rationnel. »

L'avènement de la mécanique quantique a montré que le phénomène microphysique ne peut être atteint dans toutes ses déterminations réelles. Rappelons que les relations d'incertitude de Heisenberg montrent que, si l'on cherche à préciser deux variables conjuguées telles que position et vitesse, on ne peut le faire en même temps. Affiner la détermination de l'une d'entre elles ne peut s'effectuer qu'au prix d'une incertitude concernant l'autre. Ainsi la précision des mesures rencontre une limite objective qui est due à l'impossibilité de manifester un phénomène microphysique sans tenir compte de l'intervention de l'observateur. C'est que la mesure s'effectue au niveau macroscopique et qu'on ne peut ici dissocier l'objet du dispositif expérimental. Les effets de l'expérience sont dus aux interactions de ces derniers, et les résultats concernent donc des blocs de sujet-objet, des ensembles microsystème-instruments d'observation. De plus, la représentation de l'état ne permet que de déterminer les probabilités d'apparition du corpuscule. Aussi la physique quantique a-t-elle donné lieu à des interprétations indéterministes. Selon celles-ci, l'indétermination rencontrée ne traduit pas seulement les limites de nos connaissances et de nos possibilités de mesure, mais concerne le réel physique lui-même, celui-ci correspondant à ce qui est observable. C'est dire que les propriétés mises en évidence dépendent des rapports entre l'observateur et l'objet. Certains, en particulier L. de Broglie, ont toutefois envisagé l'existence de *variables cachées* dont l'explicitation permettrait une interprétation plus rigoureuse des résultats expérimentaux. Quoi qu'il en soit, la non-séparabilité entre systèmes ayant interagi confirme à la fois l'objectivité de l'expérience et l'interdépendance entre instruments et objets au cours de celle-ci. L'observation confirme néanmoins la distribution probabilitaire établie par le vecteur d'état et indique donc la justesse des prévisions quantiques et leur portée concrète, au moins pour les états stationnaires. A moins de réduire la physique quantique à une théorie psychophysique, il semble donc que celle-ci ne justifie pas un indéterminisme radical puisqu'elle peut être testée empiriquement, même si elle ne concerne pas des substances. On peut noter à cet égard l'ambiguïté de la *notion d'observateur* dans la mesure où elle se rapporte à un dispositif instrumental et non à une représentation spirituelle. L'enseignement de la physique quantique concerne en ce sens le processus de connaissance, car celui-ci n'est pas une confrontation entre sujet et objet mais implique des interactions entre eux, leur mise en rapport. Cela nous met en garde contre les tentatives faites pour identifier théorie et réel, que ce soit pour affirmer l'absolu du déterminisme ou l'indéterminisme des choses mêmes. Nos théories ne font pas parler la matière et ne nous exposent pas les causes des phénomènes. Elles constituent des constructions réglées et mettent en jeu la causalité dans la mesure où elles permettent d'effectuer des prévisions. Leur validité ne signifie pas l'atteinte d'une vérité absolue ou la révélation d'un destin universel. La physique ne récite pas un savoir déjà établi et qui se dévoilerait peu à peu ; elle construit et expérimente. Mais elle ne garantit en rien l'unité de l'Univers et l'accès à un savoir complet. Ne se fermant pas en une totalité, elle laisse ouverte la voie de l'invention, celle de la trouvaille, du nouveau.

Pour conclure, il faut rappeler que la physique est non seulement un savoir mais aussi une pratique sociale. Indissociable de la technologie, elle traverse de part en part la vie moderne. Elle est de plus assujettie à des prises de décisions qui commandent son développement. L'épistémologie, discours sur les sciences, ne peut donc ignorer que celles-ci sont tributaires des objectifs des pouvoirs. La science n'est pas toujours le partenaire d'une rencontre heureuse, surtout lorsqu'elle se dessine sous les traits de moyens de terreur. Elle n'est ni une sagesse, ni une garantie de la liberté humaine. Devenir un gai savoir est peut-être pour elle l'issue : alors elle serait jouvence.

FRANÇOISE AKOUM

BIBLIOGRAPHIE

BACHELARD G., *le Nouvel esprit scientifique,* P. U. F. ; *l'Activité rationaliste de la physique contemporaine,* P. U. F. ; *le Matérialisme rationnel,* P. U. F. - BLANCHE R., *la Science actuelle et le Rationalisme,* P. U. F. - BUNGE M., *Philosophie de la physique,* Seuil. - CARNAP R., *les Fondements philosophiques de la physique,* A. Colin. - EINSTEIN A. et INFELD L., *l'Évolution des idées en physique,* Payot. - HOFFMAN B., *l'Étrange histoire des quanta,* Seuil. - KOYRE A., *Du monde clos à l'univers infini,* Gallimard ; *Études galiléennes,* Hermann ; *Études newtoniennes,* Gallimard. - KUHN T. S., *la Révolution copernicienne,* Fayard. - LECOURT D., *Une crise et son enjeu,* Maspero. - LLOYD G., *les Débuts de la science grecque,* Maspero. - MARCH A., *la Physique moderne et ses théories,* Gallimard. - MERLEAU-PONTY J., *Leçons sur la genèse des théories physiques, Galilée, Ampère, Einstein,* Vrin. - PLANCK M., *l'Image du monde dans la physique contemporaine,* Gonthier. - SERRES M., *l'Interférence ; la Traduction,* Minuit. - ULLMO J., *la Pensée scientifique moderne,* Flammarion.

MÉCANIQUE

La **mécanique** est sans doute l'une des plus anciennes branches de la physique; elle s'est en effet développée dès l'Antiquité, en liaison avec les problèmes posés par la construction des bâtiments : utilisation des poulies, des palans, et surtout stabilité des édifices; les premiers éléments de statique apparaissent chez Héron et Archimède.

La **dynamique,** branche de la mécanique qui étudie le mouvement des corps, n'apparaît que beaucoup plus tard, et encore est-elle, comme toutes les autres sciences à cette époque, entachée de bien des imprécisions et de considérations philosophiques ou théologiques qui ne contribuent que médiocrement à clarifier les problèmes. Signalons toutefois que, reprenant une notion introduite par Aristote et développée par Avicenne, Jean Buridan et son élève Nicolas Oresme tentent d'expliquer le mouvement des astres et l'accélération d'un corps en chute libre par la *théorie de l'impetus,* sorte de « force motrice » qui se conserve lorsque le corps n'est soumis à aucune résistance. On peut voir là une idée qui préfigure un peu le principe d'inertie énoncé par Newton.

C'est avec Galilée que la mécanique commence à acquérir une certaine rigueur et surtout une base expérimentale réelle. Né à Pise en 1564, Galileo Galilei se distingue essentiellement de ses contemporains et de ses devanciers par son habileté et son goût pour les expériences menées rigoureusement. Connu d'abord pour un traité sur l'hydrostatique, il effectue à Pise une série d'expériences par lesquelles il montre que, contrairement à ce que l'on croyait depuis l'Antiquité, dans le vide, des corps de même forme, mais de masses inégales, lâchés au même instant d'un point élevé, atteignent le sol au même instant. Reprenant les idées de Buridan, il affirme que le mouvement d'un projectile est dû à une quantité, l'*impetus,* qui se conserve et est proportionnelle au carré de la vitesse initiale; il baptisera cette quantité du nom de *force vive.* Plus tard, Galilée effectue de très belles expériences en utilisant le déplacement d'un corps sur un plan incliné, et montre expérimentalement que la distance parcourue varie comme le carré du temps, établissant ainsi pour la première fois la loi du mouvement uniformément accéléré.

Mais c'est avec Newton que la mécanique va recevoir ses bases. Esprit véritablement universel, il contribue au développement de nombre de branches de la physique et des mathématiques. Son plus grand titre de gloire reste bien cependant la découverte de la *loi de la gravitation universelle :* après le célèbre — et peut-être véridique — épisode de la pomme, Newton a l'idée que la chute des corps et le mouvement des planètes autour du Soleil ne sont que deux aspects du même phénomène : l'attraction gravitationnelle entre deux corps, dont l'intensité varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux corps en attraction mutuelle. C'est Newton également qui énonce les lois fondamentales de la dynamique, et les expose dans ses *Principia,* parus en 1687 sur les instances de son ami Halley, celui-là même qui prédit le passage de la comète portant son nom.

Après Newton, la *mécanique rationnelle* connaît un immense développement. Un grand nombre de scientifiques s'engouffrent dans la voie ouverte par Newton. La mécanique newtonienne remporte d'éclatants succès : la mécanique céleste, en particulier, explique le comportement des planètes et prédit même l'existence d'astres qui ne seront découverts que plus tard; c'est ainsi que Le Verrier montre que les anomalies de l'orbite d'Uranus peuvent s'expliquer par l'existence d'une planète inconnue jusqu'alors : Neptune.

A la fin du XVIIIe siècle et pendant le siècle suivant, la mécanique continue son développement tout en prenant une forme de plus en plus abstraite qui en fait peu à peu une branche des mathématiques : Lagrange, avec sa *mécanique analytique,* cherche à vider complètement la mécanique de son contenu physique pour élaborer une théorie entièrement algébrique; son ouvrage ne contient d'ailleurs pas une seule figure. La dynamique des solides est développée par Monge, Mach et surtout Poinsot. Bernoulli, Euler, Chasles et Coriolis contribuent au développement de la cinématique.

A la fin du XIXe siècle, la mécanique rationnelle a acquis une place privilégiée, par la perfection de son formalisme et l'étendue de ses succès. Elle se trouve à la base de



E. Lessing - Magnum

▲ *Reconstitution du cadre dans lequel Galilée effectua ses expériences sur la chute libre (sans doute de la Tour de Pise). Sont réunis sur cette table d'une maison ouvrant sur la Tour un manuscrit de ses expériences et deux sphères en pierre, approximativement de la même taille que celles dont il se servit.*

B.N. - Cl. Lalance

30 DELLA SCIENZA

nato, la cui altezza sia misurata dalla perpendicolare CB, un mobile posto sopra il piano AC, & ad esso legata la corda EDF, e posta in F una forza, ò un peso, il quale alla grauità del peso E abbia la medesima proportione che la linea BC alla CA, per quello, che si è dimostrato, il peso F calerà al basso tirando sopra il piano eleuato, il mobile E, nè maggiore spatio misurerà il mobile E quando aurà passata tutta la linea AC di quello, che misura detto graue F nel calare al basso; Mà quì però si deue auuertire che se bene il mobile E aurà passata tutta la linea AC, nel tempo medesimo che l'altro graue F si sarà per eguale internallo abbassato; nientedimeno il graue E non si sarà discostato dal centro commune delle cose graui più di quello, che sia la perpendicolare CB, mà però il graue F descendendo à perpendicolo si sarà abessato per ispatio eguale à tutta la linea AC, & perche i corpi graui non fanno resistenza a i moti trasuersali, se non in quanto essi vengono à discostarsi dal centro della terra, però non si essendo il mobile E in tutto il moto AC alzato più che sia la linea CB, mà l'altro F abassato à perpendicolo quanto è tutta la linea AC, però potremo meritamente dire il viaggio della forza E mantere quella istessa proportione, che hà la linea AC alla CB, cioè il peso E al peso F. Molto dunque importa il considerare per quali linee si facciano i moti, e massime ne i graui inanimati, de' quali i momenti hanno il loro total vigore, & la intera resistenza nella linea perpendicolare all'orizonte, e nell'altre trasuersalmente eleuate, ò inchinate sentono quel più, ò meno vigore, impeto, ò resistenza secondo che più, ò meno le dette inclinationi s'auuicinano alla perpendicolare inclinatione.

Della Coclea d'Archimede, per leuar l'Acqua.

NOn mi pare che in questo luogo sia da passar con silentio l'inuentione d'Archimede, d'alzar l'acqua con la Vite, la quale non solo

◀ **La Science mécanique** *de Galilée, ouvrage consacré aux principes de la dynamique.*

toutes les autres branches de la physique, mais au fond, assez peu de physiciens s'occupent de mécanique, car l'optique, la thermodynamique, l'électromagnétisme en plein essor retiennent toute leur attention. C'est alors que la mécanique rationnelle reçoit un coup très dur : remettant en cause les fondements mêmes de la mécanique newtonienne, Einstein propose en 1905 la *théorie de la relativité restreinte,* dans laquelle la notion de temps, qui était absolue, devient relative; la notion de masse elle-même perd son sens traditionnel puisqu'elle dépend du référentiel dans lequel on effectue la mesure. La dynamique newtonienne ne devient qu'un cas particulier de la dynamique relativiste, cas extrêmement usuel au demeurant puisque c'est celui des vitesses très inférieures à la vitesse de la lumière.

Dans le domaine microscopique, la mécanique classique échoue également : les physiciens élaborent une nouvelle mécanique, dite *mécanique quantique,* fondée sur l'idée que les échanges d'énergie entre matière et rayonnement ne peuvent se faire que de manière discontinue. Elle régit le monde des atomes et des particules élémentaires dans lequel la vitesse et la position d'une particule ne peuvent être connues simultanément avec précision.

De nos jours, la mécanique rationnelle a perdu beaucoup de son lustre passé, mais elle a toujours une immense importance pratique puisqu'elle décrit parfaitement tous les mouvements de corps macroscopiques se déplaçant à des vitesses suffisamment petites par rapport à la vitesse de la lumière : elle est devenue par excellence la science de l'ingénieur.

Les principes de la mécanique

Nous commencerons notre approche de la mécanique par un exposé des principes de base de cette branche de la physique. Nous examinerons tout d'abord le cas d'une particule (que l'on appelle encore un « point matériel »), puis nous étendrons les résultats au cas d'un ensemble de points matériels.

Mécanique d'une particule

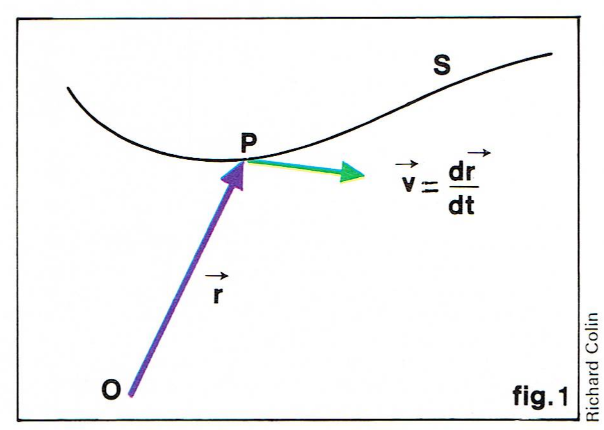
Loi fondamentale de la dynamique

Rappelons que la dynamique est la science qui permet de trouver le mouvement d'un point ou d'un système de points matériels lorsque l'on connaît les forces auxquelles ils sont soumis. La loi fondamentale de la dynamique, pour une particule, doit donc nécessairement relier la force appliquée à une grandeur représentative du mouvement du point. Cette grandeur est l'impulsion $\vec{p}$ de la particule.

Considérons en effet (*fig.* 1) une particule P, de masse m, qui, soumise à une force $\vec{F}$, décrit une certaine trajectoire S. La position de ce point par rapport à l'origine O est repérée par le rayon vecteur $\vec{r}$. La vitesse de la particule, qui est tangente à sa trajectoire, est :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

L'impulsion de la particule est définie par la relation $\vec{p} = m\vec{v}$, où m est la masse du point matériel.



▶ *Figure 1 : position et vitesse d'un point matériel* P *sur une trajectoire* S.

La **loi fondamentale de la dynamique** est la suivante :

$$\textbf{(1)} \qquad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Lorsque la masse de la particule est constante (ce qui est le cas le plus usuel), cette équation s'écrit :

$$F = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

soit encore :

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

La force est donc le produit de la masse de la particule par son accélération.

Cette équation permet, en principe, de résoudre tous les problèmes de dynamique relatifs à un point matériel. On peut toutefois en déduire des lois, dites *lois de conservation,* qui expriment le fait que, lors du mouvement, un certain nombre de grandeurs physiques restent constantes. Ces lois, outre qu'elles permettent de résoudre très aisément un certain nombre de problèmes, ont l'intérêt de se retrouver dans des domaines autres que ceux de la mécanique classique.

Lois de conservation

- *Loi de conservation de l'impulsion*

Lorsque la force totale $\vec{F}$ agissant sur la particule est nulle, l'impulsion de la particule reste constante au cours du mouvement. En effet, l'équation **(1)** s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

Le vecteur $\vec{p}$ reste donc constant.

- *Loi de conservation du moment cinétique*

Lorsque le moment $\vec{M}$ de la force totale agissant sur la particule est nul, le moment cinétique de la particule reste constant au cours du mouvement.

Le moment de la force par rapport au point O est par définition :

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Appliquons l'équation fondamentale de la dynamique : nous remplaçons $\vec{F}$ par $\frac{d\vec{p}}{dt}$, ce qui donne : $\vec{M} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$

Or $\qquad \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$

Comme $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ est colinéaire à $\vec{p}$, il en résulte que

$$\textbf{(2)} \qquad \vec{M} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p})$$

Cette relation est très semblable à la relation fondamentale de la dynamique : $\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{p})$.

La force $\vec{F}$ y est remplacée par le moment $\vec{M}$ de la force par rapport à O et l'impulsion $\vec{p}$ y est remplacée par le moment de l'impulsion par rapport à O.

Le moment de l'impulsion par rapport à O est appelé *moment cinétique* $\vec{L}$ de la particule; la relation **(2)** peut donc s'écrire :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Cette dernière relation constitue le **théorème du moment cinétique.**

La loi de conservation du moment cinétique se déduit du théorème du moment cinétique exactement de la même façon que la loi de conservation de l'impulsion se déduit de la loi fondamentale de la dynamique.

- *Loi de conservation de l'énergie*

Lorsque la force totale agissant sur une particule est conservative, l'énergie totale de la particule reste constante au cours du mouvement.

Précisons tout d'abord ce qu'est une *force conservative :* c'est une force qui, lorsque le point matériel auquel elle s'applique effectue un circuit fermé, effectue un travail nul. Un exemple familier de force conservative est

celui de la force de pesanteur. En effet, lorsqu'une particule tombe en chute libre, d'une certaine hauteur, les forces de pesanteur effectuent un travail que l'on peut utiliser par exemple pour faire tourner une roue ou une turbine ; si l'on désire en revanche faire remonter la particule à son point de départ, il faut lui fournir une énergie exactement égale au travail qu'elle a effectué au cours de sa descente, de sorte qu'au total le travail effectué par la force de pesanteur est nul. Ce qui précède n'est vrai qu'en l'absence de forces de frottement ; ces dernières, en effet, sont le type même des forces non conservatives. Lorsqu'un point matériel parcourt un circuit fermé, les forces de frottement ne fournissent jamais de travail. Il faut au contraire lutter en permanence contre ces forces pour qu'il y ait mouvement ; ce sont des *forces dissipatives*.

Nous revenons maintenant aux forces conservatives. Considérons une particule allant, sous l'action d'une force F, d'un point 1 à un point 2 par un chemin A (*fig.* 2). Notons W_{12} (A) le travail ainsi effectué. Appelons W_{12} (B) le travail effectué pour aller de 1 à 2 par le chemin B. Nous allons montrer que le travail pour aller de 1 à 2 est le même quel que soit le chemin utilisé.

Considérons en effet le circuit consistant à aller de 1 à 2 par le chemin A et à revenir à 1 par le chemin B. Par définition de la force conservative, on a :

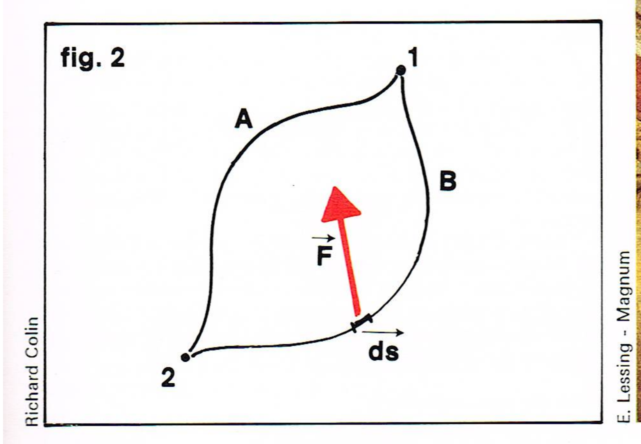
$$W_{12}(A) + W_{21}(B) = 0$$

De plus, et pour la même raison :

$$W_{21}(B) + W_{12}(B) = 0$$

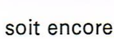
Nous pouvons donc écrire :

$$W_{12}(A) - W_{12}(B) = 0$$



Richard Colin

E. Lessing - Magnum



soit encore

$$W_{12}(A) = W_{12}(B)$$

Le travail pour aller de 1 à 2 ne dépend donc pas du chemin utilisé, mais uniquement du point de départ et du point d'arrivée. Nous avons donc le droit de l'écrire sous la forme :

$$W_{12} = V_1 - V_2 \qquad \textbf{(3)}$$

où **V** est une fonction dépendant uniquement du point considéré et où V_1 et V_2 sont les valeurs de cette fonction aux points 1 et 2 respectivement. Si les points 1 et 2 sont infiniment proches, et ne sont séparés que par un petit élément de trajectoire $\overrightarrow{ds}$, la variation de **V** est une variation infinitésimale dV et le travail de la force est un travail infinitésimal $\vec{F}\,\overrightarrow{ds}$, de sorte que la relation **(3)** peut s'écrire :

$$\vec{F}\,\overrightarrow{ds} = -dV$$

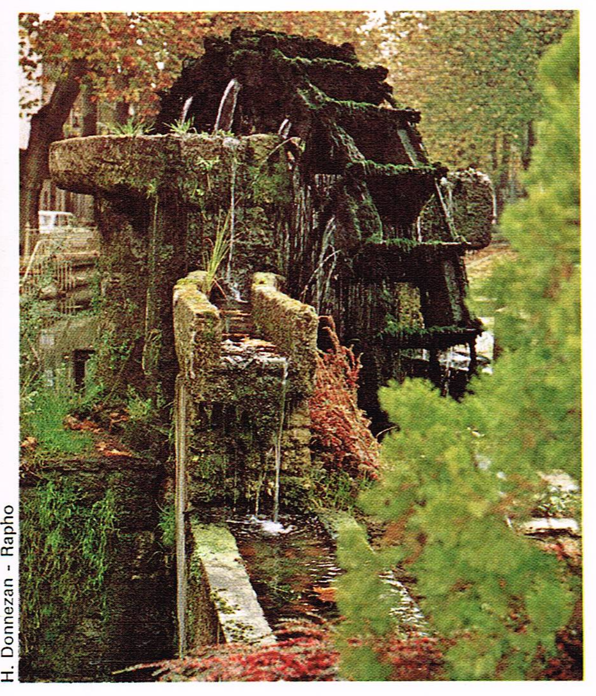
soit encore : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ par définition de la fonction gradient.

La fonction **V** est appelée *énergie potentielle* ou *potentiel*. Une force conservative est donc une force qui dérive d'un potentiel. Nous en verrons plus loin des exemples.

Nous avons maintenant les connaissances nécessaires pour démontrer la *loi de conservation de l'énergie*. Nous avons vu que, si une masse est soumise à une force conservative, le travail pour aller d'un point 1 à un point 2 est :

$$W_{12} = V_1 - V_2$$

▲ *A gauche, figure 2 : pour aller de 1 à 2, les chemins* ***A*** *et* ***B*** *sont équivalents si les forces sont conservatives.* *Ci-dessus,* **la Tour de Babel,** *tableau de Bruegel l'Ancien (XVI[e] siècle). On y reconnaît divers procédés d'application des principes de mécanique à la construction (échelles, poulies, etc.) [Kunsthistorisches Museum, Vienne].*



H. Donnezan - Rapho

◀ *Le mouvement d'une roue à aubes, exemple d'utilisation des forces de pesanteur pour effectuer un travail.*

mais par ailleurs nous savons que ce travail vaut, par définition :

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}\,\vec{ds}$$

or la loi fondamentale de la dynamique indique que la force est le produit de la masse par l'accélération :

$$\vec{F} = m\frac{\vec{dv}}{dt}$$

le travail s'écrit donc :

$$W_{12} = m\int_1^2 \frac{\vec{dv}}{dt}\vec{v}dt$$

$$= \frac{1}{2}m\,(v_2^2 - v_1^2)$$

où $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont les vitesses du mobile aux points 1 et 2 respectivement. Nous pouvons donc écrire :

(4) $$W_{12} = T_2 - T_1$$

où T est une fonction appelée *énergie cinétique :*

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

En combinant les relations **(3)** et **(4)**, nous obtenons donc :

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

Cette dernière relation prouve bien que l'énergie totale de la particule, qui est la somme de son énergie cinétique T et de son énergie potentielle **V**, est constante lors du mouvement : l'énergie potentielle augmente lorsque l'énergie cinétique diminue, et inversement.

Considérons l'exemple du champ de pesanteur ; l'énergie potentielle de ce champ est :

$$V = mgz$$

où m est la masse de la particule, g l'accélération de la pesanteur et z la cote du point au-dessus du niveau pris comme origine. La composante de la force suivant l'axe des z est $F = -\frac{dV}{dz} = -mg$: elle est bien constante et dirigée vers le bas. L'énergie potentielle augmente donc lorsque l'objet s'élève.

Nous observons bien, lorsqu'on lance un objet en l'air, que sa vitesse (donc son énergie cinétique) diminue lorsque l'objet s'élève, tandis que son énergie potentielle augmente. Il atteint le point où son énergie cinétique s'annule et où son énergie potentielle est maximale, c'est-à-dire le sommet de sa trajectoire. Son énergie potentielle se met alors à décroître, c'est-à-dire que l'objet retombe, tandis que son énergie cinétique augmente, la somme de ces deux énergies restant constante.

Mécanique d'un système de points matériels

Nous allons maintenant voir ce que deviennent les lois que nous avons énoncées lorsque l'on se trouve en présence, non d'une particule isolée, mais d'un système de n particules qui sont soumises, d'une part, à des forces dues à des corps étrangers au système de points matériels considéré, et, d'autre part, aux forces que les particules exercent les unes sur les autres.

Loi fondamentale de la dynamique - Notion de centre de gravité

Considérons une particule i ; elle est soumise à une force extérieure $\vec{F_i}$ et aux forces $\vec{F_{ij}}$ exercées sur elle par toutes les particules j. Le théorème fondamental de la dynamique s'écrit donc pour cette particule :

(5) $$\vec{F_i} + \sum_{i \neq j} \vec{F_{ij}} = \frac{\vec{dp_i}}{dt} = m_i\frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2}$$

où $\vec{p_i}$ est l'impulsion de la particule i.

Il va de soi que les forces $\vec{F_{ij}}$ obéissent à la loi de l'action et de la réaction, c'est-à-dire que la force $\vec{F_{ij}}$ exercée par la particule j sur la particule i est l'opposée de la force $\vec{F_{ji}}$ exercée par la particule i sur la particule j : $\vec{F_{ij}} = -\vec{F_{ji}}$.

La relation **(5)** permet en principe de déterminer le mouvement de chaque particule d'un ensemble de points matériels lorsque l'on connaît la force externe s'exerçant sur cette particule, ce qui est relativement fréquent, et que l'on connaît toutes les forces internes, ce qui est beaucoup plus rare. Considérons par exemple un corps solide indéformable, qui est un système particulier de points matériels, dans lequel ceux-ci sont assujettis à rester à des distances constantes les uns des autres. Il est bien clair que l'on ne connaît jamais toutes les forces internes à un solide. On peut pourtant décrire son mouvement sans ambiguïté ; cela prouve qu'il doit exister un moyen de représenter le mouvement d'un ensemble de points matériels sans rien connaître des forces internes.

Pour éliminer ces forces internes, reprenons la relation **(5)** et faisons la somme pour toutes les particules :

$$\sum_i \vec{F_i} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F_{ji}} = \sum_i m_i \frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2}$$

En vertu du principe de l'action et de la réaction, le deuxième terme du premier membre est nul. Le premier terme n'est autre que la force totale $\vec{F}$ agissant sur le solide ; on a donc :

(6) $$\vec{F} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

où M est la masse totale du solide ($M = \sum_i m_i$) et où $\vec{R}$ vaut :

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i\vec{r_i}}{\sum_i m_i}$$

Le point dont la position est ainsi définie est appelé centre de gravité de l'ensemble de points matériels considéré.

L'équation **(6)** montre donc que le mouvement du centre de gravité d'un ensemble de points matériels est le même que celui d'un point matériel unique qui serait soumis à la résultante des forces extérieures et dont la masse serait égale à la somme des masses de chacun des points matériels. Le mouvement du centre de gravité est donc complètement indépendant des forces internes à l'ensemble de particules.

La relation **(6)** permet également d'énoncer le **théorème de la conservation de l'impulsion** pour un ensemble de particules : *lorsque la force extérieure totale agissant sur un ensemble de points matériels est nulle, l'impulsion totale de cet ensemble de points matériels reste constante au cours du mouvement.*

Lois de conservation

● *Loi de conservation du moment cinétique*

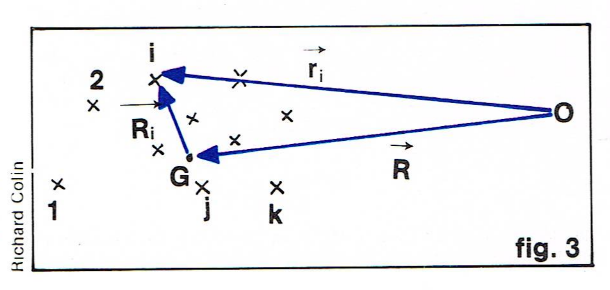
Dans le paragraphe précédent, nous avons défini l'impulsion totale du système comme la somme des impulsions de chaque point matériel du système. Nous définissons le *moment cinétique total* comme la somme des moments cinétiques de chaque particule par rapport à O :

(7) $$\vec{L} = \sum_i \vec{r_i} \wedge \vec{p_i}$$

Nous avons vu le rôle très particulier joué par le centre de gravité, dont le mouvement ne dépend que des forces extérieures au système, et dont on peut dire qu'il définit le mouvement d'ensemble du système.

Pour évaluer commodément $\vec{L}$, nous allons repérer les positions des points du système, non par rapport à O, mais par rapport au centre de gravité G (*fig.* 3) ; la position d'un point est repérée par $\vec{R_i}$, sa vitesse par $\vec{V_i}$:

$$\vec{r_i} = \vec{R_i} + \vec{R}$$



▶ *Figure 3 : les particules 1, 2, i, j, ..., peuvent être repérées soit par leur position $\vec{r_i}$ par rapport à l'origine, soit par leur position $\vec{R_i}$ par rapport au centre de gravité G.*

En dérivant cette relation par rapport au temps, nous obtenons :

$$\vec{v_i} = \vec{V_i} + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

L'impulsion de la particule i, dans ce nouveau repère, est alors :

$$\vec{P_i} = m_i \vec{V_i}$$

On démontre alors aisément à partir de la relation **(7)** que le moment cinétique total a pour valeur :

$$\vec{L} = \vec{R} \wedge M\vec{v} + \sum_i \vec{R_i} \wedge \vec{P_i}$$

Le moment cinétique total par rapport à O est donc la somme du moment cinétique qu'aurait une particule unique dont la masse serait égale à la masse totale du système et qui serait confondue avec le centre de gravité du système, et du moment cinétique total par rapport au centre de gravité. Le mouvement d'un système de particules peut donc toujours être décomposé en deux parties : le mouvement du centre de gravité et le mouvement par rapport au centre de gravité.

Le **théorème de conservation du moment cinétique** s'énonce alors de la façon suivante : *lorsque le moment extérieur total s'exerçant sur un ensemble de points matériels est nul, le moment cinétique total de cet ensemble reste constant au cours du mouvement.*

- *Loi de conservation de l'énergie*

Pour calculer l'énergie totale mise en jeu pour passer d'un état 1 à un état 2, nous distinguons comme précédemment les forces extérieures $\vec{E_i}$ et les forces intérieures $\vec{F_{ij}}$:

$$\textbf{(8)} \qquad W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F_i}\, d\vec{s_i} + \sum_{j \neq i} \int_1^2 \vec{F_{ji}}\, d\vec{s_i}$$

Nous pouvons appliquer l'équation fondamentale de la dynamique à chaque particule :

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt} \vec{v_i}\, dt$$

$$W_{12} = \sum_i \frac{1}{2} \left(m_i v_{i2}^2 - m_i v_{i1}^2 \right)$$

où v_{i1} et v_{i2} sont les vitesses de la particule i lorsque le système est dans les états 1 et 2 respectivement.

Le travail W_{12} est donc égal à la variation de l'énergie cinétique totale de toutes les particules :

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

entre les états 1 et 2.

Les vitesses qui interviennent dans cette expression de l'énergie cinétique sont les vitesses des points matériels par rapport au point O. Si l'on exprime ces vitesses par rapport au centre de gravité en utilisant la relation

$$\vec{v_i} = \vec{V_i} + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

l'énergie cinétique prend la forme suivante :

$$T = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i V_i^2$$

L'énergie cinétique est donc la somme de l'énergie cinétique qu'aurait une particule unique dont la masse serait la masse totale du système et qui serait confondue avec le centre de gravité du système, et de l'énergie cinétique due au mouvement des particules par rapport au centre de gravité.

Comme dans le cas d'une particule unique, nous allons supposer que les forces extérieures sont conservatives, c'est-à-dire qu'elles dérivent d'un potentiel. Le travail des forces extérieures peut alors s'écrire :

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F_i} ds_i = \sum_i V_{i1} - V_{i2}$$

où V_{i1} et V_{i2} sont les valeurs du potentiel aux points où se trouve la particule i lorsque le système est dans l'état 1 et lorsque le système est dans l'état 2 respectivement.

Supposons maintenant que les forces intérieures dérivent elles aussi d'un potentiel : la force $\vec{F_{ij}}$ par exemple, qui est la force exercée par la particule j sur la particule i, dépendra du potentiel V_{ij} par la relation :

$$\vec{F_{ij}} = - \overrightarrow{\text{grad}_i}\, V_{ij}$$

Or la loi de l'action et de la réaction entraîne nécessairement que le potentiel V_{ij} ne dépende que de la distance $(\vec{r_i} - \vec{r_j})$ entre les deux particules. Nous pouvons donc écrire la relation suivante :

$$\textbf{(9)} \qquad \int_1^2 (\vec{F_i} ds_i + \vec{F_j} ds_j) =$$

$$- \int_1^2 (\overrightarrow{\text{grad}_i}\, V_{ij} d\vec{s_i} + \overrightarrow{\text{grad}_j}\, V_{ij} d\vec{s_j})$$

Cette relation correspond à deux termes de la somme :

$$\sum_{j \neq i} \int_1^2 \vec{F_{ji}} d\vec{s_i}$$

intervenant dans la relation **(8)**.

Désignons par $\overrightarrow{\text{grad}_{ij}}\, V_{ij}$ la dérivation de V_{ij} par rapport aux composantes du vecteur

$$\vec{r_{ij}} = \vec{r_j} - \vec{r_i}$$

On a alors : $\overrightarrow{\text{grad}_{ij}}\, V_{ij} = \overrightarrow{\text{grad}_i}\, V_{ij} = - \overrightarrow{\text{grad}_j}\, V_{ij}$ puisque V_{ij} ne dépend que de $|\vec{r_{ij}}|$.

La relation **(9)** peut donc s'écrire :

$$- \int_1^2 \overrightarrow{\text{grad}_{ij}}\, V_{ij}\, dr_{ij}$$

Pour revenir à la relation **(8)**, il suffit de faire la somme sur tous les i et de diviser le résultat par 2 car chaque paire intervient deux fois dans la sommation :

$$\sum_{j \neq i} \int_1^2 \vec{F_{ji}}\, d\vec{s_i} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_1^2 - \overrightarrow{\text{grad}_{ij}}\, V_{ij}\, dr_{ij}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_{ij1} - V_{ij2})$$

où V_{ij1} et V_{ij2} désignent le potentiel d'interaction entre les particules i et j dans l'état 1 et dans l'état 2 respectivement.

Nous pouvons maintenant effectuer la somme du travail des forces externes et du travail des forces internes : si toutes ces forces sont conservatives, on peut définir un potentiel V par la relation :

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}$$

et le **théorème de la conservation de l'énergie** s'énonce ainsi : *si les forces internes et externes dérivent d'un potentiel, l'énergie totale T + V d'un système de particules reste constante pendant le mouvement.*

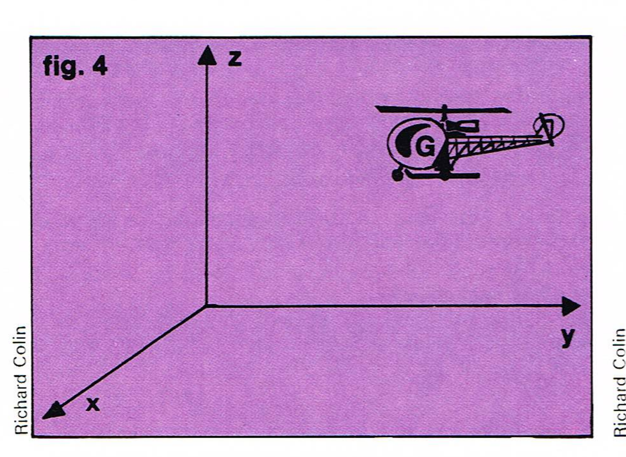
Le principe de Hamilton et les équations de Lagrange

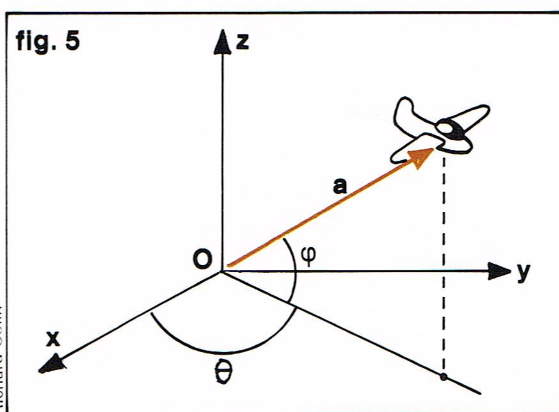
Tout ce qui précède contient, exposés très succinctement, les fondements de la mécanique tels qu'ils ont été énoncés par Newton ; ces fondements, sont, d'une part, le théorème fondamental de la dynamique $\left(\vec{F} = m \frac{d^2 r}{dt^2}\right)$ et, d'autre part, le principe de l'action et de la réaction. Cette approche fournit l'essentiel des outils de la mécanique et permet de résoudre un très grand nombre de problèmes qui peuvent se poser à l'ingénieur ou au physicien.

Nous allons maintenant examiner une approche plus abstraite de la mécanique, fondée sur un principe appelé principe de Hamilton. Nous déduirons de ce principe une nouvelle forme des équations de la mécanique qui peut, bien entendu, se ramener aux équations de Newton, mais qui est plus générale et fournit une solution élégante à de très nombreux problèmes dont la résolution serait possible, mais très lourde, à partir des équations de Newton.

Avant d'énoncer le principe de Hamilton, nous allons examiner la notion de coordonnées généralisées.

▶ *A gauche, figure 4 : un hélicoptère — que nous assimilons pour simplifier à son centre de gravité G — peut se diriger dans les trois directions de l'espace ; il possède trois degrés de liberté. A droite, figure 5 : un avion de manège forain reste à une distance constante de l'origine ; seuls les angles φ et θ peuvent varier : l'avion a deux degrés de liberté. Les angles φ et θ sont les coordonnées généralisées de l'avion.*





Coordonnées généralisées - Forces généralisées

Nous avons toujours exprimé jusqu'ici les équations décrivant l'évolution d'un point matériel ou d'un système de points matériels en fonction des coordonnées $\vec{r}_i\,(t)$ des divers éléments du système. Ces coordonnées ne sont cependant pas toujours les mieux adaptées à la résolution des problèmes de mécanique, en raison des contraintes liées à la nature physique du système. Par ailleurs, ces contraintes ont généralement pour effet de réduire le nombre de variables indépendantes.

Prenons un exemple : un hélicoptère en vol normal peut monter ou descendre, ou changer de cap (il peut également tourner autour d'un axe vertical, mais nous négligeons pour l'instant cette possibilité). Il peut se diriger dans les 3 directions de l'espace : nous dirons qu'il possède 3 degrés de liberté (*fig.* 4). Sa position est repérée par les 3 coordonnées x, y, z de son centre de gravité, et chacune de ces coordonnées peut varier indépendamment des deux autres.

Considérons maintenant un « avion » d'un manège de fête foraine (*fig.* 5). Il peut monter ou descendre, mais il est fixé à l'extrémité d'une barre rigide de longueur a, de telle sorte que sa distance au point O est constante ; ceci s'exprime par la relation $|\vec{r}| - a = 0$

ou encore $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - a = 0$ à tout instant.

On voit tout de suite que les coordonnées cartésiennes x, y, z sont peu commodes dans ce cas. De fait, on peut beaucoup plus simplement caractériser la position de l'avion par l'angle φ que fait la barre avec l'horizontale et par l'angle θ qu'elle fait avec un axe, par exemple l'axe Ox. Comme ces deux grandeurs caractérisent la position de l'avion de la même façon que x, y, z caractérisaient la position de l'hélicoptère, nous les appellerons les *coordonnées généralisées* de l'avion.

Nous voyons donc que, dans ce cas, les coordonnées généralisées ont deux particularités ; d'une part, ce ne sont pas des longueurs, mais des *angles*, et, d'autre part, elles sont au nombre de deux. Le fait d'avoir appliqué une contrainte $|\vec{r}| - a = 0$ à tout instant réduit d'une unité le nombre de coordonnées indépendantes (donc de degrés de liberté).

De façon générale, un système de N particules libres présente 3N degrés de liberté. Si on lui applique n contraintes qui s'expriment par une équation de la forme

(9 bis) $$f\,(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, t) = 0$$

le nombre de degrés de liberté (donc de coordonnées indépendantes) devient $3N - n$.

L'état de ce système pourra donc être décrit par $3N - n$ coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots, q_{3N-n}$. Les coordonnées $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ peuvent être exprimées en fonction des $3N - n$ coordonnées généralisées. Par exemple, dans le cas du manège, il n'y a qu'un seul vecteur $\vec{r}$, dont les composantes (x, y, z) s'expriment en fonction des coordonnées généralisées θ et φ par :

$$x = a \cos\varphi \cos\theta$$
$$y = a \cos\varphi \sin\theta$$
$$z = a \sin\varphi$$

Il existe cependant des contraintes supplémentaires que nous avons passées sous silence. Par exemple, dans le cas de l'hélicoptère, il faut que celui-ci soit au-dessus du sol, ce qui s'exprime par la relation : $z \geqslant 0$ à tout instant.

De même, dans le cas du manège, il existe certainement une hauteur maximale z_0 due au mécanisme d'entraînement du manège ; on aura donc deux contraintes supplémentaires :

$$z \geqslant 0 \quad \forall t$$
$$z \leqslant z_0 \quad \forall t$$

Ces contraintes ne sont pas du même type que les précédentes, car elles ne s'expriment pas par des relations du genre de la relation **(9 bis)** : $f\,(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots t) = 0$ mais par des inégalités.

Contrairement aux précédentes, ces contraintes n'ont pas pour effet de réduire le nombre de degrés de liberté, donc de coordonnées généralisées, du système.

Les coordonnées généralisées sont donc des grandeurs (longueurs, angles, énergies, etc.) qui, pour être utilisables dans la résolution d'un problème, doivent être pratiques pour décrire le système, compte tenu de sa configuration physique, être en nombre égal au nombre de degrés de liberté du système, et être bien entendu indépendantes les unes des autres.

Nous avons vu que, lorsque des forces sont conservatives, elles dérivent d'un potentiel :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ \mathbf{V}$$

Cette relation signifie que les 3 composantes F_x, F_y, F_z de la force sont les dérivées de la fonction **V** (x, y, z) par rapport aux coordonnées x, y, z, respectivement :

(10) soit par exemple $$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Nous savons maintenant que les coordonnées x, y, z peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées généralisées q_i ; le potentiel **V** peut donc être considéré comme une fonction des coordonnées généralisées **V** $(q_1, q_2, \ldots t)$. Par analogie avec la relation **(10)**, nous définirons des forces généralisées :

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Cette dernière relation n'est évidemment valable que pour un système conservatif.

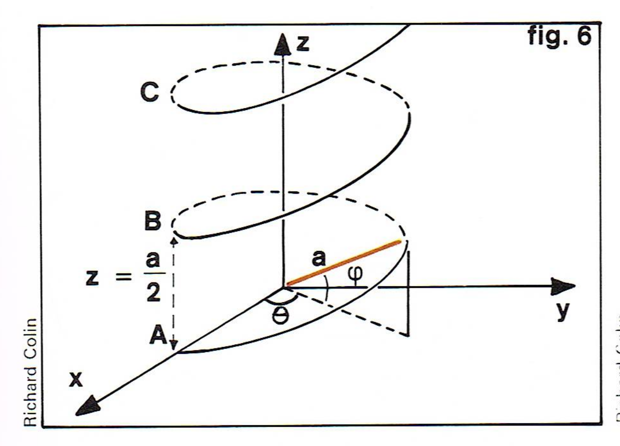
La définition générale de la *force généralisée*, qui est correcte même pour des systèmes non conservatifs, est la suivante :

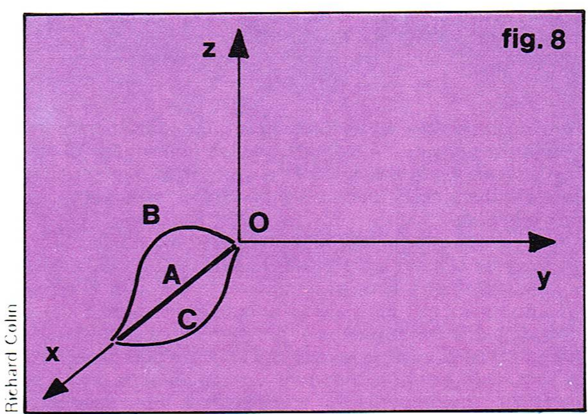
(11) $$Q_i = \sum_j F_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i}$$

Comme les q_i ne sont pas nécessairement des longueurs, les forces généralisées ne sont pas nécessairement homogènes à des forces. Ce qui est indispensable, et qui apparaît clairement dans la relation **(11)**, c'est que le produit $Q_i \delta q_i$ soit homogène à une énergie.

Principe de Hamilton

On a l'habitude de définir la trajectoire d'un point matériel dans l'espace comme la suite des points de l'espace occupés au cours du temps par le point matériel, ces points étant définis par leurs coordonnées x, y, z. Puisqu'un système peut être entièrement décrit par ses coordonnées généralisées, nous pouvons donc définir de





◀ *A gauche, figure 6 : trajectoire de l'avion de manège, représentée dans l'espace réel : une hélice.*
A droite, figure 8 : divers chemins possibles pour aller de l'origine en un point de l'axe Ox ; le principe de Hamilton indique que, parmi ces chemins, un point matériel empruntera celui pour lequel l'intégrale I est extremum.

façon analogue la trajectoire du point matériel dans l'espace des coordonnées généralisées, appelé espace de configuration. Pour un système possédant 3N — *n* degrés de liberté, l'espace de configuration est donc un espace à 3N — *n* dimensions.

Revenons à l'exemple de notre manège. Nous avons vu que la position de l'avion peut être décrite par 2 coordonnées généralisées ; son espace de configuration est donc un espace à 2 dimensions. Supposons que l'avion quitte le niveau du sol, monte régulièrement pendant deux tours du manège de sorte qu'il ait atteint une hauteur $z = \frac{a}{2}$ au bout d'un tour ; sa trajectoire réelle est représentée sur la *figure* 6 ; c'est une portion d'hélice. Considérons maintenant sa trajectoire dans l'espace de configuration (*fig.* 7) : c'est une droite passant par l'origine, par le point B ($\varphi = 30°$, $\theta = 360°$) au bout d'un tour et par le point C ($\varphi = 60°$, $\theta = 720°$) au bout de deux tours.

Dans cet exemple, nous avons un système très simple comprenant un point matériel soumis à une contrainte, donc la trajectoire dans l'espace de configuration est une *courbe plane ;* dans le cas très particulier d'une vitesse de montée constante, c'est une *droite*. De façon générale, pour un système à 3N — *n* degrés de liberté, la trajectoire du point représentatif du système, dans l'espace de configuration, est une courbe appartenant à un espace à 3N — *n* dimensions. Chacune des N particules aura sa trajectoire propre dans l'espace réel, alors que l'évolution du système tout entier sera représentée par une trajectoire unique dans l'espace de configuration.

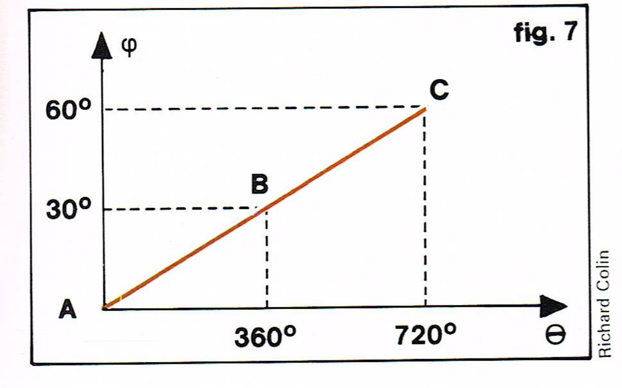
Cela posé, le *principe de Hamilton* s'exprime de la façon suivante : le mouvement d'un système entre deux instants t_1 et t_2 est tel que l'intégrale curviligne

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)\, dt$$

soit extrémale pour la trajectoire du mouvement dans l'espace de configuration.

La fonction L = T — V est appelée le *lagrangien* du système.

Prenons tout de suite un exemple d'application de ce principe : un point matériel libre, de masse *m*, passe à l'origine à l'instant t_1, sa vitesse étant dirigée selon l'axe des *x* ; à l'instant t_2, il se trouve en un point de coordonnées (X, 0, 0). Cherchons quel a été son mouvement entre t_1 et t_2.



◀ *Figure 7 : trajectoire de l'avion de manège au cours du même mouvement, représentée dans l'espace de configuration : une droite.*

Dans ce cas, il est commode d'utiliser comme coordonnées généralisées les coordonnées cartésiennes ; l'espace de configuration est donc l'espace habituel à 3 dimensions. La *figure* 8 montre diverses trajectoires possibles, A, B, C, dans cet espace de configuration. Le point matériel étant libre, son lagrangien L se réduit à l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2} mv^2$. Nous devons donc chercher la trajectoire qui rend extrémale la quantité.

$$\textbf{(12)} \qquad I = \frac{1}{2}\, m \int_{t_1}^{t_2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\, dx$$

Nous savons en outre que

$$\textbf{(13)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} v_x dt = X$$

$$\textbf{(14)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} v_y dt = 0 = \int_{t_1}^{t_2} v_z dt$$

L'intégrale I est la somme de trois intégrales ; si chacune d'elles est extrémale, leur somme I le sera. Considérons tout d'abord les intégrales

$$\int_{t_1}^{t_2} v_y^2 dt \qquad \text{et} \qquad \int_{t_1}^{t_2} v_z^2 dt$$

Elles sont positives ou nulles ; elles seront donc minimales si elles sont nulles, c'est-à-dire si $v_y(t) = v_z(t) = 0$; cette solution satisfait bien aux conditions **(14)**. Nous avons donc un premier résultat : pour que I soit extrémale, il faut que le point matériel se déplace en ligne droite en conservant sa direction initiale qui est la direction de l'axe O*x*.

Il nous reste à trouver comment la vitesse du point matériel varie au cours du mouvement. Pour cela, nous devons rendre extrémale l'intégrale $\int_{t_1}^{t_2} v_x^2 dt$.

Celle-ci est positive ou nulle ; elle ne peut être nulle, car cela exigerait que v_x soit constamment nulle, ce qui est en contradiction avec la relation **(13)**. Calculons la quantité $A = \int_{t_1}^{t_2} \left(v_x - \frac{X}{t_2 - t_1}\right)^2 dt.$

Cette quantité est positive ou nulle.

Développons cette expression :

$$A = \int_{t_1}^{t_2} v_x^2 dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} v_x \frac{X}{t_2 - t_1} dt + \frac{X^2}{t_2 - t_1}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} v_x^2 dt - 2 \frac{X}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v_x dt + \frac{X^2}{t_2 - t_1}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} v_x^2 dt - \frac{X^2}{t_2 - t_1} \geqslant 0$$

$$\text{donc} \qquad \int_{t_1}^{t_2} v_x^2 dt \geqslant \frac{X^2}{t_2 - t_1}$$

La valeur minimale de l'intégrale $\int_{t_1}^{t_2} v_x^2 dt$ est donc $\frac{X^2}{t_2 - t_1}$; il est facile de vérifier que c'est la valeur que l'on obtient si $v_x(t) = \frac{X}{t_2 - t_1}$; de plus, cette valeur de $v_x(t)$ est compatible avec la relation **(13)**.

Nous avons donc trouvé les valeurs de $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ qui satisfont au principe de Hamilton :

$$v_x(t) = \frac{X}{t_2 - t_1}; \quad v_y(t) = v_z(t) = 0$$

Nous avons ainsi, à titre d'exemple très simple, démontré à partir du principe de Hamilton qu'un point matériel qui n'est soumis à aucune force et qui possède une certaine vitesse initiale se déplace en ligne droite en gardant sa vitesse initiale.

Il va de soi que le procédé que nous venons d'utiliser, qui consiste à chercher la valeur minimale (ou maximale) de l'intégrale I et à essayer de trouver la forme analytique du lagrangien qui rend cette intégrale extrémale, n'est applicable que dans de rares cas extrêmement simples qui, en tout état de cause, trouvent une solution plus rapide en utilisant directement le théorème fondamental de la dynamique ou l'une des lois qui en découlent. Pour résoudre des problèmes plus complexes, on a été amené à chercher des conditions portant sur le lagrangien qui soient équivalentes au principe de Hamilton, c'est-à-dire des équations (portant sur la fonction L) qui rendent extrémale l'intégrale I : ce sont les équations de Lagrange.

Équations de Lagrange

Nous devons exprimer le fait que l'intégrale

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \quad \text{est extrémale;}$$

L est le lagrangien défini par la relation $L = T - V$. Le lagrangien est une fonction des coordonnées généralisées $(q_1, q_2, \ldots q_n)$, de leurs dérivées par rapport au temps $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_n)$ et du temps (t) lui-même :

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)$$

Pour simplifier les notations, nous allons supposer que le système ne possède qu'un degré de liberté :

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

Rappelons que ce processus de minimisation de l'intégrale I a pour but final de trouver la fonction $q(t)$ ou $\dot{q}(t)$, c'est-à-dire la loi de mouvement. C'est ce que nous avons fait dans l'exemple précédent, où nous avons trouvé $\dot{q}(t) = \dfrac{X}{t_2 - t_1}$.

Nous cherchons donc quelle est la fonction $q(t)$ qui, par l'intermédiaire du lagrangien, rend I extrémale. Cela signifie que, si $q(t)$ est remplacée par une fonction voisine $q(t) + \delta q(t)$, la variation δI correspondante sera nulle, par définition d'un extremum.

Il faut noter que la variation $\delta q(t)$ est quelconque, mais doit être telle que :

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

puisque les coordonnées généralisées du système aux instants t_1 et t_2 sont imposées.

Puisque la fonction $q(t)$ subit une variation $\delta q(t)$, sa dérivée $\dot{q}(t)$ subit également une variation $\delta\dot{q}(t)$. La variation de I est donc donnée par l'expression :

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q_1, \dot{q} + \delta\dot{q}, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

soit :

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt$$

Or

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}$$

La condition d'extremum s'écrit donc :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right) dt = 0$$

Or $\delta\dot{q} = \dfrac{d}{dt}(\delta q)$. Nous pouvons donc intégrer cette expression par parties :

$$\delta I = \left|\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\, dt = 0$$

Le premier terme de cette expression est nul puisque $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$; le second terme doit être nul quel que soit δq, ce qui exige que la relation suivante soit satisfaite :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Pour un système à n degrés de liberté, on obtient un système de n équations du même type :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Ces équations sont les *équations de Lagrange;* elles sont équivalentes au principe de Hamilton et constituent un système d'équations différentielles dont les solutions $q(t)$ décrivent l'évolution d'un système mécanique. A partir du moment où l'on est capable d'écrire le lagrangien du système, on peut, en appliquant les équations de Lagrange, en trouver le mouvement.

Nous avons donc vu jusqu'à présent trois manières d'aborder les problèmes de mécanique : la loi fondamentale de la dynamique, le principe de Hamilton et les équations de Lagrange. Nous venons de démontrer que ces deux dernières approches étaient équivalentes; il nous reste à montrer que la loi fondamentale de la dynamique peut se déduire des équations de Lagrange.

Considérons en effet un point matériel de masse m, soumis à une force conservative F dérivant d'un potentiel **V**; nous choisissons pour coordonnées généralisées les coordonnées cartésiennes (x, y, z). Son énergie cinétique vaut :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

et son énergie potentielle vaut **V** ; son lagrangien est donc :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

Écrivons les équations de Lagrange :

(15)
$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0$$

Or $\dfrac{\partial L}{\partial x} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = F_x$ par définition de **V**, et $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x$.

L'équation **(15)** s'écrit donc :

$$F_x - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$$

De même
$$F_y - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0$$

et
$$F_z - \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0$$

On reconnaît là la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un point matériel :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Notons que $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x$. Par analogie, nous définirons le moment conjugué p_i de la coordonnée généralisée q_i par la relation $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

Conclusion

Nous avons abordé dans cette partie les principes de base de la mécanique, en commençant par leur forme mathématique la plus simple, celle qui fut donnée par Newton : le théorème fondamental de la dynamique et les lois de conservation du moment, du moment cinétique et de l'énergie. Nous sommes ensuite remonté à un premier principe, dit principe de Hamilton, dont nous avons déduit les équations de Lagrange. Pourquoi ces formulations diverses ?

Remarquons tout d'abord que la formulation newtonienne met en jeu des quantités vectorielles, ce qui pose le problème du référentiel dans lequel on se place, car les composantes des vecteurs changent lorsque l'on change de référentiel : ce problème sera l'objet de la partie suivante.

La formulation par le principe de Hamilton ou les équations de Lagrange ne fait intervenir que des quantités

scalaires, donc indépendantes du système de référence. Ceci est une première différence. En outre, la formulation par le principe de Hamilton s'avère extrêmement générale ; elle se retrouve particulièrement en électromagnétisme et en mécanique quantique, de telle sorte que les résultats obtenus dans un domaine de la physique peuvent, sinon être transposés, du moins servir de guide dans un domaine complètement différent.

Par ailleurs, il est des domaines où l'analogie avec les équations de la mécanique est tellement forte que les équations sont transposables terme à terme ; c'est ainsi que des analogies électriques ont permis l'étude de systèmes mécaniques complexes, en particulier dans le domaine de l'acoustique et celui des ultrasons. Cette analogie dans la formulation mathématique est également très précieuse dans les problèmes où les grandeurs électriques et mécaniques sont couplées ; c'est le cas par exemple pour l'étude du déplacement dans un champ électrique de solides porteurs de charges électriques.

Le principe de relativité

Lorsque nous avons considéré les diverses manières d'envisager les principes de la mécanique, nous avons eu affaire soit à des *vecteurs* tels que la force ou l'accélération — c'était le cas lorsque nous avons énoncé le principe fondamental de la dynamique —, soit à des *scalaires* tels que l'énergie cinétique ou l'énergie potentielle — c'était le cas pour les équations de Lagrange, par exemple. Nous avons déjà noté qu'une grande différence entre ces deux formulations réside dans le fait que les quantités vectorielles dépendent du *repère* (on dit aussi du « *référentiel* ») dans lequel on se place, tandis que les quantités scalaires n'en dépendent pas. La question que nous allons nous poser dans ce qui suit est donc essentiellement : dans quels référentiels les lois de type vectoriel (théorème fondamental de la dynamique, loi de l'action et de la réaction) sont-elles valables ?

Notion de référentiel d'inertie

Définition

La loi fondamentale de la dynamique a comme conséquence immédiate le fait qu'un corps qui n'est soumis à aucune force garde sa vitesse initiale ; en particulier, s'il est immobile, il reste immobile. Cette observation est en accord avec notre expérience quotidienne, et l'on pourrait en conclure que, du moins sous ce rapport, un référentiel lié à la Terre est un référentiel dans lequel la loi fondamentale de la dynamique s'applique, la Terre serait ce que l'on appelle un *référentiel d'inertie*, ou *repère inertiel*, ou *repère galiléen*.

Supposons maintenant qu'un observateur se trouve assis dans un train parfaitement bien suspendu et insonorisé, dépourvu de fenêtre. Il a à côté de lui une tablette horizontale parfaitement lisse, sur laquelle est placé un objet également lisse, pouvant se déplacer sans frottement sur cette tablette. Supposons que le train soit initialement immobile le long du quai d'une gare. L'objet est posé, immobile, sur la tablette. Lorsque le train va démarrer, l'observateur va constater d'étranges phénomènes : l'objet va glisser sur la tablette en direction de l'arrière du train, tandis que l'observateur lui-même subira une poussée de la part de son siège (*fig.* 9). Il constate donc qu'un objet initialement immobile acquiert une certaine vitesse alors qu'aucune force n'est exercée sur lui ; c'est que, dans le référentiel dans lequel il se trouve — c'est-à-dire le référentiel lié au train — la loi fondamentale de la dynamique ne s'applique plus : le train en mouvement accéléré ne constitue pas un référentiel d'inertie.

En revanche, une fois que le train aura atteint sa vitesse de croisière et roulera à vitesse constante, tout rentrera dans l'ordre : si l'observateur pose l'objet sur la tablette, celui-ci restera immobile.

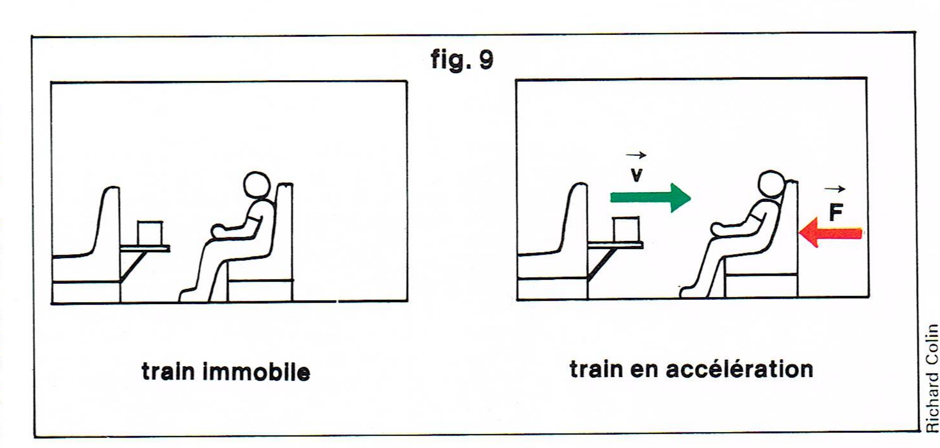
Principe de relativité

Supposons que l'observateur ait disposé dans le train du matériel afin de réaliser des expériences de physique autres que celle de l'objet lisse sur la tablette ; nous avons vu que cet objet se comporte, lorsque le train roule à vitesse constante, comme si celui-ci était immobile. L'observateur peut être tenté de faire d'autres expériences de physique pour essayer de savoir si le train est ou non en mouvement : il constatera que toutes les expériences, qu'elles soient de mécanique, d'électricité, d'optique, etc., lui fourniront les mêmes résultats que ceux qu'obtiendrait un observateur effectuant les mêmes expériences sur le quai de la gare ; s'il est parfaitement isolé du monde extérieur, il n'a aucun moyen de savoir s'il est ou non en mouvement, aussi longtemps que le train roule à vitesse constante en ligne droite.

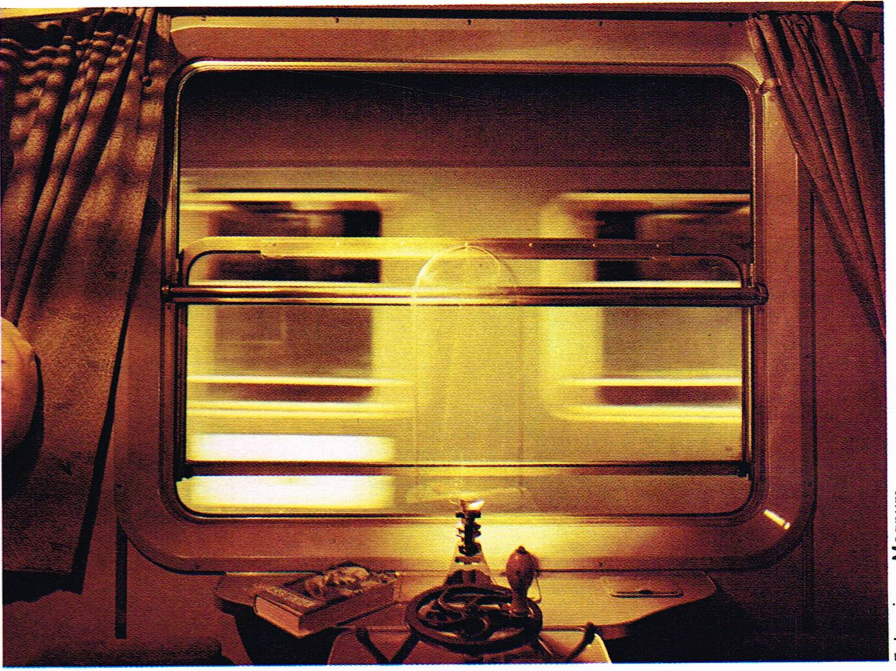
Ceci est la conséquence d'un principe fondamental de la physique qui est le **principe de relativité** : *les lois de la physique sont les mêmes pour deux observateurs animés d'un mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre.*

Pour en revenir à la mécanique, cela signifie que, si nous connaissons un référentiel d'inertie, c'est-à-dire un référentiel où la loi fondamentale de la dynamique s'applique, nous savons que tout référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport à celui-ci est aussi un référentiel d'inertie. Tout le problème est donc de trouver un référentiel dans lequel la loi fondamentale de la dynamique s'applique rigoureusement, ou tout au moins dans lequel il n'y a pas de différence mesurable entre les résultats prévus par la loi fondamentale de la dynamique et les résultats expérimentaux.

Nous avons vu que la Terre paraissait pouvoir constituer un référentiel d'inertie ; mais des expériences plus fines que nos expériences quotidiennes prouvent aisément le contraire. On a été ainsi amené à considérer comme référentiel d'inertie tout repère en translation par rapport à un repère défini par les directions de trois étoiles dites fixes. Nous ne savons pas, en réalité, si ces étoiles sont réellement fixes ; peut-être sont-elles en mouvement accéléré par rapport à la Galaxie ; mais ce que nous



▲ ***Figure 9 : lorsque le train est immobile, ou en mouvement rectiligne à vitesse constante, l'objet sur la tablette et l'observateur sur son siège sont immobiles par rapport au train ; lorsque le train accélère, l'objet se dirige vers l'arrière du train, et l'observateur est plaqué sur son siège.***



▼ ***Suivant le principe de relativité, le mouvement d'un pendule reste le même, qu'il soit placé dans un train à l'arrêt ou dans un train roulant en ligne droite à vitesse constante.***



▲ *Le trottoir roulant de l'Exposition universelle de 1900 : une application du mouvement uniforme ... et ses conséquences !*

cherchons, c'est un référentiel dans lequel la loi fondamentale de la dynamique s'applique, à la précision de nos instruments de mesure près.

En résumé, nous avons vu que la loi fondamentale de la dynamique s'applique dans un référentiel lié à trois étoiles fixes, et dans tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à celui-ci. En revanche, dans tout référentiel en mouvement accéléré, cette loi ne s'applique pas. Nous allons donc chercher maintenant, premièrement, comment se transforme la loi fondamentale de la dynamique lorsque l'on passe d'un référentiel galiléen à un autre, et deuxièmement, quelle loi la remplace lorsque l'on passe d'un référentiel galiléen à un référentiel non galiléen.

Transformation de Galilée

Considérons deux référentiels inertiels ou en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre (*fig.* 10). Nous supposons que cette translation se fait parallèlement à l'axe Ox, le point O′ ayant une vitesse $\vec{V}$ par rapport au point O.

Soit un point M de coordonnées (x, y, z) dans le repère Oxyz, et de coordonnées (x', y', z') dans le repère O′x′y′z′. On voit aisément que ces coordonnées sont liées par les relations :

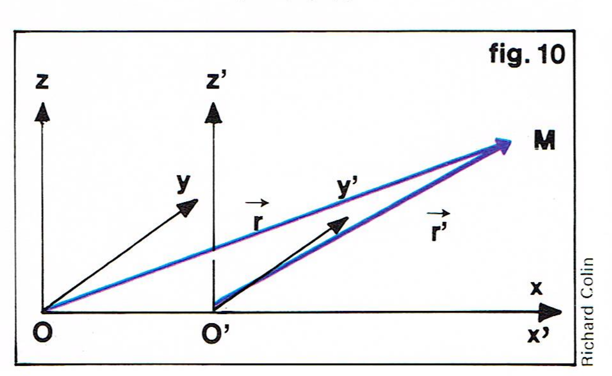
$$\textbf{(16)}\qquad \begin{cases} x' = x + \overline{OO'} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Supposons que les points O et O′ coïncident à l'instant initial ; à l'instant t, la distance $\overline{OO'}$ vaut : $\overline{OO'} = Vt$. Nous pouvons donc écrire les relations **(16)** sous la forme

$$\begin{cases} x' = x + Vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Vectoriellement, nous pouvons écrire ces relations de transformation de la façon suivante :

$$\vec{r'} = \vec{r} + \vec{V}t$$



▶ *A gauche, figure 10 : le point M est repéré par $\vec{r}$ par rapport au point fixe O et par r′ par rapport au point mobile O′ qui se déplace à vitesse $\vec{V}$ constante le long de l'axe Ox. Les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{r'}$ sont liés par la relation de transformation de Galilée. A droite, figure 11 : le repère O′x′y′z′ est animé d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation par rapport au repère fixe Oxyz : le repère Ox′y′z′ n'est pas un référentiel d'inertie.*

C'est la *relation de transformation de Galilée*.

Pour connaître la relation de transformation des vitesses, il suffit de dériver la relation précédente par rapport au temps, en se rappelant que $\vec{V}$ est indépendant du temps puisque la translation est uniforme.

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{V}$$

Soit $\vec{v'} = \vec{v} + \vec{V}$.

Nous pouvons enfin connaître la loi de transformation des accélérations en dérivant à nouveau par rapport au temps :

$$\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

L'accélération d'un point matériel est donc la même dans tous les référentiels inertiels : nous comprenons alors que la loi fondamentale de la dynamique soit la même dans tous les référentiels galiléens : supposons que le point matériel M, de masse m, soit soumis à une force $\vec{F}$ dans le référentiel Oxyz ; il subira alors une accélération :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Dans le référentiel Ox′y′z′ l'accélération est la même ; comme la masse m ne dépend pas du référentiel, il est clair que la force sera la même.

Référentiels non inertiels

- *Composition des vitesses et des accélérations*

Nous considérons maintenant deux référentiels quelconques Oxyz et O′x′y′z′ (*fig.* 11) ; le point O′ a une certaine vitesse $\vec{V}(t)$ par rapport à O, et la rotation du référentiel Ox′y′z′ est représentée par un vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(t)$, ce qui signifie qu'un point M, fixe par rapport à O′x′y′z′, a pour vitesse :

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{V}$$

Supposons maintenant que le point matériel M, dont la position est repérée par $\vec{r}$ dans le référentiel Oxyz et $\vec{r'}$ dans le référentiel O′x′y′z′, soit mobile dans le référentiel mobile :

$$\vec{r} = \vec{r'} + \overrightarrow{OO'}$$

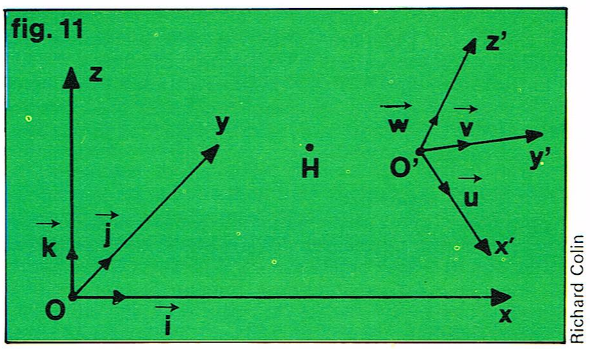
Désignons par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs unitaires sur les axes Ox, Oy, Oz et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, les vecteurs unitaires sur les axes O′x′, O′y′, O′z′. La relation précédente s'écrit :

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w} + \overrightarrow{OO'}.$$

Pour trouver la relation de transformation des vitesses, nous dérivons par rapport au temps :

$$\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \frac{dx'}{dt}\vec{u} + \frac{dy'}{dt}\vec{v} + \frac{dz'}{dt}\vec{w} + x'\frac{d\vec{u}}{dt} + y'\frac{d\vec{v}}{dt} + z'\frac{d\vec{w}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

Dans cette dérivation, nous avons considéré que le référentiel Oxyz est fixe et que le référentiel O′x′y′z′ est mobile. Le membre de gauche de la relation précédente est l'expression de la vitesse $\vec{v}$ du point M dans le référentiel Oxyz. Les trois premiers termes du membre de droite



constituent l'expression de la vitesse du point M dans le repère $O'x'y'z'$. Les quatre derniers termes du membre de droite ne sont pas autre chose que la vitesse qu'aurait le point M s'il était fixe dans le repère $O'x'y'z'$: c'est ce que l'on appelle la *vitesse d'entraînement* $\vec{v_e}$; la relation de transformation des vitesses s'écrit donc :

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v_e}$$

La vitesse absolue (c'est-à-dire par rapport à Oxyz) est égale à la somme de la vitesse relative (c'est-à-dire par rapport à $O'x'y'z'$) et de la vitesse d'entraînement.

La vitesse d'entraînement étant celle qu'aurait un point lié au référentiel $O'x'y'z'$, elle a pour expression :

$$\vec{v_e} = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M},$$

par définition de $\vec{\Omega}$.

Par conséquent, la relation de transformation des vitesses pour deux repères non galiléens est la suivante :

(17) $$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Remarquons que cette relation est très générale : soit un vecteur $\vec{U}$ et un vecteur $\vec{U'}$, liés par la relation

$$\vec{U} = \vec{U'} + \overrightarrow{OO'}$$

Nous aurons, de façon tout à fait analogue à la relation **(17)** :

(18) $$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{d\vec{U'}}{dt} + \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{U'}$$

Cherchons maintenant la loi de composition des accélérations : elle s'obtient en dérivant la relation **(17)** par rapport au temps et en appliquant la relation **(18)** aux vecteurs vitesses; la loi de transformation des accélérations est alors la suivante :

(19) $$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r'} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r'}) + 2\left(\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{r'}}{dt}\right)$$

Le premier terme du membre de droite est l'accélération du point M dans le repère $O'x'y'z'$; la somme des trois termes suivants est l'accélération qu'aurait, dans le repère Oxyz, un point fixe du repère $O'x'y'z'$ (c'est-à-dire un point tel que $\frac{d\vec{r'}}{dt} = 0$) qui coïnciderait avec M à l'instant considéré : c'est l'*accélération d'entraînement.*

Le dernier terme est appelé *accélération de Coriolis;* il n'existe que si le point matériel est en mouvement dans le repère non galiléen $\left(\frac{d\vec{r'}}{dr} \neq 0\right)$.

● *Forces d'inertie*

Revenons à notre propos initial, qui était de voir la forme que prenait la loi fondamentale de la dynamique dans un repère non inertiel.

Dans le repère Oxyz, que nous avons supposé inertiel, la loi fondamentale de la dynamique s'écrit, pour un point matériel de masse m : $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

L'accélération dans le repère inertiel peut s'exprimer en fonction de l'accélération dans le repère non inertiel par l'expression **(19)** :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} + \vec{\gamma_e} + 2\left(\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{r'}}{dt}\right)$$

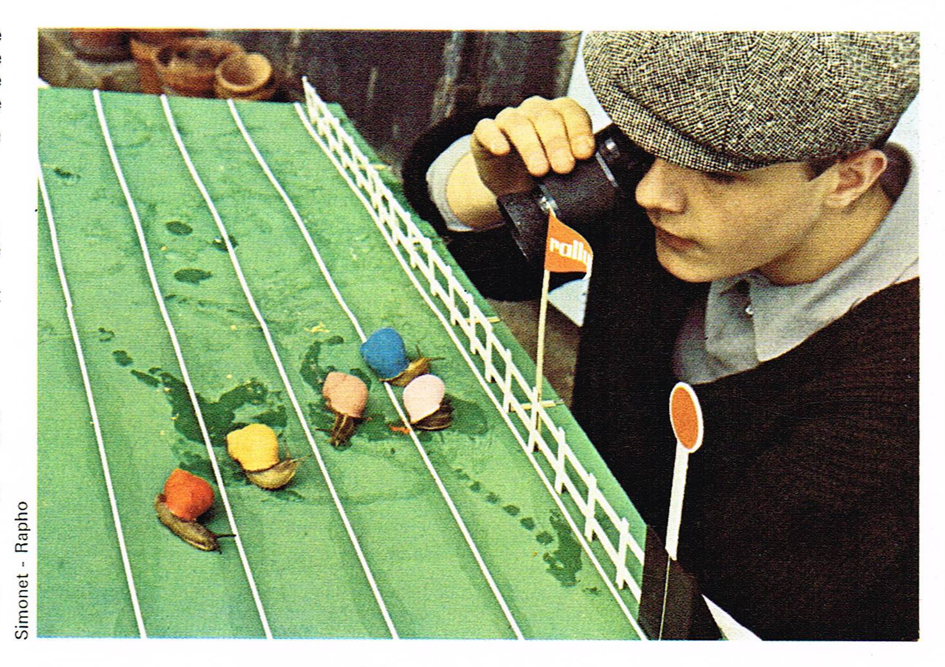
en désignant par γ_e l'accélération d'entraînement :

$$\vec{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r'} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r'})$$

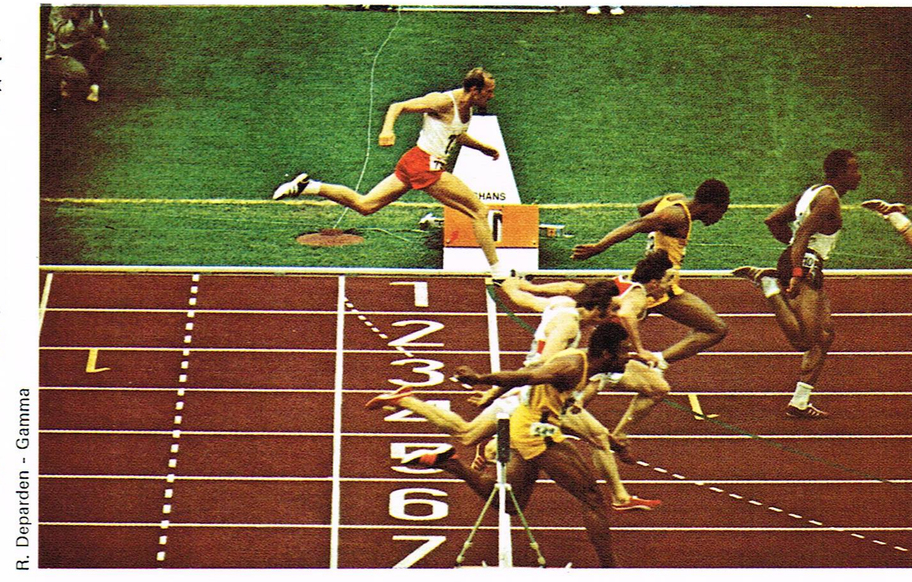
Nous pouvons donc écrire la loi fondamentale de la dynamique sous la forme :

(20) $$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} + m\vec{\gamma_e} + 2\,m\left(\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{r'}}{dt}\right)$$

L'observateur qui se trouve dans le repère non inertiel observe que le point M a pour accélération $\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2}$; tout se passe pour lui comme si l'objet M était soumis à la force :



Simonet - Rapho



R. Deparden - Gamma

▲ *Pour gagner la course, ce n'est pas la vitesse absolue qui compte...*

$$\vec{F} - m\vec{\gamma_e} - 2\,m\left(\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{r'}}{dt}\right) = m\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2}$$

Un observateur situé dans un repère non galiléen doit donc, s'il veut appliquer la loi fondamentale de la dynamique, ajouter à la force réelle $\vec{F}$ deux forces « fictives » ou « forces d'inertie » $-\,m\vec{\gamma_e}$ et $-\,2\,m\left(\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{r'}}{dt}\right)$.

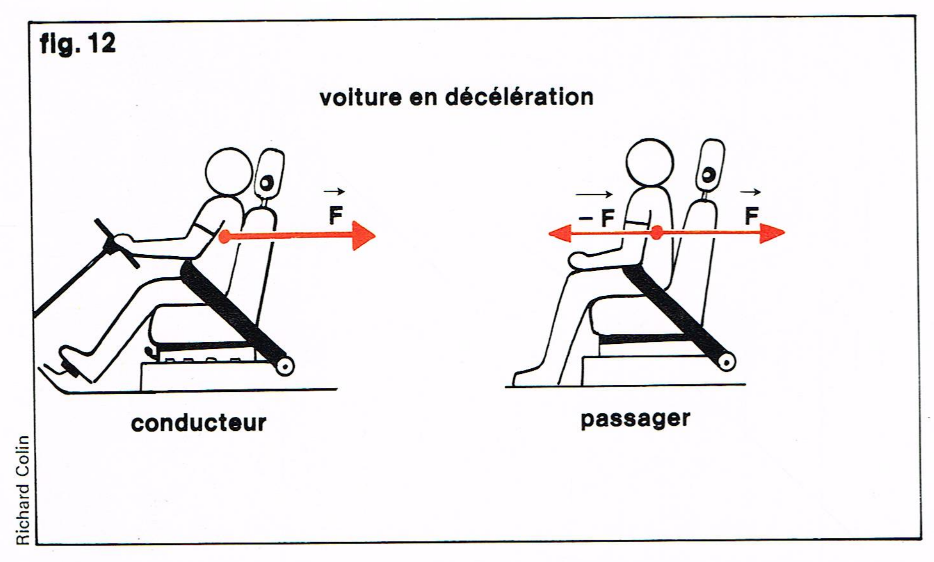
Nous pouvons maintenant comprendre ce qu'observait notre voyageur isolé dans son train au démarrage de celui-ci. L'objet posé sur la tablette était initialement au repos : $\vec{F} = 0$. Lorsque le train accélère, le repère qui lui est lié est en translation ($\vec{\Omega} = 0$) non uniforme : l'accélération de Coriolis est nulle, et l'accélération d'entraînement est simplement

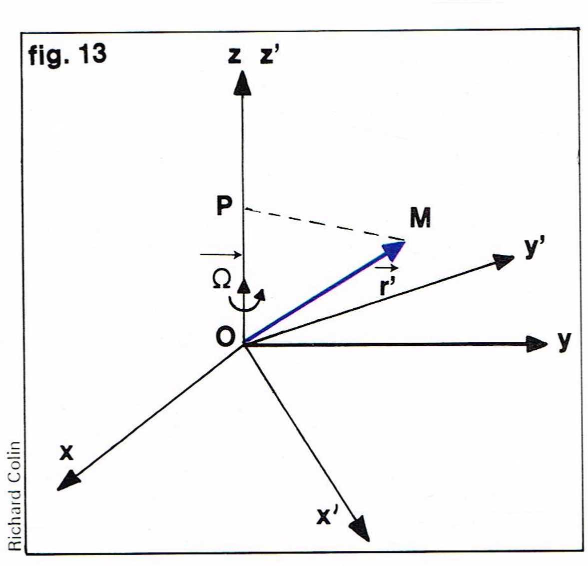
$$\vec{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

c'est-à-dire l'accélération du train par rapport au quai de gare. L'observateur lié au train observe donc que l'objet est soumis à une force d'inertie :

$$\vec{F_e} = m\vec{\gamma_e}$$

Il en résulte que l'objet prend une accélération opposée à l'accélération du train, donc se dirige vers l'arrière de celui-ci. L'observateur lui-même serait projeté en arrière s'il n'était pas retenu par le dossier de son siège.





▲ A gauche, figure 12 : dans une voiture en décélération le conducteur et le passager subissent les mêmes phénomènes, mais les décrivent de façon différente selon qu'ils se considèrent dans un repère inertiel ou non inertiel. A droite, figure 13 : le repère Ox'y'z' est en rotation autour de l'axe Oz' par rapport au référentiel Oxyz.

La raison pour laquelle ces forces sont appelées forces d'inertie est très apparente ici : c'est en effet que l'objet qui se trouve sur la tablette possède une certaine inertie, autrement dit qu'il n'a aucunement « envie » de suivre le train dans son mouvement ; conformément à la loi fondamentale de la dynamique, il reste immobile par rapport au quai de gare ; comme l'observateur, lié au train, se déplace par rapport au quai, il voit l'objet se déplacer vers l'arrière. Celui-ci ne suivra le mouvement du train que si le rebord de la tablette par exemple exerce sur lui une force suffisante pour que l'objet acquière la même vitesse que le train. Lorsque le train aura atteint sa vitesse de croisière, l'accélération d'entraînement s'annulera, donc la force d'inertie s'annulera également : la loi fondamentale de la dynamique pourra à nouveau s'appliquer sous sa forme habituelle.

La raison pour laquelle les forces d'inertie sont parfois appelées forces fictives est la suivante : ces forces sont des abstractions que l'on introduit lorsqu'il est commode de raisonner en se plaçant dans un référentiel non inertiel. Mais on pourrait très bien se passer d'introduire ces forces si l'on s'astreignait à raisonner toujours dans un référentiel galiléen. Il s'agit donc uniquement de quantités commodes pour résoudre les problèmes de mécanique.

Prenons un autre exemple pour illustrer ce point : supposons que, dans une automobile, parfaitement bien suspendue et insonorisée, se trouvent le conducteur et un passager, ce dernier ayant les yeux bandés (*fig.* 12). Le conducteur, qui roulait initialement à 100 km/h sur une route parfaitement lisse et rectiligne, freine brutalement, de sorte que la voiture subit une décélération γ. Comment raisonnent le conducteur et son passager ?

Le *conducteur* dira : la voiture a subi une décélération γ ; comme j'ai été retenu sur mon siège par ma ceinture de sécurité, je suis resté solidaire de ma voiture ; j'ai donc subi exactement la même décélération γ. Pour que cela soit possible, il a fallu que je sois soumis à une force $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ où m est ma propre masse. Cette force, dirigée vers l'arrière de mon véhicule, a été exercée sur moi par ma ceinture de sécurité.

Le *passager* dira : j'étais assis sur mon siège, immobile par rapport à la voiture (je n'avais d'ailleurs aucun moyen de savoir si la voiture était elle-même immobile ou si elle était en translation rectiligne uniforme). J'ai soudain senti une force me pousser vers l'avant, et en même temps ma ceinture de sécurité exerçait sur moi une force exactement opposée, de sorte que je suis resté immobile (c'est-à-dire que mon accélération est restée constamment nulle).

Ces deux personnes décrivent exactement le même phénomène — la décélération de la voiture — sous deux angles différents. Le conducteur considère qu'il était en mouvement et que sa vitesse a diminué à cause de la force exercée par sa ceinture de sécurité. Le passager considère qu'il est resté parfaitement immobile durant toute l'expérience : avant la décélération, il n'était soumis à aucune force ; pendant la décélération, il a été soumis à deux forces exactement opposées : celle qu'exerçait sa ceinture et celle « qui le poussait en avant » : la force d'inertie. L'un et l'autre ont raison, et l'on peut adopter indifféremment l'un ou l'autre point de vue.

Pour être tout à fait précis, il faut quand même noter que, avant comme pendant la décélération, les deux observateurs sont évidemment soumis en permanence à deux forces verticales : la *pesanteur* et la *réaction du siège*. Comme nous avons supposé que la route était parfaitement plane, ces deux forces sont constamment opposées.

Référentiels non inertiels particuliers - Les référentiels en rotation uniforme

Nous avons vu deux exemples de ce qui se passe dans des référentiels en translation rectiligne non uniforme. Nous allons maintenant considérer un autre exemple de référentiels non galiléens qui sont d'une grande importance : les *repères en rotation uniforme*.

Considérons deux repères $Oxyz$ et $Ox'y'z'$ en rotation l'un par rapport à l'autre autour de l'axe Oz (*fig.* 13) ; la rotation de $Ox'y'z'$ par rapport à $Oxyz$ est caractérisée par un vecteur $\vec{\Omega}$, colinéaire à Oz, indépendant du temps puisque la rotation est uniforme ; nous appellerons ω la *vitesse angulaire*, c'est-à-dire le module du vecteur $\vec{\Omega}$.

Examinons les divers termes de la relation **(20)**, l'accélération d'entraînement est donnée par :

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r'} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r'})$$

L'accélération de O' par rapport à O est nulle, puisque O est confondu avec O' : $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = 0$. La dérivée de $\vec{\Omega}$ par rapport à t est nulle, puisque la rotation est uniforme ; il ne subsiste donc de l'expression de $\vec{\gamma}_e$ que le dernier terme. Appelons x', y', z' les coordonnées de $\vec{r'}$; $\vec{\Omega}$ étant porté par Oz, $\vec{\Omega} \wedge \vec{r'}$ a pour composantes $(-y'\omega, x'\omega, 0)$. Le vecteur $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r'})$ a donc pour composantes $(-\omega^2 x', \omega^2 y', 0)$. Appelons P la projection de M sur Oz ; nous pouvons écrire :

$$\vec{\gamma}_e = -\omega^2 \overrightarrow{PM}$$

L'accélération d'entraînement est donc toujours dirigée de M vers P ; la force d'inertie, qui vaut $-m\vec{\gamma}_e$, est donc toujours dirigée de P vers M, c'est-à-dire de l'axe de rotation vers l'extérieur : elle est appelée *force centrifuge ;* la force d'entraînement, elle, est la *force centripète*.

Examinons maintenant l'accélération de Coriolis ; elle dépend du mouvement du point M par rapport au repère $Ox'y'z'$, mais elle est en tout cas certainement perpendiculaire à l'axe de rotation puisqu'elle a pour expression $\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{r'}}{dt}$: l'accélération de Coriolis est nulle pour un corps immobile dans le repère en rotation.

La Terre constitue un exemple de référentiel non inertiel en rotation uniforme. Le fait est démontré par une expé-

rience célèbre réalisée à Paris en 1851 par le physicien Foucault ; celui-ci suspendit un pendule sous le dôme du Panthéon, et constata que le plan dans lequel se balance le pendule tourne au cours du temps à cause de la rotation de la Terre.

Considérons en effet (*fig.* 14) le pendule se balançant au-dessus du pôle Nord ; le plan du pendule reste fixe dans l'espace, tandis que la Terre tourne. Pour un observateur lié à la Terre, et qui tourne avec celle-ci, le plan d'oscillation du pendule tourne en 24 heures. Si le pendule n'est pas au pôle Nord, la situation est un peu plus compliquée, mais le phénomène reste essentiellement le même, à ceci près que le plan d'oscillation du pendule tourne de plus en plus lentement au fur et à mesure que l'on s'approche de l'équateur. A l'équateur même, le phénomène disparaît.

La rotation de la Terre a également pour conséquence le fait qu'une force de Coriolis s'exerce sur les corps en mouvement : nous l'avons complètement négligée dans l'exemple du pendule de Foucault, car celui-ci se déplace très lentement. Par contre, supposons que l'on laisse tomber sans vitesse initiale un caillou dans un puits à la latitude de l'équateur. Faisons le bilan des forces qui s'exercent sur cet objet (*fig.* 15) :

— la *force de pesanteur,* dirigée vers le centre de la Terre, et qui vaut (nous le verrons dans un chapitre ultérieur)

$$F_p = \frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}$$

où $\mathcal{G}$ est une constante qui vaut

$$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$

M est la masse de la Terre, *m* celle du caillou, *r* la distance du caillou au centre de la Terre. Le puits étant à la surface de la Terre, *r* vaudra initialement 6 400 km environ ; si le puits a 100 m de profondeur, nous voyons que *r* variera d'une quantité négligeable au cours de l'expérience : nous pouvons le considérer comme constant. La force F_p sera donc constante.

$$F_p = -mg \quad \text{avec } g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$$

— la *force d'entraînement* est centrifuge et vaut

$$F_e = -m\omega^2 r$$

Comme précédemment, nous pouvons considérer que *r* est constant au cours de l'expérience. Nous savons de plus que la Terre fait un tour en 24 h (soit $8{,}6 \cdot 10^4$ secondes), donc

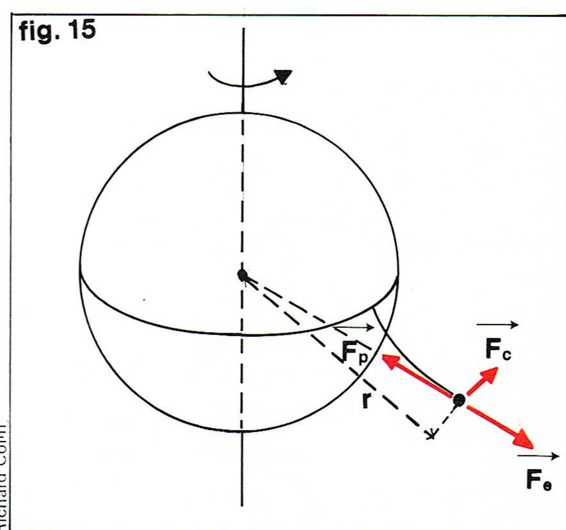
$$\omega = \frac{8\pi}{8{,}6 \cdot 10^4} \simeq 0{,}7 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{rad/s}$$

— la *force de Coriolis* vaut

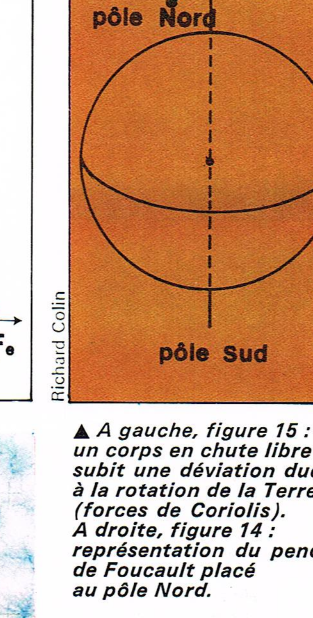
$$2\,\omega \frac{dx}{dt}$$

Compte tenu du sens de rotation de la Terre, cette force va être dirigée vers l'est. Cette force est initialement nulle, et augmente au fur et à mesure que le corps prend de la vitesse. Il en résulte que le caillou ne tombe pas en ligne droite, mais subit une déviation vers l'est. Pour une chute de 100 m, l'écart par rapport à la verticale (repérée à l'aide d'un fil à plomb qui, étant immobile par rapport à la Terre, n'est pas soumis à la force de Coriolis) est de 3 cm environ. C'est donc un effet faible, mais qui n'est pas négligeable et dont on doit tenir compte dans les calculs de balistique précis relatifs à des corps en mouvement rapide.

Les forces de Coriolis dues à la rotation de la Terre ont également un effet sur le climat, par l'intermédiaire des mouvements des nuages et des courants marins. En effet, les différences de température entre le pôle et l'équateur font qu'il existe un gradient de pression dirigé du nord vers le sud ; les vents auraient donc tendance à avoir une direction dominante nord-sud, mais, à cause de la force de Coriolis due à la rotation de la Terre, ils acquièrent une composante est-ouest. Lorsqu'il existe une haute pression localisée dans l'hémisphère Nord, les vents tendent donc à tourner dans le sens des aiguilles d'une montre ; il en résulte que les masses nuageuses prennent des allures de tourbillons que les photos des satellites météorologiques nous ont rendues familières.

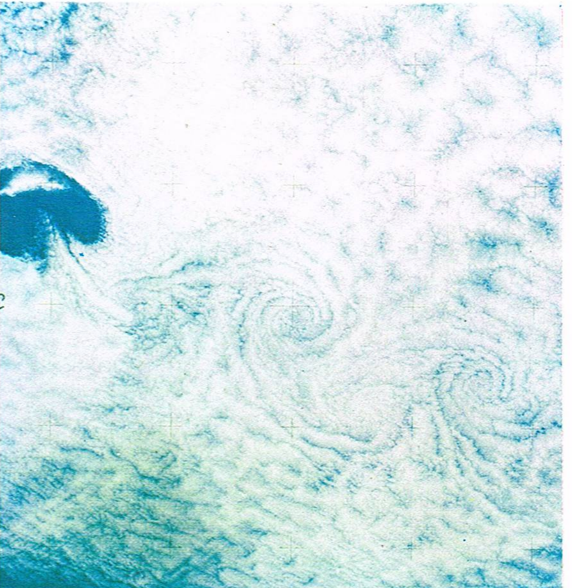


Richard Colin

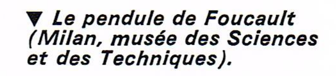


Richard Colin

▲ *A gauche, figure 15 : un corps en chute libre subit une déviation due à la rotation de la Terre (forces de Coriolis). A droite, figure 14 : représentation du pendule de Foucault placé au pôle Nord.*

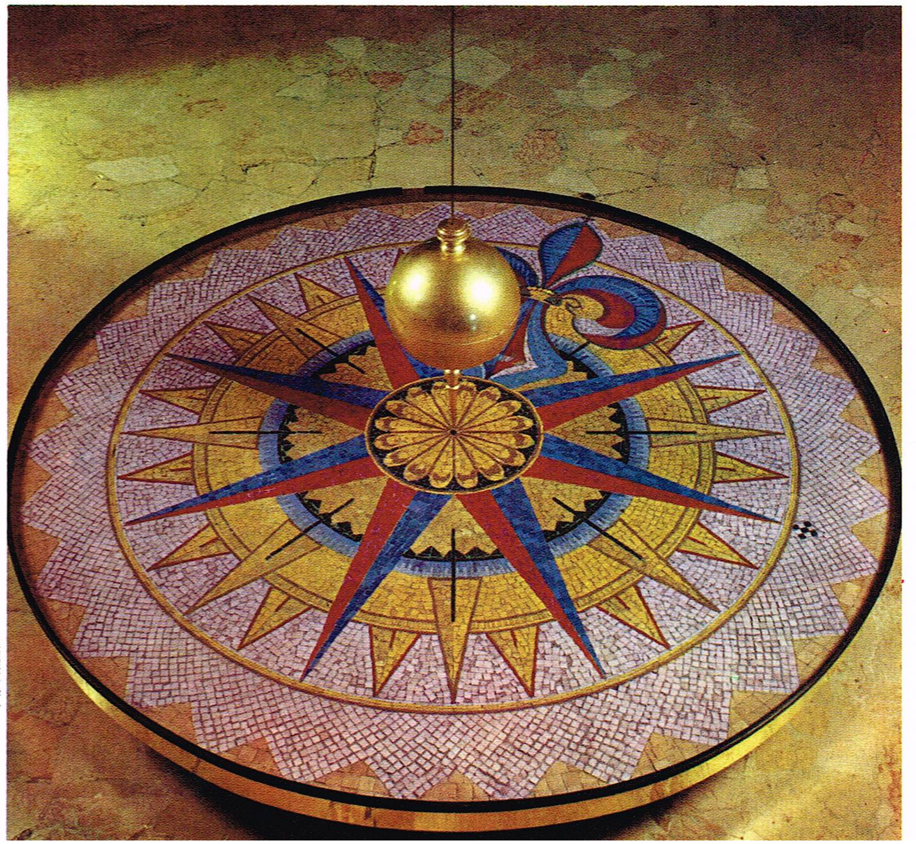


U.S.I.S.



◀ *Masses nuageuses en tourbillon photographiées par un satellite météorologique.*

▼ *Le pendule de Foucault (Milan, musée des Sciences et des Techniques).*



A. Rizzi

▶ *Figure 17 — un exemple de mouvement d'un corps dont la masse est variable : une fusée.*

Quantité de mouvement et moment cinétique

La loi fondamentale de la dynamique pour un ensemble de points matériels a pour conséquences, nous l'avons vu, deux relations concernant, l'une, la quantité de mouvement et, l'autre, le moment cinétique des particules du système.

La première relation, appelée **théorème de la quantité de mouvement,** est la suivante :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p_i}$$

La résultante $\vec{F}$ des forces extérieures appliquées au système est égale à la dérivée de la somme des impulsions de chaque particule.

La deuxième relation, appelée **théorème du moment cinétique,** est la suivante :

$$\vec{M} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r_i} \wedge \vec{p_i}$$

Le moment M des forces extérieures appliquées au système est égal à la dérivée de la somme des moments cinétiques de chaque particule.

Nous allons maintenant envisager quelques-unes des conséquences de ces théorèmes.

Théorème de la quantité de mouvement

Dans les exemples que nous allons envisager, nous utiliserons essentiellement la propriété de la conservation de la quantité de mouvement pour un corps qui n'est soumis à aucune force extérieure.

Chocs

Considérons deux boules de masses m_1 et m_2 se dirigeant l'une vers l'autre avec des vitesses v_1 et v_2 respectivement (*fig.* 16). Le choc a lieu au point O ; ces deux boules n'étant soumises à aucune force extérieure, la quantité de mouvement totale doit être la même avant le choc (vitesses $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$) qu'après (vitesses $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_2'}$) :

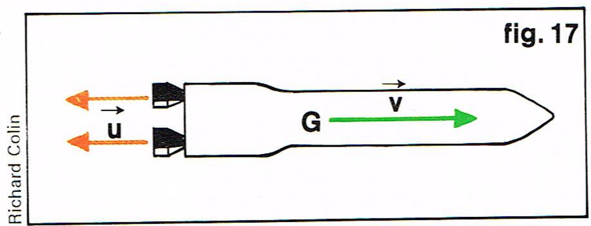
$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_2'}$$

Si $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont connues, cette relation à elle seule ne permet pas de déterminer $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_2'}$; il faut connaître une relation supplémentaire. Si le choc est parfaitement élastique, cette relation supplémentaire sera la relation de conservation de l'énergie. Nous reviendrons plus loin sur les chocs (voir *Collisions entre deux particules*).

Corps de masse variable : mouvement d'une fusée

Jusqu'ici nous avons toujours considéré que les corps en mouvement ont une masse constante. Tel n'est pas le cas cependant pour les fusées qui, consommant de grandes quantités de carburant, s'allègent rapidement. Comme la dimension de la fusée est petite devant la distance qu'elle parcourt, nous pouvons l'assimiler à un point matériel, de masse m variable.

Pendant un court instant dt, une certaine quantité de produits de combustion dm est éjectée avec une vitesse $\vec{u}$ par rapport à la fusée. Comme, à l'instant précédent, ces produits avaient une vitesse nulle par rapport à la fusée, c'est donc que la quantité de mouvement de ces produits a varié d'une quantité $\vec{u}dm$. La fusée, elle, a vu sa vitesse varier de $d\vec{v}$, sa quantité de mouvement a donc varié de $md\vec{v}$. La quantité de mouvement de l'ensemble a donc subi une variation $d\vec{p} = \vec{u}dm + md\vec{v}$.



On voit aisément sur la *figure* 17 que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de signe opposé; nous pouvons donc écrire la relation précédente sous la forme :

$$dp = mdv + udm$$

Si la fusée se déplace dans le vide et n'est soumise à aucune force, nous pouvons appliquer le théorème de conservation de l'impulsion :

$$0 = mdv + udm$$

$$dv = -u\frac{dm}{m}$$

Si la vitesse d'éjection des gaz est constante, cette relation s'intègre pour donner la relation suivante :

$$v = v_0 + u \text{ Log } \frac{m_0}{m}$$

où v_0 et m_0 sont les vitesses et la masse à l'instant initial. Si nous appelons m_f la masse de la fusée proprement dite et m_c la masse de carburant au départ, la vitesse atteinte lorsque tout le carburant sera dépensé est :

$$v = v_0 + u \text{ Log } \left(1 + \frac{m_c}{m_f}\right)$$

Dans les fusées utilisées en recherche spatiale, le rapport $\frac{m_c}{m_f}$ est de l'ordre de 4 à 5, et la vitesse d'éjection est de l'ordre de 2 000 à 3 000 m/s. L'utilisation de fusées à plusieurs étages permet d'augmenter v en allégeant la fusée de ses réservoirs vides.

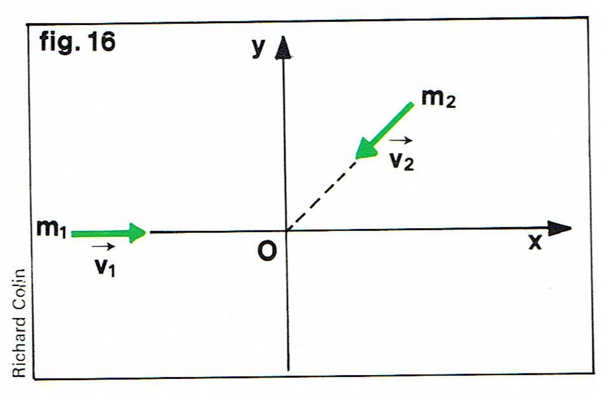
Recul des armes à feu

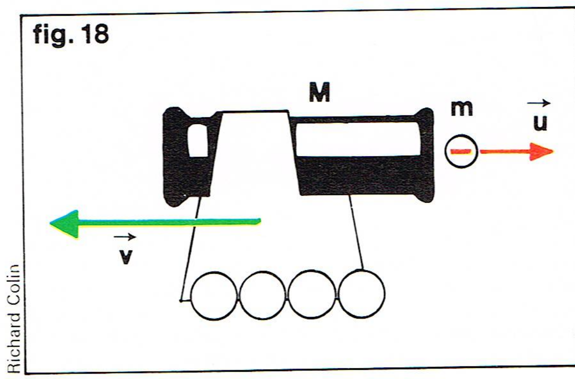
Considérons (*fig.* 18) qu'une arme à feu de masse M tire un projectile de masse m qui a, à la sortie du canon, une vitesse u. Le poids de l'arme étant équilibré par la réaction de l'affût, la projection des forces appliquées sur l'axe vertical est nulle. A l'instant initial, le projectile et l'arme sont au repos : l'impulsion est nulle. Lorsque le projectile a atteint la vitesse u, il a une impulsion mu, l'arme doit donc nécessairement prendre une vitesse v telle que :

$$Mv + mu = 0$$

$$v = -\frac{m}{M}u$$

L'arme a donc tendance à reculer brutalement au moment du départ du projectile : c'est le phénomène du *recul de l'arme*.





▶ *A gauche, figure 16 : choc de deux points matériels de masses m_1 et m_2. A droite, figure 18 : recul d'une arme à feu.*

Photo Research International

▲ *L'utilisation de fusées à plusieurs étages permet d'augmenter V en allégeant la fusée de ses réservoirs vides; ici, séparation du deuxième étage de* **Saturne V** *lors du lancement d'***Apollo XI.**

Théorème du moment cinétique

Point matériel soumis à une force centrale

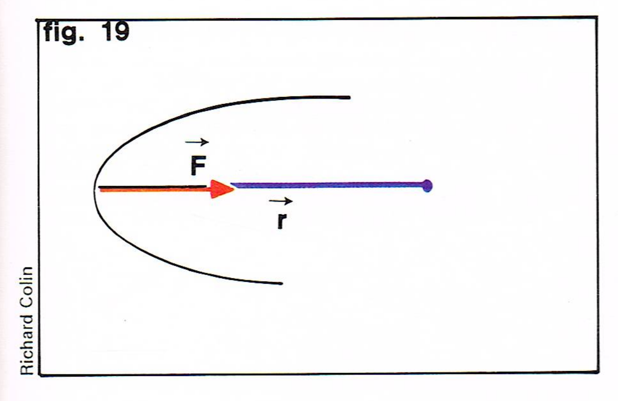
On appelle *force centrale* une force qui, en tout point, est portée par la ligne joignant le point considéré à un point particulier de l'espace. La force exercée par une particule chargée sur une autre particule chargée, la force exercée par une masse sur une autre masse sont des forces centrales. Par exemple, la Terre subit de la part du Soleil une force d'attraction qui est en permanence dirigée du centre de la Terre vers le centre du Soleil, quelle que soit la position de la Terre sur son orbite.

Nous considérons donc (*fig.* 19) une particule soumise à une force centrale $\vec{F}$; le moment de cette force par rapport à O est nul puisque $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ et que $\vec{r}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires. Le moment total étant nul, le moment cinétique reste donc constant au cours du mouvement. Or le moment cinétique vaut :

$$L = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

Il est donc perpendiculaire au plan déterminé par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$. Puisque sa direction est toujours la même, c'est que le plan déterminé par $\vec{r}$ et $\vec{v}$ est toujours le même : cela signifie donc que la trajectoire est plane.

Un corps soumis à une force centrale a donc toujours une trajectoire plane. C'est le cas en particulier des planètes du système solaire. Toutefois, les planètes ne sont pas soumises uniquement à l'attraction du Soleil ; chacune d'entre elles subit également l'influence des autres planètes, de sorte que la résultante des forces n'est plus exactement une force centrale. Cette correction reste cependant très petite pour les planètes du système solaire. Nous reviendrons plus en détail sur le problème des planètes dans un chapitre ultérieur.



◀ ***Figure 19 : point matériel soumis à une force centrale.***

Particule possédant un moment magnétique, soumise à un champ magnétique

Nous avons vu que le moment cinétique d'une particule soumise à une force centrale reste constant pendant le mouvement. Nous allons voir maintenant comment évolue le moment cinétique $\vec{J}$ d'une particule (un électron par exemple) possédant un moment magnétique $\vec{\mu}$, placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ (*fig.* 20). Ce problème est d'une très grande importance en physique, en chimie et en biologie.

Nous supposons que le moment magnétique $\vec{\mu}$ est proportionnel au moment cinétique :

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{J}$$

γ étant le *rapport gyromagnétique*.

Le moment magnétique étant placé dans un champ magnétique, il est soumis à un couple de moment $\vec{M} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$.

On a donc, d'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

soit encore :

$$\textbf{(21)} \qquad \frac{d\vec{J}}{dt} = \gamma\,(J \wedge \vec{B})$$

Multiplions scalairement les deux membres de cette relation par $\vec{J}$:

$$\vec{J} \cdot \frac{d\vec{J}}{dt} = 0$$

soit

$$\frac{1}{2}\,J^2 = \text{Cte}$$

Le moment cinétique garde donc un module constant. Sa direction, elle, ne reste pas constante. Multiplions en effet les deux membres de la relation **(21)** par $\vec{B}$:

$$\vec{B} \cdot \frac{d\vec{J}}{dt} = 0$$

soit

$$\frac{d}{dt}\,(\vec{B} \cdot \vec{J}) = 0$$

soit encore $|\vec{B}|\,|\vec{J}| \cos\theta = \text{Cte}$

Puisque $|\vec{B}|$ et $|\vec{J}|$ sont constants, le moment cinétique fait un angle constant avec la direction de $\vec{B}$: il décrit un cône de demi-angle au sommet θ (*fig.* 20).

Projetons maintenant la relation **(21)** sur les axes Ox et Oy :

$$\frac{dJ_x}{dt} = \gamma J_y B$$

$$\frac{dJ_y}{dt} = -\gamma J_x B$$

Il en résulte que :

$$\frac{d^2J_x}{dt^2} + (\gamma B)^2\,J_x = 0$$

Cette équation a pour solution :

$$J_x = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec } \omega = \gamma B\,;$$

la projection sur l'axe Ox de l'extrémité M du vecteur J est donc animée d'un mouvement sinusoïdal de pulsation $\omega = \gamma B$. Comme nous savons par ailleurs que le module de $\vec{J}$ est constant, nous savons que A décrit un cercle. Par conséquent, A est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

Nous voyons donc que, lorsqu'une particule possédant un moment magnétique est plongée dans un champ magnétique uniforme, son moment cinétique tourne autour de la direction du champ magnétique à vitesse constante. Ce phénomène, connu sous le nom de *précession de Larmor*, est très utilisé. Nous le retrouverons dans le chapitre consacré aux phénomènes de résonance.

Nous avons présenté ici quelques applications simples du théorème de conservation de l'impulsion et du théorème du moment cinétique. Il va de soi que ce ne sont là que des exemples. Nous en trouverons d'autres lorsque nous étudierons d'autres phénomènes.

La conservation de l'énergie

Nous avons vu que le **théorème de conservation de l'énergie** pour un système de points matériels s'énonce de la façon suivante : *si les forces internes et externes dérivent d'un potentiel, l'énergie totale du système, somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique, reste constante au cours du mouvement.*

Nous allons voir dans ce chapitre quelques applications de ce théorème extrêmement important ; nous étudierons en particulier le problème de l'interaction de deux particules, qui se pose constamment dans tout le domaine de la physique nucléaire.

Collision entre deux particules

Dans ce qui suit, nous allons considérer que les deux particules n'entrent en interaction que pendant la durée du choc, au moment où elles sont en contact ; c'est le cas de deux boules de billard par exemple.

Chocs élastiques entre deux particules

- *Étude des chocs élastiques*

Par définition, on appelle *choc élastique* un choc dans lequel l'énergie cinétique totale est conservée. L'énergie potentielle, elle, est nulle, puisque nous avons supposé que les particules ne sont en interaction que pendant la durée du choc.

Soit donc (*fig.* 21) deux particules de masses m_1 et m_2, de vitesses $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$; après le choc, elles ont pour vitesses respectivement $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_2'}$. Le choc étant élastique, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{2}\,m_1v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2v_2^2 = \frac{1}{2}\,m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}\,m_2v_2'^2$$

soit encore

$$\frac{p_1^2}{2\,m_1} + \frac{p_2^2}{2\,m_2} = \frac{p_1'^2}{2\,m_1} + \frac{p_2'^2}{2\,m_2}$$

p_1, p_2, p_1' et p_2' étant les impulsions avant et après le choc. Les vitesses initiales étant connues, cette équation ne nous permet pas de déterminer de façon unique les impulsions (ou les vitesses) après le choc.

Nous ne pouvons espérer le faire que si nous utilisons le théorème de conservation de l'impulsion ainsi que nous l'avons vu au paragraphe sur les *chocs :* le système étant isolé, l'impulsion, comme l'énergie cinétique, doit être la même avant et après le choc :

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_1'} + \vec{p_2'}$$

soit encore $m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_2'}$.

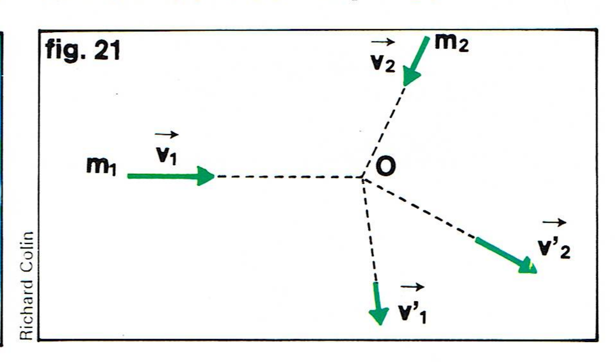
fig. 20

B

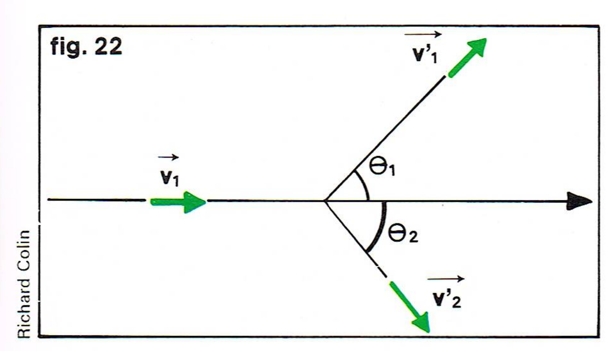
θ

J

Richard Colin



▶ *A gauche, figure 20 : précession du moment cinétique d'une particule autour du champ magnétique.*
A droite, figure 21 : deux particules de masses m_1 et m_2, de vitesses initiales $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$, possèdent des vitesses $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_2'}$ après le choc.



Richard Colin

◀ ***Figure 22 : choc sur une cible immobile.***

Considérons par exemple le cas où la cible est immobile : $\vec{p}_2 = 0$ (*fig.* 22). Nous appelons θ_1 l'angle que fait, avec sa direction initiale, l'impulsion de la particule projectile après le choc, θ_2 l'angle que fait avec $\vec{p}_1$ l'impulsion de la cible après le choc. La relation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit, en projection sur les axes :

$$p_1 = p'_1 \cos \theta_1 + p'_2 \cos \theta_2$$

$$0 = p'_1 \sin \theta_1 + p'_2 \sin \theta_2$$

La conservation de l'énergie s'écrit : $\dfrac{p_1^2}{2\,m_1} = \dfrac{p_1'^2}{2\,m_1} + \dfrac{p_2'^2}{2\,m_2}$

Ces trois équations ne suffisent pas à déterminer les quatre inconnues que sont p'_1, p'_2, θ_1 et θ_2 ; il nous manque un renseignement concernant la nature du choc.

— *Cas d'un choc de plein fouet.* Si nous savons par exemple que le choc est un choc de plein fouet, c'est-à-dire que les vitesses avant et après le choc sont colinéaires, nous pouvons écrire $\theta_1 = \theta_2 = 0$:

$$p_1 = p'_1 + p'_2$$

$$\frac{p_1^2}{2\,m_1} = \frac{p_1'^2}{2\,m_1} + \frac{p_2'^2}{2\,m_2}$$

Ce système a pour solution :

$$p'_1 = p_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$p'_2 = 2\,p_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Supposons que les deux particules soient de même masse : $m_1 = m_2$; il en résulte $p'_1 = 0$ et $p'_2 = p_1$: la particule initialement mobile est complètement arrêtée et la particule cible, initialement immobile, a acquis la vitesse qu'avait la particule projectile avant le choc.

Calculons les vitesses des particules :

$$v'_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = 2\,v_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Supposons que la cible ait une masse beaucoup plus grande que le projectile : $m_2 \gg m_1$. Alors nous obtenons :

$$v'_1 \simeq -v_1$$

$$v'_2 \simeq 0$$

La particule rebondit sur la cible, qui reste immobile.

— *Cas où la nature du choc n'est pas connue.* Revenons maintenant au cas où l'on ne connaît pas la nature exacte du choc, de sorte que les quatre variables p'_1, p'_2, θ_1, θ_2 ne sont pas toutes déterminées exactement. Pour étudier commodément ce cas, il est pratique de se placer dans le *référentiel barycentrique*, c'est-à-dire dans le référentiel dont l'origine est le centre de gravité des deux particules. Ce référentiel est animé d'une vitesse de translation uniforme puisque les deux particules constituent un système isolé.

Dans ce référentiel, les vitesses des deux particules *avant le choc* ont pour expressions :

$$\vec{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}$$

$$\vec{V}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse relative des deux particules avant le choc, qui est indépendante du référentiel galiléen choisi.

Après le choc, les vitesses $\vec{V}'_1$, $\vec{V}'_2$ et $\vec{v}'$ sont liées par les mêmes relations.

Toujours dans le référentiel barycentrique, les impulsions $\vec{P}_1 = m_1\vec{V}_1$ et $\vec{P}_2 = m_2\vec{V}_2$ sont égales en valeur absolue, et de signe contraire ; il en va de même des impulsions $\vec{P}'_1$ et $\vec{P}'_2$ après le choc. Quant à l'énergie cinétique, elle vaut :

$$\frac{1}{2}m_1\vec{V}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{V}_2^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}^2$$

▼ ***La collision entre deux boules de billard est un exemple de choc élastique.***

G. Cranham - Rapho

▶ *A gauche, figure 23 : construction graphique des vecteurs vitesses. A droite, figure 24 : construction vectorielle déterminant l'angle de déflexion dans le repère barycentrique.*

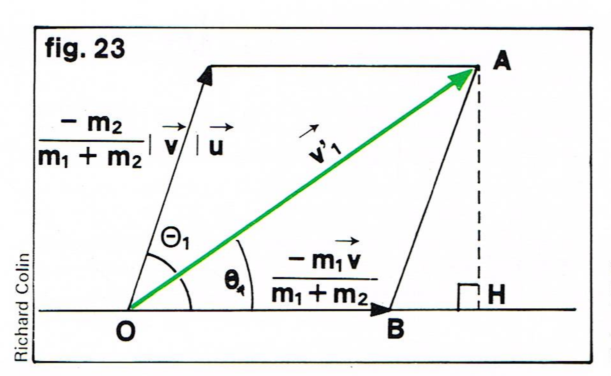


fig. 24

$-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$

Θ_1

$\frac{\pi-\Theta_1}{2}=\theta_2$

$\vec{v'}_2$

$\frac{m_1}{m_1+m_2}|\vec{v}|\vec{u}$

Richard Colin

Dans une collision élastique, le module de la vitesse relative reste le même avant et après le choc, puisque l'énergie cinétique est conservée. Il en résulte que la valeur absolue de l'impulsion de chaque particule reste également constante, puisque

$$|\vec{P_1}| = |\vec{P_2}| = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}|\vec{v}|$$

Nous voyons donc que, pour décrire l'évolution du système après le choc, il faut connaître la direction de $\vec{v}$ après le choc; comme nous l'avons déjà indiqué, cela nécessite de connaître la nature du choc. Soit donc $\vec{v'}$ la vitesse relative des deux particules après le choc; rappelons que $|\vec{v'}| = |\vec{v}|$. Nous désignons par $\vec{u}$ le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{v'}$: $\vec{v'} = \vec{u}\,|\vec{v}|$. Les vitesses après le choc sont donc :

$$\vec{V'_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}|\vec{v}|\,\vec{u}$$

$$\vec{V'_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}|\vec{v}|\,\vec{u}$$

Si nous revenons dans le référentiel lié à la Terre, nous obtenons :

$$\vec{v'_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}|\vec{v}|\,\vec{u} + \frac{m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}}{m_1+m_2}$$

$$\vec{v'_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}|\vec{v}|\,\vec{u} + \frac{m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}}{m_1+m_2}$$

Supposons que la particule cible soit initialement immobile dans le référentiel lié à la Terre ($\vec{v_2} = 0$) :

$$\vec{v'_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}|\vec{v}|\,\vec{u} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$$

$$\vec{v'_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}|\vec{v}|\,\vec{u} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$$

puisque $\vec{v} = -\vec{v_1}$.

Le vecteur $\vec{v'_1}$, vitesse de la particule projectile avant le choc dans le référentiel lié à la Terre, est donc la somme de deux vecteurs, le premier étant colinéaire au vecteur $\vec{u}$, le second au vecteur $\vec{v}$: l'angle de ces deux vecteurs est donc la déviation Θ_1 de la particule dans le référentiel barycentrique. Dans le référentiel lié à la Terre, la déviation est donnée par l'angle θ_1 de $\vec{v'_1}$ et de $\vec{v}$; la construction de ces vecteurs est représentée graphiquement sur la *figure* 23.

Nous pouvons exprimer θ_1 par l'intermédiaire de tg θ_1 :

en effet, $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{AH}{OB + BH}$

soit :

$$\text{tg}\,\theta_1 = \frac{\sin\Theta_1}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\Theta_1}$$

Le vecteur $\vec{v'_2}$, lui, est la somme de deux vecteurs de même module, colinéaires aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement (*fig.* 24) ; il est donc porté par la bissectrice de ces deux vecteurs :

$$\theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \Theta_1)$$

Si les deux masses m_1 et m_2 sont identiquès, on a :

$$\theta_1 = \frac{\Theta_1}{2}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - 2\,\theta_1)$$

On voit que $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$: les deux particules s'éloignent l'une de l'autre à angle droit dans le référentiel lié à la Terre. La *figure* 25 montre le choc vu dans le référentiel barycentrique et dans le référentiel lié à la Terre (« référentiel du laboratoire »).

Revenons au cas de deux particules de masses différentes : on peut aisément calculer les modules des vitesses après le choc dans le référentiel du laboratoire : on obtient

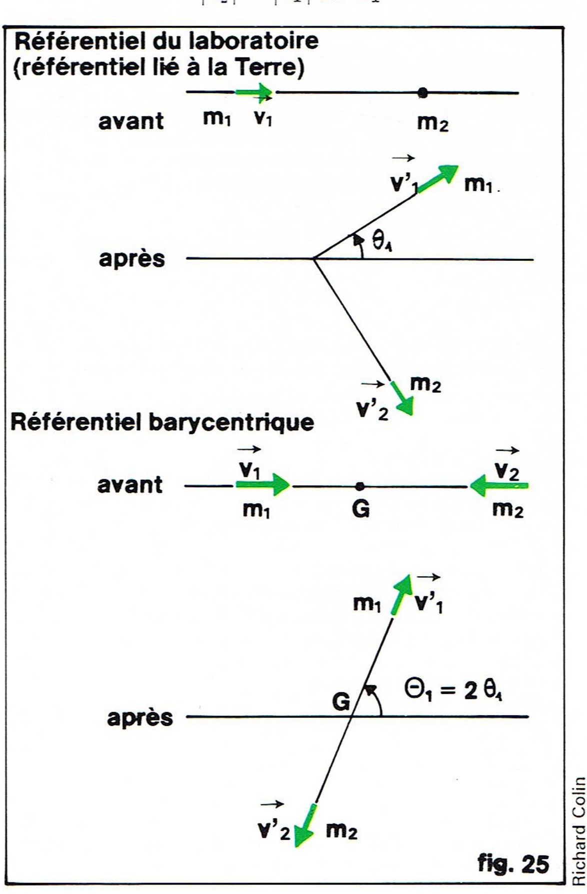
$$\textbf{(22)} \qquad |\vec{v'_1}| = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\,m_1 m_2 \cos\Theta_1}}{m_1+m_2}|\vec{v_1}|$$

$$|\vec{v'_2}| = \frac{2\,m_1}{m_1+m_2}|\vec{v_1}|\sin\frac{\Theta_1}{2}$$

Si les deux particules sont de même masse, ces relations se réduisent à :

$$|\vec{v'_1}| = |\vec{v_1}|\cos\Theta_1$$

$$|\vec{v'_2}| = |\vec{v_1}|\sin\Theta_1$$



▶ *Figure 25 : choc entre deux particules de même masse vu du référentiel du laboratoire et du référentiel barycentrique.*

● *Application au ralentissement des neutrons*
Dans un réacteur nucléaire, la fission de l'uranium 235 est produite par des *neutrons*. Un neutron provoque la fission d'un atome d'uranium 235, fission qui crée elle-même plusieurs neutrons, entraînant ainsi une *réaction en chaîne*. Les neutrons produits par la fission ont une très grande énergie, de l'ordre d'un kilo-électron-volt (voir *Champ de pesanteur - Champ électrostatique* pour la définition de l'électron-volt). Afin d'augmenter la probabilité pour qu'un de ces neutrons provoque à son tour un phénomène de fission, il faut préalablement le ralentir, jusqu'à ce que son énergie cinétique ne soit plus que de l'ordre de $\frac{1}{40}$ eV (électron-volt). Ce ralentissement est produit par la collision de ces neutrons sur des noyaux d'atomes tels que l'hydrogène, le deutérium, etc. Nous allons supposer que ces noyaux sont immobiles dans le référentiel du laboratoire, ce qui est une approximation assez grossière.
Désignons par m la masse du neutron; la masse du noyau est approximativement A × m, où A est le *nombre de masse* du noyau considéré. Nous cherchons à déterminer l'énergie cinétique moyenne E d'un neutron après une collision élastique avec un de ces noyaux; le rapport de E à l'énergie cinétique initiale E_0 vaut

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} m v'^2_1}{\frac{1}{2} m v_1^2} = \frac{v'^2_1}{v_1^2}$$

Or, d'après la relation **(22)**, nous avons

$$|\vec{v}'_1| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 + 2\frac{m_2}{m_1}\cos\Theta_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} |\vec{v}_1|$$

Par conséquent :

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1 + A^2 + 2A\cos\Theta_1}{(1 + A)^2}$$

La perte d'énergie dépend donc de l'angle Θ_1, qui peut prendre n'importe quelle valeur; il faut donc effectuer une moyenne sur toutes les valeurs possibles de Θ_1 : on trouve alors

$$E = E_0 \frac{A^2 + 1}{(A + 1)^2}$$

où E est l'énergie moyenne d'un neutron après une collision. Pour l'hydrogène (A = 1), on voit que $E = \frac{E_0}{2}$: un neutron perd la moitié de son énergie en une collision. Il faut donc un grand nombre de collisions pour arriver à une énergie de l'ordre de $\frac{1}{40}$ eV à partir d'une énergie de quelques milliers d'électrons-volts.

Chocs inélastiques entre deux particules
Dans un choc inélastique, l'énergie cinétique totale n'est pas conservée, mais une partie de l'énergie cinétique initiale est absorbée dans le choc, soit sous forme de chaleur, soit sous forme d'énergie de déformation, de façon irréversible. L'impulsion, en revanche, se conserve. On a donc le système d'équations :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 + Q$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_1 = m_1\vec{v}'_1 + m_1\vec{v}'_2$$

où Q est l'énergie dissipée au cours du choc.
Dans le référentiel barycentrique, la conservation de l'énergie s'écrit maintenant :

$$\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v'^2 + Q$$

La valeur de la vitesse relative varie donc à la suite du choc. Le rapport $\frac{v'}{v}$ est appelé *coefficient de restitution k* : il vaut 1 dans un choc parfaitement élastique, et 0 dans un choc parfaitement mou (dans ce dernier cas, les particules restent collées l'une à l'autre). L'énergie absorbée pendant le choc s'exprime alors en fonction de k par :

$$Q = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v'^2 - v^2) = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 - k^2)v^2$$

La réaction de fusion de deux noyaux est un exemple de choc parfaitement mou. Un autre exemple de choc mou est donné par la collision de deux voitures, dans laquelle l'énergie cinétique initiale est dissipée en chaleur et en énergie de déformation des tôles.

Interaction entre deux particules
Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie ne suffisent pas à déterminer l'état du système après le choc, mais qu'il faut en plus connaître la nature de l'interaction entre les particules ou points matériels considérés. Nous allons donc supposer maintenant qu'il existe un certain *potentiel d'interaction* U (r) entre les deux particules, potentiel qui permet de prédire l'angle de diffusion.
En d'autres termes, nous avons jusqu'à présent considéré ce qui se passe avant le choc, c'est-à-dire avant que les particules soient en interaction, puis après le choc, c'est-à-dire une fois que l'interaction a cessé. Nous allons maintenant considérer ce qui se passe pendant la durée de l'interaction.
Dans le référentiel barycentrique, l'énergie totale est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$E = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 + U(\vec{r})$$

où $\vec{r}$ est le vecteur joignant les deux particules et $\vec{v}$ leur vitesse relative. Le système étant isolé, l'énergie E reste constante.
Par ailleurs, le théorème de conservation du moment cinétique montre, ainsi que nous l'avons vu, que la trajectoire est plane (voir *Point matériel soumis à une force centrale*). Écrivons ce théorème dans le référentiel barycentrique :

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{L}$$

où $\vec{L}$ est un vecteur constant. Pour simplifier l'écriture, nous désignerons par μ la quantité $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$; μ est appelée la masse réduite des deux particules. Par souci de commodité, nous nous plaçons en coordonnées polaires, comme indiqué sur la *figure* 26. Le théorème de conservation du moment cinétique s'écrit alors :

$$\mu\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{L}$$

soit encore

$$\mu r^2 \frac{d\theta}{dt} = L$$

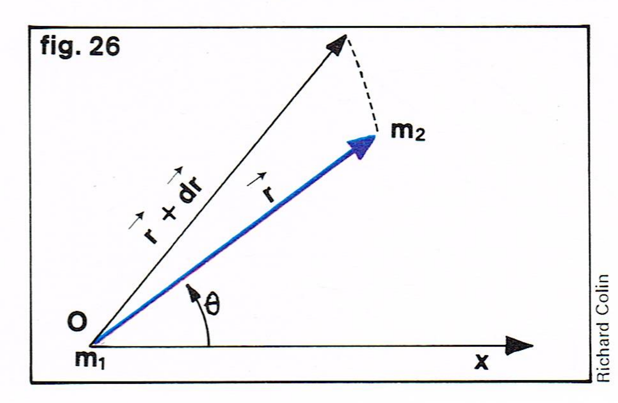
puisque le vecteur $d\vec{r}$ a pour composantes dr le long du vecteur $\vec{r}$ et $rd\theta$ perpendiculairement à ce vecteur.
Toujours en coordonnées polaires, le théorème de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{1}{2}\mu\left[\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] + U(r) = E$$

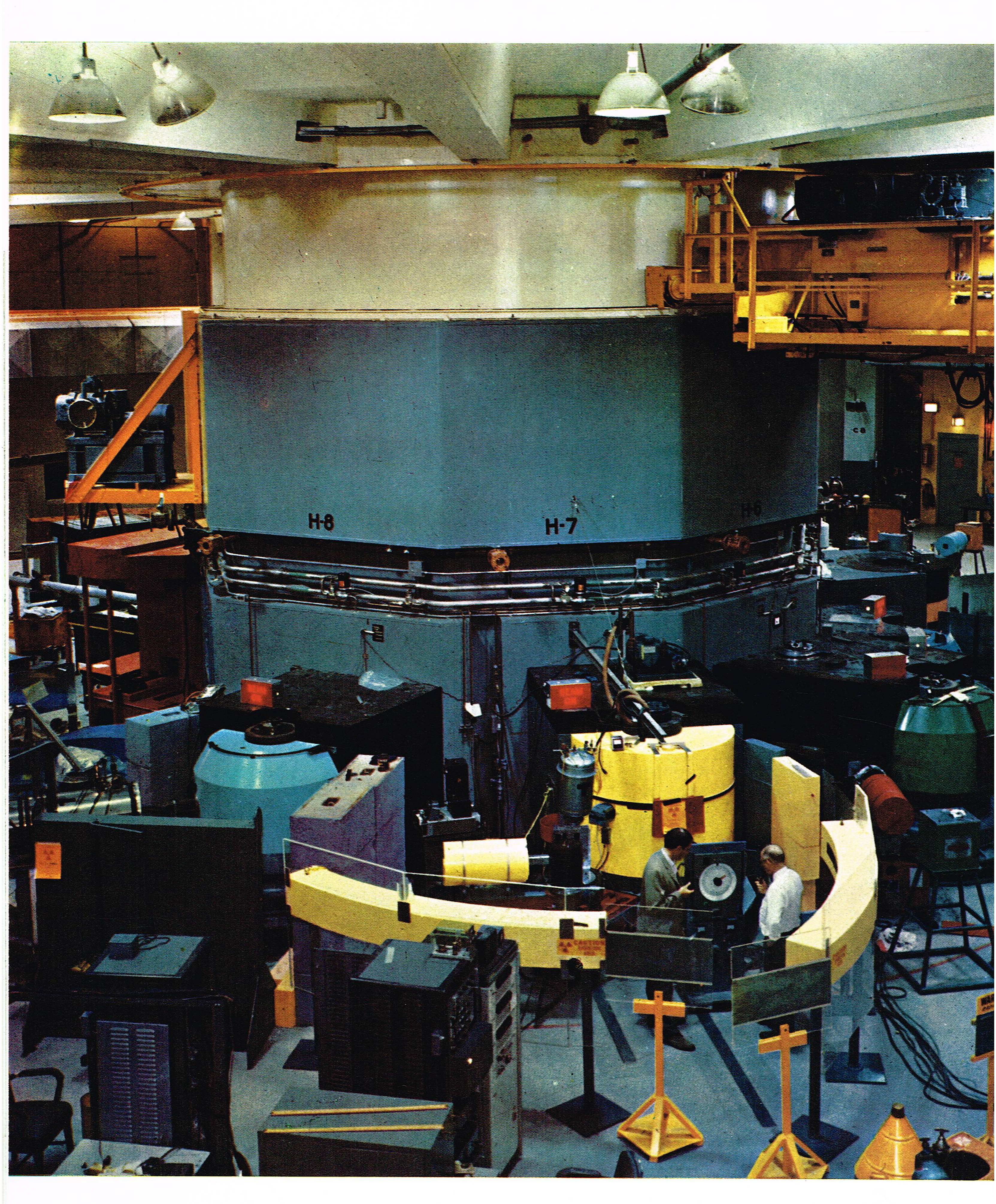
Or

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}$$

par conséquent $E = \frac{1}{2}\mu\left[\frac{L^2}{\mu^2 r^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] + U(r)$



◄ ***Figure 26 : coordonnées polaires.***


H-8
H-7
H-6

Nous pouvons donc exprimer $\frac{dr}{dt}$ en fonction de r :

$$\text{(23)} \qquad \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\,[\mathrm{E} - \mathrm{U}\,(r)] - \frac{\mathrm{L}^2}{\mu^2 r^2}}$$

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour écrire l'équation de la trajectoire, c'est-à-dire pour exprimer θ en fonction de r (ou r en fonction de θ). Écrivons en effet la loi de conservation du moment cinétique :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathrm{L}}{\mu r^2}$$

Remplaçons dt par son expression en fonction de dr, d'après la relation **(23)** :

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\,[\mathrm{E} - \mathrm{U}\,(r)] - \frac{\mathrm{L}^2}{\mu^2 r^2}}}$$

Nous avons alors $d\theta = \frac{\mathrm{L}}{\mu r^2} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\,[\mathrm{E} - \mathrm{U}\,(r)] - \frac{\mathrm{L}^2}{\mu^2 r^2}}}$

soit encore

$$\text{(24)} \qquad \theta = \int \frac{\mathrm{L}}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}\,[\mathrm{E} - \mathrm{U}\,(r)] - \frac{\mathrm{L}^2}{\mu^2 r^2}}}\,dr + \mathrm{K}$$

K étant une constante déterminée par les conditions initiales.

La relation **(24)** est donc l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires; elle dépend évidemment de la nature de l'interaction, donc de la forme de la fonction U (r). Nous verrons dans un prochain chapitre que, dans le cas d'une interaction en $\frac{1}{r^2}$ (interaction électrostatique ou gravitationnelle), les trajectoires obtenues sont des coniques (parabole, ellipse ou hyperbole).

Considérons maintenant le cas d'une collision : la particule projectile, à distance suffisamment grande, n'est pratiquement pas soumise à l'interaction U (r), de sorte que sa trajectoire est rectiligne avant et après l'interaction. Considérons la *figure* 27 ; la particule venant de gauche ($\theta_0 = \pi$) avec une vitesse $\vec{v}_0$ subit l'interaction et s'éloigne dans une direction déterminée par l'angle θ_1 ; son énergie cinétique initiale est $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\mu v_0^2$; son moment cinétique est $\mathrm{L} = \mu b v_0$, où b est le *paramètre d'impact*, c'est-à-dire la distance de O à la droite support de $\vec{v}_0$. La particule s'approche jusqu'à une distance minimale $\mathrm{OH} = r_m$ correspondant à un angle θ_m. Si le potentiel d'interaction est à symétrie sphérique, OH est la bissectrice de l'angle $\pi - \theta_m$; l'angle de déviation θ_1 vaut donc

$$\theta_1 = \pi - 2\,(\pi - \theta_m) = 2\,\theta_m - \pi$$

Or θ_m est lié à r_m par la relation **(24)** :

$$\theta_m = \int_{-\infty}^{r_m} \frac{\mathrm{L}}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}\,[\mathrm{E} - \mathrm{U}\,(r)] - \frac{\mathrm{L}^2}{\mu^2 r^2}}}\,dr$$

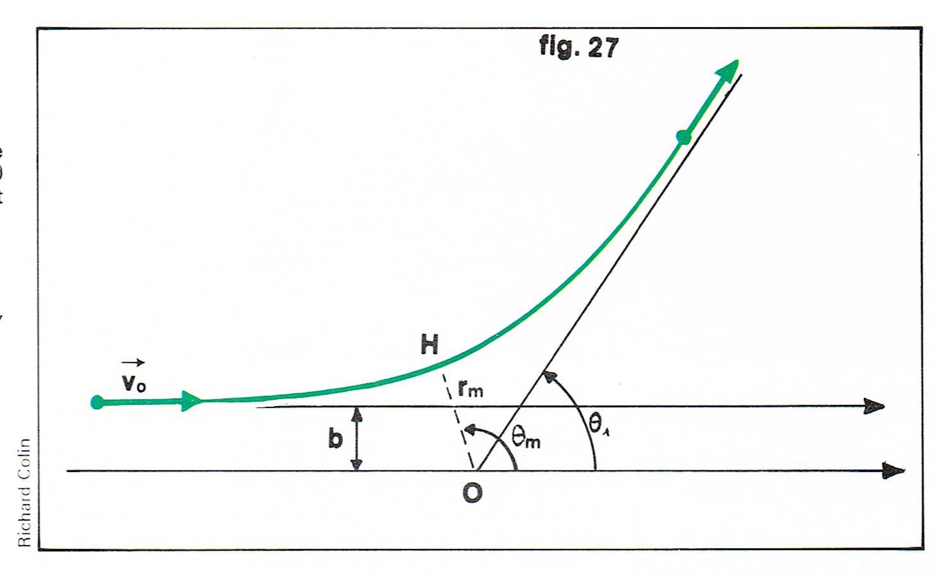
La déviation est donc :

$$\theta_1 = 2 \int_{-\infty}^{r_m} \frac{b v_0\,dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}\left[\frac{1}{2}\mu v_0^2 - \mathrm{U}\,(r)\right] - \frac{b^2 v_0}{r^2}}} - \pi$$

soit encore :

$$\text{(25)} \qquad \theta_1 = 2 \int_{-\infty}^{r_m} \frac{b\,\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{U}\,(r)}{\frac{1}{2}\mu v_0^2} - \frac{b^2}{r^2}}} - \pi$$

Cette relation nous fournit donc l'angle θ_1 de déviation qui nous manquait pour résoudre complètement le problème de la collision de deux particules tel que nous l'avons envisagé au paragraphe *Étude des chocs élastiques*. Il faut noter que nous avions alors fait l'hypothèse que les particules n'entrent en interaction qu'au moment du choc, considéré comme instantané; cela signifie que



▲ Figure 27 : interaction à distance entre deux particules.

fig. 28
z
$\vec{F} = m\vec{g}$
x
Richard Colin

◄ Figure 28 : point matériel en chute libre.

nous ne pourrons appliquer la relation **(25)** au cas des collisions instantanées que si le potentiel d'interaction U (r) est à très courte portée, c'est-à-dire si la durée de l'interaction est très petite à l'échelle macroscopique.

Autres exemples d'applications de la conservation de l'énergie

Champ de pesanteur - Champ électrostatique

Nous avons déjà utilisé l'exemple physique du champ de pesanteur au paragraphe *Loi de conservation de l'énergie*. Un objet de masse m dans le champ de pesanteur terrestre est soumis à une force $\vec{\mathrm{F}} = m\vec{g}$, dirigée vers le bas, où $\vec{g}$ est l'*accélération de la pesanteur* (*fig.* 28) ; $\vec{g}$ varie un peu avec l'altitude et la latitude, mais vaut en moyenne 9,81 m/s². Cette force dérive du potentiel U (z) $= + mgz$, où g est le module du vecteur $\vec{g}$; en effet

$$\mathrm{F}_x = -\frac{d\mathrm{U}}{dx} = 0, \quad \mathrm{F}_y = -\frac{d\mathrm{U}}{dy} = 0, \quad \mathrm{F}_z = -\frac{d\mathrm{U}}{dz} = -mg.$$

La force est donc bien dirigée vers le bas, si l'axe Oz est dirigé vers le haut.

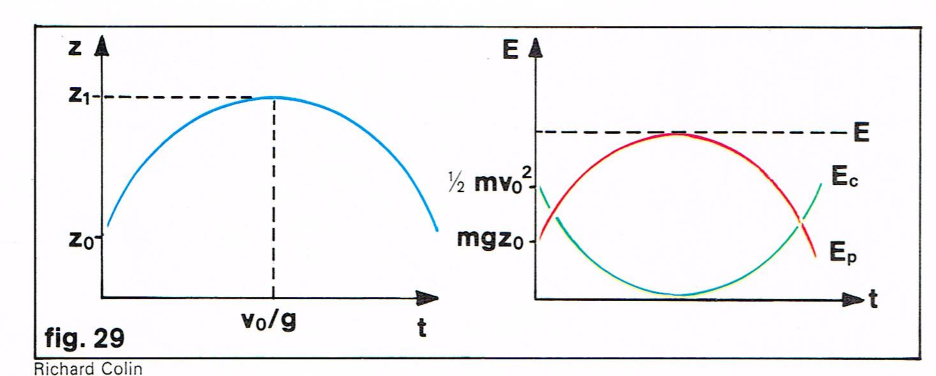
Supposons qu'un objet de masse m soit lancé vers le haut, à partir d'une altitude z_0, à une vitesse v_0. Quelle altitude atteindra-t-il ? Nous devons nous rappeler que son énergie totale doit rester constante. Initialement, son énergie cinétique est $\frac{1}{2}mv_0^2$, et son énergie potentielle est mgz_0 ; son énergie totale est donc :

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0$$

Lorsqu'il atteindra son altitude maximale z_1, sa vitesse sera nulle; son énergie cinétique le sera donc aussi, de sorte que son énergie totale sera égale à son énergie potentielle mgz. Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 = mgz_1$$

◄ Page ci-contre, vue du réacteur à haut flux (Hight Flux Beam Research Flux Beam Research Reactor) du laboratoire de Brookhaven.



Richard Colin

▲ *Figure 29 : évolution de l'altitude, de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle pour un point matériel lancé verticalement dans le champ de pesanteur.*

soit encore $z_1 = z_0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{z}$. Sur la *figure* 29, on voit l'évolution de z, de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle au cours du mouvement.

Tout cela n'est valable que si l'on reste au voisinage de la Terre, dans une région où g est constant. Si tel n'est pas le cas, l'énergie potentielle est une énergie gravitationnelle, qui est donc de la forme :

$$U = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r}$$

où m est la masse de l'objet, M celle de la Terre, r la distance de l'objet au centre de la Terre, et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation ($\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²). Nous avons déjà rencontré la force de gravitation (voir *Référentiels non inertiels particuliers*). Supposons que nous lancions un objet de la surface de la Terre et cherchons quelle vitesse initiale minimale nous devons lui imprimer pour qu'il échappe à l'attraction terrestre, c'est-à-dire pour qu'il puisse atteindre une distance infinie ; la vitesse minimale avec laquelle il atteint cette distance infinie est une vitesse nulle. A l'infini, l'énergie potentielle U (r) est aussi nulle ; l'énergie totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, doit donc être nulle. Or, au départ, cette énergie vaut

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{R}$$

où R est le rayon de la Terre. Le théorème de conservation de l'énergie implique donc :

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{R}$$

La vitesse de libération vaut donc :

$$v_l = \sqrt{2\frac{\mathcal{G}M}{R}} \simeq 11 \text{ km/s}$$

Il faut noter que la vitesse de libération est indépendante de la masse de l'objet.

Si la vitesse initiale v_0 imprimée à l'objet est inférieure à la vitesse de libération, l'objet atteindra une certaine altitude z et retombera ; cette altitude est donnée par l'équation :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{R} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{R+z}$$

soit
$$z = \frac{R}{\frac{2\mathcal{G}M}{v_0^2 R} - 1}$$

On vérifie que z devient infini si $v_0 = v_l$.

Si l'on cherche à libérer un objet de la pesanteur terrestre en le lançant d'une altitude z, on peut très facilement démontrer que la vitesse de libération devient :

$$v_l = \sqrt{2\frac{\mathcal{G}M}{R+z}}$$

Cela signifie que, si le lancer s'effectue d'une altitude $z = 3$ R (soit 18 000 km), la vitesse de libération sera deux fois plus faible que si le lancer s'effectuait à la surface de la Terre ; quant à l'énergie à fournir, c'est-à-dire l'énergie cinétique, elle est quatre fois plus faible, car elle est proportionnelle au carré de la vitesse. C'est la raison pour laquelle, lors des vols lunaires, les vaisseaux spatiaux sont tout d'abord mis sur orbite autour de la Terre, au lieu d'être envoyés directement vers la Lune ; l'économie d'énergie ainsi réalisée est considérable.

Le champ électrostatique obéit aux mêmes équations que le champ de pesanteur. L'énergie potentielle d'une masse m dans le champ d'une masse M est, nous l'avons vu :

$$U(r) = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r}$$

L'énergie potentielle d'une charge électrique q dans le champ d'une charge électrique Q est :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r} = qV(r)$$

où V (r) est le *potentiel électrostatique* créé par la charge Q.

La constante $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ vaut $9 \cdot 10^9$. La différence de signe vient de ce que deux masses (qui sont toujours de même signe) s'attirent, tandis que deux charges de même signe se repoussent.

Supposons qu'un électron, initialement au repos en un point où V = 0, atteigne sous l'effet du champ électrique un point où V = 1 000 volts, et cherchons la vitesse v qu'il a acquise : initialement, son énergie totale est nulle ; lorsqu'il atteint le point où V = 1 000 volts, son énergie totale est :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + eV$$

où m est la masse de l'électron ($m = 10^{-30}$ g) et e sa charge ($e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ coulomb).

La conservation de l'énergie s'écrit :

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + eV$$

soit
$$v = \sqrt{-\frac{2\,eV}{m}} \simeq 6 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

La quantité $e \times V$, énergie potentielle d'un électron dans un potentiel V, est très souvent utilisée ; l'unité d'énergie la plus usuelle en physique atomique et nucléaire est l'*électron-volt* (symbole : eV), qui est l'énergie potentielle d'un électron dans un potentiel de 1 volt (1 V) ; 1 eV vaut donc $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ joule.

Force de rappel linéaire

Considérons un ressort de longueur au repos l_0 ; si nous lui faisons subir une élongation x, il exerce une force de rappel F = — Cx, où C est la constante d'élasticité du ressort. Cherchons à exprimer l'énergie potentielle élastique. Lorsque l'on va d'une élongation x_1 à une élongation x_2, la force de rappel exerce un travail :

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} -Cx dx = -\frac{C}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

Or, par définition, $W_{12} = U(x_1) - U(x_2)$; par conséquent l'énergie potentielle élastique est

$$U(x) = +\frac{C}{2}x^2$$

L'énergie potentielle est proportionnelle à x^2, donc elle est la même, que le ressort soit comprimé ($x < 0$) ou étiré ($x > 0$). Supposons que nous donnions au ressort une élongation $x_0 > 0$ et que nous le lâchions sans vitesse initiale ; nous aurons à tout instant :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Cx^2 = \frac{1}{2}Cx_0^2$$

La vitesse va donc s'accroître tandis que x va diminuer ; la vitesse sera maximale au moment où l'on passera par la position d'équilibre ($x = 0$) :

$$v_{max} = x_0\sqrt{\frac{C}{m}}$$

La vitesse va alors diminuer à nouveau tandis que le ressort se comprimera ; elle s'annulera pour $x = x_0$, puis croîtra à nouveau : on assistera à des oscillations autour de la position d'équilibre. Les phénomènes oscillatoires sont d'ailleurs caractéristiques des systèmes où l'énergie potentielle est proportionnelle au carré d'une variable.

Le champ en r^{-2}

Dans ce chapitre, nous étudierons l'interaction entre deux particules sans dimensions exerçant l'une sur l'autre une force $\vec{F}$ proportionnelle à l'inverse du carré de leur distance r, et portée par la droite joignant les deux particules (*fig.* 30) :

$$\vec{F} = Kr^{-2}\vec{u}$$

Si $K > 0$, l'*interaction est attractive ;* c'est le cas de l'interaction gravitationnelle ou de l'interaction électrostatique entre deux charges de signes contraires.

Si $K < 0$, l'*interaction est répulsive ;* c'est le cas de l'interaction électrostatique entre deux charges de même signe.

L'interaction gravitationnelle ou newtonienne s'exprime, nous l'avons vu, sous la forme

$$\vec{F}_g = \frac{\mathcal{G}\, m_1 m_2}{r^2}\vec{u}$$

où m_1 et m_2 sont les masses des deux particules, et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation. Cette loi est la **loi de Newton.**

L'interaction électrostatique ou coulombienne s'exprime sous la forme

$$\vec{F}_c = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$$

où q_1 et q_2 sont les charges des deux particules, et où ε est la permittivité du milieu. Dans le vide :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9} \text{ u SI (unité du Système international)}$$

Cette loi est la **loi de Coulomb.**

Pour avoir une idée des ordres de grandeur respectifs des forces de Coulomb et de Newton, on peut examiner grossièrement les forces qui entrent en jeu dans l'atome d'hydrogène.

Cet atome est constitué d'un proton et d'un électron. Tous deux portent des charges de signes contraires, mais de même valeur absolue. La charge de l'électron vaut $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ coulomb. La masse de l'électron est environ 2 000 fois plus petite que celle du proton qui vaut à peu près $0{,}16 \cdot 10^{-26}$ kg. Le rapport de la force de gravitation à la force électrostatique est donc de l'ordre de 10^{-40}. La force de gravitation est une force extrêmement faible ; elle ne devient sensible que pour les corps de masse énorme, et parce que la matière dans son ensemble est toujours électriquement neutre.

On peut examiner le problème de l'interaction entre deux corps sous deux aspects : soit en faisant intervenir les forces existant entre ces deux corps à l'aide des expressions données ci-dessus, soit en utilisant l'énergie potentielle du système des deux corps. La seconde approche possède l'avantage de faire intervenir des quantités scalaires et non pas vectorielles. C'est celle que nous allons utiliser.

L'énergie potentielle, d'où dérivent les forces électriques et de gravitation, peut se mettre sous la forme

$$U = \frac{-K}{r} + \text{Cte}$$

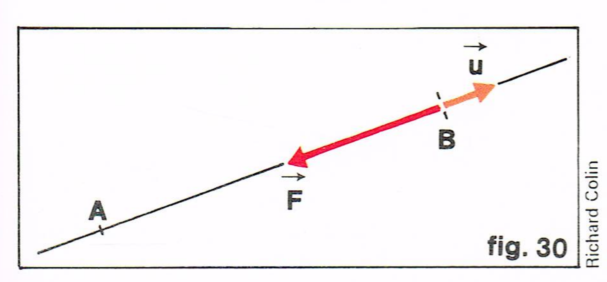
On choisit généralement $U(r) = 0$ pour $r \to \infty$, ce qui revient à annuler la constante d'intégration.

Dans le cas de l'*interaction gravitationnelle :*

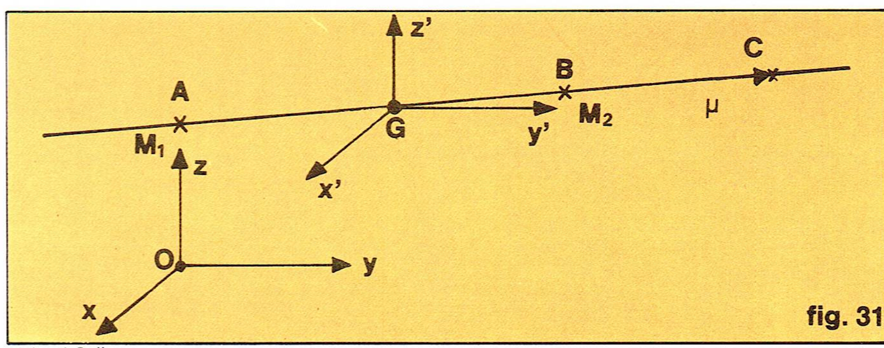
$$U(r) = -\frac{\mathcal{G}\, m_1 m_2}{r}$$

Dans le cas de l'*interaction électrostatique :*

$$U(r) = +\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r}$$



◀ *Figure 30 : interaction entre deux particules* **A** *et* **B.**



Richard Colin

▲ *Figure 31 : interaction entre deux corps et référentiel barycentrique.*

Mouvement de deux particules en interaction newtonienne

Les forces d'interaction en r^{-2} interviennent très souvent dans la nature et il peut sembler *a priori* arbitraire de se restreindre, comme nous l'avons spécifié, au cas de deux particules sans dimensions. Il est évident que l'interaction entre trois ou plusieurs corps se rencontre fréquemment (par exemple un système de plusieurs étoiles en interaction newtonienne), mais le problème de leurs mouvements respectifs devient alors très compliqué.

D'autre part, en appliquant le théorème de Gauss, on peut montrer simplement que le champ gravitationnel créé par une sphère pleine en un point quelconque extérieur à la sphère est le même que celui créé par un point matériel situé au centre de la sphère et ayant la même masse qu'elle. Cela nous permet de nous restreindre au cas de points matériels.

Nous allons maintenant réduire le problème de l'interaction entre deux particules isolées à un problème à un seul corps, en faisant intervenir le repère barycentrique de ces deux particules. Selon le cas envisagé, le barycentre est le centre de gravité ou le centre de charges. Nous allons étudier maintenant plus spécifiquement l'interaction newtonienne, mais les calculs peuvent se transposer au cas des interactions coulombiennes.

Soit donc deux points A et B, de masses respectives M_1 et M_2 (*fig.* 31) ; soit $Oxyz$ le référentiel du laboratoire supposé galiléen, et $Gx'y'z'$ le référentiel barycentrique d'axes parallèles aux axes du laboratoire.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{M_1\overrightarrow{OA} + M_2\overrightarrow{OB}}{M_1 + M_2}$$

On a $$\vec{F}_{AB} = M_1\frac{d^2\overrightarrow{AO}}{dt^2} = \frac{\mathcal{G}M_1M_2}{AB^2}\vec{u}$$

$$\vec{F}_{BA} = M_2\frac{d^2\overrightarrow{BO}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G}M_1M_2}{AB^2}\vec{u}$$

D'où $$\frac{d^2\overrightarrow{AO}}{dt^2} - \frac{d^2\overrightarrow{BO}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{AB}}{dt^2} = \frac{\mathcal{G}M_1M_2}{AB^2}\vec{u}\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)$$

Posons $\mu = \dfrac{M_1M_2}{M_1 + M_2}$: μ est appelée la *masse réduite* du système.

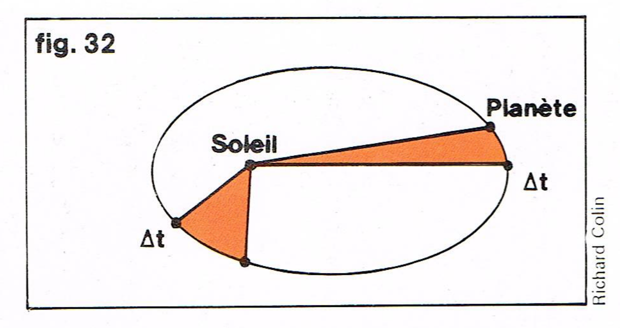
On obtient alors :

$$\mu\frac{d^2\overrightarrow{AB}}{dt^2} = \frac{\mathcal{G}\, M_1M_2}{AB^2}\vec{u}$$

Posons $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB}$. Le problème se réduit alors à l'étude du mouvement du point C de masse μ autour du centre de gravité G et tel que $GC = AB = r$. Par une simple homothétie, on pourra ensuite, connaissant le mouvement du point C, retrouver les mouvements des points A et B. Dans le repère barycentrique, la force agissant sur le point C est une force centrale, c'est-à-dire qu'elle passe par le point fixe G. Il y a donc conservation du moment cinétique. La direction du moment cinétique reste constamment perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{GC} = \vec{r}$ et à la vitesse $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{GC}}{dt}$, donc la trajectoire est plane et peut être représentée dans son plan par des coordonnées polaires (*fig.* 32).

On a $\vec{r} \wedge \mu\vec{v} = C$.

▶ *Figure 32 — loi des aires : la planète se déplace de telle sorte que pendant des intervalles de temps égaux Δt, le rayon vecteur balaye des aires égales.*



Cette équation devient en coordonnées polaires :

(26) $r^2 d\theta = \frac{C}{\mu} dt$; $\frac{C}{\mu}$ est la *constante des aires.*

Cette équation ne contient que des dérivées premières par rapport au temps.

Le système est isolé. L'énergie mécanique E du système se conserve donc :

$$E = E_c + U(r)$$

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + U(r)$$

où E_c est l'énergie cinétique.

En coordonnées polaires, cette équation devient :

(27) $$E = \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + U(r)$$

Cette deuxième équation ne contient, elle aussi, que des dérivées premières par rapport au temps. Les équations **(26)** et **(27)** constituent un système que nous allons résoudre.

$$\begin{cases} r^2\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{C}{\mu} \\ \dfrac{1}{2}\mu\left[\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right] - \dfrac{\mathcal{G}\, M_1M_2}{r} = E \end{cases}$$

Éliminons le temps grâce à la première équation :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

Si on fait le changement de variable $u = \frac{1}{r}$, on obtient :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{C}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{C}{\mu}\frac{du}{d\theta}$$

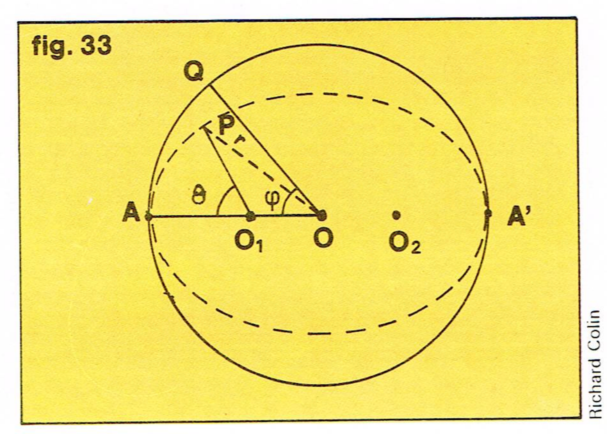
et $$r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{\mu^2 r^2} = \frac{C^2u^2}{\mu^2}$$

Donc $$\frac{C^2}{2\mu}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] - \mathcal{G}M_1M_2u = E;$$

en dérivant par rapport à θ, cela donne

$$0 = \frac{du}{d\theta}\left[-\mathcal{G}\, M_1M_2 + \frac{C^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\right]$$

La *première solution* $\frac{du}{d\theta} = 0$ conduit à des trajectoires circulaires.



▶ *Figure 33 : construction de l'orbite elliptique de foyers O_1 et O_2.*

La *deuxième solution* est celle de l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}\, M_1M_2\mu}{C^2}$$

La *solution générale* de cette équation est

(28) $$\frac{1}{r} = u = \frac{\mathcal{G}\, M_1M_2\mu}{C^2} + \sqrt{\frac{(\mathcal{G}\, M_1M_2\mu)^2}{C^4} + \frac{2\,E}{\mu\, C^2}}\cos(\theta - \theta_0)$$

On peut faire en sorte, par le choix des axes, de prendre $\theta_0 = 0$. La solution **(28)** est donc de la forme générale :

$$r = \frac{p}{1 + C\cos\theta}$$

C'est une *conique* de foyer G, de paramètre

$p = \frac{C^2}{\mathcal{G}M_1M_2\mu}$ fixé par les conditions initiales et d'excentricité :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\,EC^2}{\mu^3\mathcal{G}^2M_1^2M_2^2}}$$

Le genre de la conique s'obtient en comparant e à 1 :

si $e < 1$, donc si $E < 0$, c'est une *ellipse ;*
si $e = 1$, et si $E = 0$, c'est une *parabole ;*
si $e > 1$, et si $E > 0$, c'est une *hyperbole.*

On voit aisément que la condition sur E donne également une condition sur la vitesse initiale. En effet, l'énergie totale E peut s'écrire :

$$E = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - \frac{\mathcal{G}M_1M_2}{r}$$

Suivant qu'un point matériel aura une vitesse initiale inférieure, égale, ou supérieure à la vitesse critique $v' = \sqrt{\frac{2\,\mathcal{G}M_1M_2}{r\mu}}$, il décrira une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

On peut maintenant revenir aux deux corps considérés initialement, A et B. Les trajectoires de A et B sont données par :

$$GA = -\frac{p}{1 + e\cos\theta}\cdot\frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

$$GB = \frac{p}{1 + e\cos\theta}\cdot\frac{M_1}{M_1 + M_2}$$

Orbites elliptiques des planètes

Pour l'étude d'une orbite elliptique, on introduit souvent, au lieu du paramètre p, le demi-grand axe a. On a $p = a(1 - e^2)$, a et e étant les *constantes géométriques* de l'ellipse. Les équations que nous avons vues nous permettent de déterminer la forme et la grandeur de l'orbite elliptique d'une planète mais non sa position dans l'espace. Nous allons maintenant, l'orbite étant connue (a et e données), préciser les coordonnées de la planète en fonction du temps.

Soit l'orbite de foyers O_1 et O_2, de centre O, de périhélie A et d'aphélie A' (*fig.* 33). On trace le cercle de centre O, tangent à l'ellipse en A. L'ellipse s'en déduit en faisant une contraction des ordonnées dans le rapport $\sqrt{1 - e^2}$. Dans la contraction, au point Q du cercle correspond le point P de l'ellipse. L'angle $\widehat{AOQ} = \varphi$ est l'*anomalie excentrique* du point P, l'angle $\widehat{AO_1P} = \theta$ est l'*anomalie vraie.*

Soit T la période et t le temps. On peut démontrer l'équation suivante, appelée *équation de Kepler :*

$$\varphi - e\sin\varphi = \frac{2\pi t}{T}$$

Cette équation transcendante peut être résolue numériquement si l'on connaît t. A partir de φ, on peut déduire l'angle θ et la distance $OP = r$ grâce aux expressions suivantes :

$$r = a - e\cos\varphi$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\varphi - e}{1 - e\cos\varphi}$$



◀ *La comète Ikeya-Seki, photographiée en 1965 (Lick Observatory).*

Mouvement des astres. Lois de Kepler

Mouvement des planètes

Les trois **lois de Kepler** s'énoncent de la façon suivante :

— les centres des planètes décrivent des ellipses relativement au centre du Soleil. Le centre du Soleil occupe l'un des foyers de ces ellipses ;

— les aires balayées par un rayon joignant le centre du Soleil à la planète en des temps égaux sont égales ;

— le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse.

La *première loi* a déjà été démontrée : dans le référentiel barycentrique, le Soleil et la planète effectuent tous deux des trajectoires elliptiques. Or le centre de gravité du système Soleil + planète est très proche du centre du Soleil. Pratiquement, le centre de gravité du système Soleil + planète et le centre du Soleil sont confondus, et la Terre décrit une ellipse autour du Soleil.

La *deuxième loi* découle directement de la conservation du moment cinétique. On a vu que

$$r^2 d\theta = \frac{C}{\mu} dt\,;$$

la quantité $r^2 d\theta$ représente le double de l'aire dA balayée par le vecteur $\overrightarrow{CA} = r$ pendant le temps dt. Donc

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2\mu}$$

$\frac{dA}{dt}$ est appelée *vitesse aréolaire :* elle représente l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OA}$ par unité de temps. On voit que cette vitesse est constante : les aires balayées en des temps égaux sont donc égales.

La *troisième loi* se déduit aisément de la deuxième et de la première. La vitesse aréolaire est constante :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2\mu}$$

Elle vaut de plus : $\frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T}$

où a et b sont respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'orbite, et où T est la période. πab est la surface de l'ellipse, d'où $T = \frac{2\pi ab\mu}{C}$.

En remplaçant C par sa valeur, on obtient

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G} M_S}{4\pi^2} \text{ (où } M_S \text{ est la masse du Soleil)}$$

à condition de se placer dans le cas où la masse de la planète est petite devant celle du Soleil.

Les satellites des planètes obéissent aux mêmes lois de Kepler, l'un des foyers de la trajectoire étant occupé par la planète centrale. Ils présentent un grand intérêt en mécanique céleste. En effet, la simple observation astronomique de leur orbite permet de calculer la masse de la planète.

Mouvement des comètes

Les comètes décrivent par rapport au Soleil des trajectoires elliptiques, paraboliques, ou faiblement hyperboliques. Les comètes dont la trajectoire est elliptique sont dites périodiques, le Soleil occupant l'un des foyers de l'ellipse. La plus connue des comètes périodiques est celle de Halley dont la période est de 76 ans. Elle est signalée pour la première fois en 467 avant J.-C., et est passée à son périhélie en l'an 1066 (elle est représentée sur la tapisserie de Bayeux) ; elle doit revenir en 1986.

Satellites artificiels

● *Vitesse de libération*

Un satellite lancé de la Terre n'a une trajectoire elliptique que dans le cas où sa vitesse est inférieure à une vitesse limitée v_0, dite *vitesse de libération* et telle que :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}(M_1 + M_2)}{r_0}} = \sqrt{2 r_0 g_0}$$

r_0 étant le rayon de la Terre, et g_0 l'intensité de la pesanteur au sol.

Si la vitesse du satellite est supérieure ou égale à v_0, la trajectoire est parabolique, et le satellite échappe à l'attraction terrestre.

A la surface de la Terre, $v_0 = 11$ km/s.

A la surface de la Lune, $v_0 = 2{,}4$ km/s.

● *Énergie nécessaire pour mettre un satellite sur orbite*

On l'obtient facilement en faisant la différence de l'énergie mécanique totale du satellite sur orbite et de l'énergie mécanique du satellite sur la Terre.

Supposons la trajectoire circulaire. Lorsque le satellite subit des frottements, l'énergie mécanique totale E dimi-

▶ **Isaac Newton** ***concevant sa célèbre théorie. Dessin de Gotlib (extrait de*** **la Rubrique-à-brac, 1970, Dargaud éditeur*).***

nue. Appelons r le rayon de la trajectoire, et M_T et M_S respectivement la masse de la Terre et celle du satellite. L'énergie mécanique totale est reliée à r par l'expression $E = -\frac{\mathcal{G}M_TM_S}{2r}$. Donc, à une diminution de l'énergie mécanique totale correspond une diminution du rayon de la trajectoire.

La vitesse du satellite augmente corrélativement puisque la vitesse varie avec la racine carrée de l'inverse du rayon. On constate donc que le freinage du satellite a pour effet d'augmenter sa vitesse, c'est-à-dire d'augmenter son énergie cinétique, et de diminuer le rayon de l'orbite, c'est-à-dire de diminuer son énergie potentielle. Le bilan énergétique total correspond naturellement à une perte d'énergie mécanique.

● *Satellite géostationnaire*

Ces satellites sont utilisés dans les télécommunications. Leur trajectoire est circulaire et leur période vaut évidemment 24 heures, ce qui permet de calculer l'altitude h qui vaut 35 770 km.

Interaction répulsive

Nous avons vu en introduction que l'interaction pouvait être répulsive. Cela peut s'observer dans le cas de l'interaction coulombienne entre deux particules chargées de signes opposés.

Une particule de masse m, de charge q, lancée à la vitesse $\vec{v_0}$ le long d'une droite passant à la distance b d'une cible O de charge Q, de signe opposé à q, et au repos, est déviée lorsqu'elle arrive au voisinage de la charge Q. Sa trajectoire est une hyperbole (*cf. fig.* 27), et l'angle de déviation θ, qui est l'angle formé par les deux asymptotes de l'hyperbole, est donné par :

$$\text{cotg}\,\frac{\theta}{2} = \frac{4\,\pi\varepsilon_0 m v_0^2 b}{qQ}$$

Cette formule est appelée **formule de Rutherford** et est utilisée notamment en physique nucléaire.

Le champ de pesanteur terrestre

Identité de la masse gravitationnelle et de la masse inerte

Si l'on évalue la masse d'un corps en mesurant l'accélération γ que produit sur le corps une force connue F, la masse $M_i = \frac{F}{\gamma}$ est appelée *masse d'inertie*.

On peut également évaluer la masse d'un corps en mesurant l'attraction gravitationnelle F qu'exerce sur lui un autre corps, la Terre par exemple : la masse M_g ainsi définie vaut : $M_g = \frac{Fr^2}{M_T\mathcal{G}}$ où $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation, M_T la masse de la Terre et r la distance du corps au centre de la Terre. Cette masse M_g est la *masse gravitationnelle*.

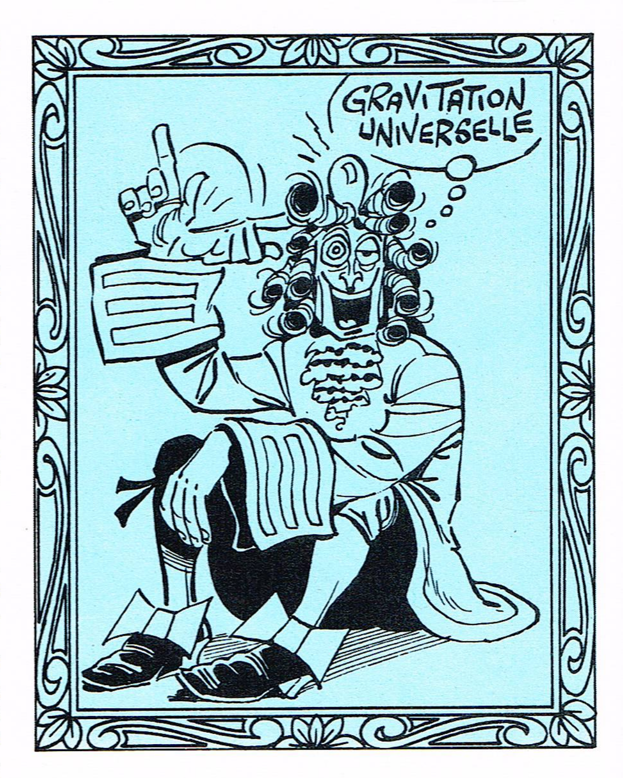
Expérimentalement, on trouve toujours, à la précision des mesures près, que masse d'inertie et masse gravitationnelle sont proportionnelles quel que soit le lieu et pour tous les corps. En prenant une valeur convenable pour $\mathcal{G}$, on rend le facteur de proportionnalité égal à 1. Il y a donc identité entre masse inerte et masse gravitationnelle. Cette identité a été vérifiée expérimentalement, à l'aide d'une balance de torsion, par Newton, puis par Eötvös, avec une précision de 10^{-8}.

Il est même possible expérimentalement de montrer l'équivalence entre la masse inerte et la masse gravitationnelle du photon.

A un photon d'énergie $h\nu$, on peut attribuer une masse inerte $m_i = \frac{h\nu}{c^2}$ (sa masse au repos est, bien sûr, nulle). Si le photon « tombe » dans un champ gravitationnel, il prend une petite quantité d'énergie

$$\Delta\,(h\nu) = m_g g L$$

où L est la longueur de chute, g l'intensité du champ de gravitation et m_g la masse gravitationnelle du photon. On doit donc observer un léger déplacement de fréquence vers l'extrémité haute fréquence du spectre, déplacement qui, s'il y a identité entre masse inerte et masse gravitationnelle, est donné par :



$$\Delta\nu = \frac{\nu g L}{c^2}$$

Ceci a été effectivement observé par Pound et Rebka en 1960, en utilisant une source de rayons gamma. D'une façon analogue, un photon, dans la partie bleue du spectre visible qui quitte une étoile, perd une partie de son énergie, et sa fréquence sera déplacée du côté rouge du spectre. Cet effet est appelé déplacement gravitationnel vers le rouge ; il sera d'autant plus accentué que le rapport de la masse de l'étoile à son rayon est plus grand, et donc particulièrement important dans le cas d'une naine blanche. Il ne faut pas confondre ce déplacement vers le rouge avec celui que l'on peut observer dans le spectre lumineux émis par des galaxies lointaines. On pense que celles-ci s'éloignent de la Terre à très grande vitesse, et que le déplacement vers le rouge est dû à l'effet Doppler-Fizeau, analogue optique de l'effet Doppler acoustique.

L'ensemble des résultats expérimentaux suggère donc l'identité des masses inertes et gravitationnelles. C'est à partir de cette constatation qu'Einstein a construit la théorie de la relativité généralisée.

Champ de pesanteur terrestre

L'attraction que la Terre exerce sur un corps de masse m est donnée par

$$F = \frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2}$$

On voit que l'intensité de la force $\vec{F}$ est proportionnelle à la masse m, par l'intermédiaire d'un coefficient $g = \frac{\mathcal{G}M_T}{r^2}$ appelé *intensité* ou *accélération de la pesanteur*.

A la surface de la Terre, l'intensité de la pesanteur est à peu près égale à 9,80 m/s² ; elle varie légèrement suivant le lieu où l'on se trouve sur la Terre, et suivant l'altitude.

Variation de g avec l'altitude

Soit un corps de masse m à l'altitude h. A cette altitude, l'intensité de la pesanteur sera

$$g = \frac{\mathcal{G}M_T}{(R+h)^2} \text{ où R est le rayon de la Terre.}$$

Déplaçons le corps de masse m sur la verticale de façon à le placer sur la surface terrestre. Alors l'intensité de la pesanteur est

$$g_0 = \frac{\mathcal{G}M_T}{R^2} \qquad \text{donc} \qquad g = \frac{g_0}{(1 + h/R)^2}$$

L'intensité de la pesanteur diminue lorsque l'altitude augmente. Cette expression peut, pour des altitudes faibles, se mettre sous la forme $g = g_0 (1 - 2h/R)$. La démonstration n'est valable que s'il n'existe pas, à une altitude supérieure au niveau de la mer, de masse susceptible d'attirer une masse m. Nous avons donc implicitement supposé qu'il n'y avait pas de relief à la surface de la Terre. On peut tenir compte des masses attirantes situées au-dessus du niveau de la mer, ce qui introduit des termes correctifs dans le calcul de g.

Si maintenant, en tenant compte de la distance au centre de la Terre et de la répartition des masses attirantes au-dessus du niveau de la mer, on fait, en chaque lieu, la carte des intensités de la pesanteur rapportées au niveau de la mer, on doit retrouver, pour une même latitude, la même valeur de g_0. Ce n'est pas le cas, et il semble que les masses attirantes situées au-dessus du niveau de la mer exercent une attraction moins importante que le calcul ne le suggère.

On admet à présent qu'il y a répartition isostatique des masses au-dessus d'une surface située à 120 km environ sous le niveau de la Terre : au-dessus de cette surface des colonnes verticales de même section contiennent la même quantité de matière. En quelque sorte, la croûte terrestre, constituée de matières relativement légères, puisque la densité moyenne est de 2,7, flotte sur un magma plus dense en obéissant aux lois de l'hydrostatique. Il en résulte une nouvelle correction sur les valeurs de g rapportées au niveau de la mer. On voit alors qu'à la même latitude, g a la même valeur, abstraction faite toutefois de certaines anomalies locales. Ces anomalies locales correspondent à des anomalies dans la répartition de masses à l'intérieur de l'écorce terrestre ; il s'agit par exemple des gisements métalliques ou des couches poreuses susceptibles de contenir des hydrocarbures. On conçoit donc que l'étude de ces anomalies locales soit utilisée comme méthode de prospection.

Variation de g avec la latitude

Il apparaît expérimentalement que l'intensité de la pesanteur augmente régulièrement avec la latitude. La valeur de g rapportée au niveau de la mer passe de 9,78 m/s² à l'équateur à 9,83 m/s² au pôle. Cet effet est dû à la rotation de la Terre.

Supposons que la Terre soit une sphère parfaite, et plaçons-nous dans un référentiel lié à la Terre (donc suivant son mouvement de rotation sur elle-même). Soit un corps immobile à la surface de la Terre. Le poids du corps est la résultante des forces qui lui sont appliquées. Il y a la force gravitationnelle créée par la Terre, qui est la plus importante et qui est la seule considérée en première approximation. Mais il y a également les forces d'inertie d'entraînement dues au mouvement de la Terre par rapport à un repère galiléen. Il n'y a pas de forces de Coriolis puisque le corps est en équilibre dans le repère fixé à la Terre.

Définissons la direction du poids par rapport au rayon terrestre passant par le corps M de masse m (*fig.* 34). L'axe Oz est pris suivant le rayon terrestre, Mx est pris perpendiculaire à Oz dans le plan défini par le rayon OM et le diamètre pôle Nord-pôle Sud, My est le troisième axe.

La *force de gravitation* s'écrit suivant les trois axes :

$$F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad F_z = -\frac{\mathcal{G} M_T m}{R^2}$$

La *force d'inertie* d'entraînement s'écrit :

$$F_{ex} = m\omega^2 R \sin\theta \cos\theta$$
$$F_{ey} = 0$$
$$F_{ez} = m\omega^2 R \cos^2\theta$$

La résultante des deux forces, qui est donc le poids $\vec{P}$, n'est pas colinéaire à la force gravitationnelle $\vec{F}$ mais forme avec elle un petit angle α tel que

$$\operatorname{tg} \alpha \simeq \frac{\omega^2 R^3 \sin\theta \cos\theta}{g M_T}$$

La direction du vecteur $\vec{g}$ n'est donc pas rigoureusement celle du rayon terrestre. En ce qui concerne son intensité, il est aisé de calculer la valeur de g :

$$g \simeq -\omega^2 R \cos^2\lambda + \frac{\mathcal{G} M_T}{R^2}$$

En particulier, au pôle, g vaut : $g_p = \dfrac{\mathcal{G} M_T}{R^2}$

et à l'équateur : $g_E = \dfrac{\mathcal{G} M_T}{R^2} - \omega^2 R$

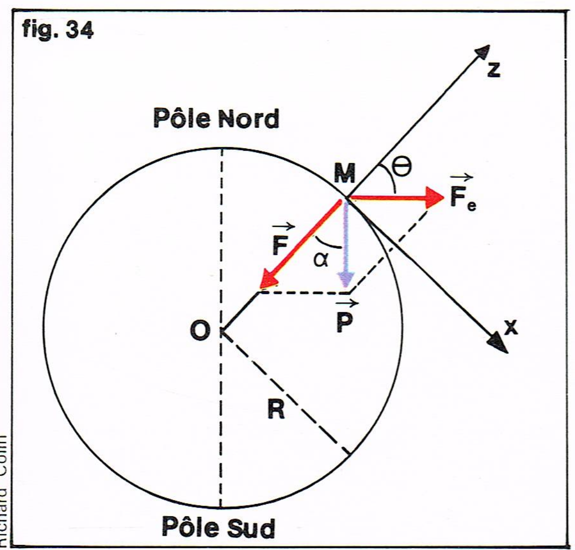
On trouve une différence qui vaut 0,035 m/s². Or, expérimentalement, $g_p - g_E = 0{,}05$ m/s². Le calcul que nous avons fait est encore approché. Il convient, si l'on désire interpréter la variation de g avec la latitude, de tenir compte de l'aplatissement de la Terre, aplatissement qui est dû à l'existence des forces d'inertie d'entraînement. Les effets, sur la valeur de la constante g, de l'aplatissement de la Terre et des forces d'inertie d'entraînement ne peuvent être séparés. Grâce à la variation de g avec la latitude, que l'on connaît expérimentalement, on peut obtenir la forme moyenne de la Terre, appelée *géoïde*. Ce géoïde coïncide pratiquement avec un *ellipsoïde de révolution* aplati aux pôles et d'excentricité 1/297.

Marées

Dans le paragraphe précédent, nous avons négligé deux forces que nous allons maintenant envisager : la résultante $\vec{F'}$ des forces d'attraction exercées par les autres astres (essentiellement le Soleil et la Lune), et la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de la Terre autour du Soleil : $\vec{F'_e}$. La *résultante* de toutes les forces appliquées au point M de masse m est :

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F_e} + \vec{F'} + \vec{F'_e} = m\vec{g} + \vec{F'} - m\vec{\gamma}.$$

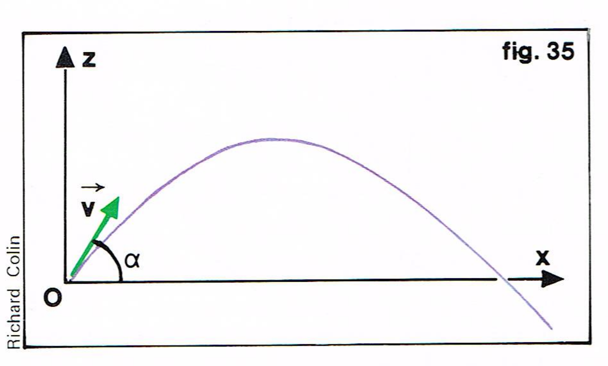
$m\vec{g}$ est un terme ne dépendant que de la Terre, $\vec{\gamma}$ est l'accélération du centre de gravité de la Terre, $m\vec{\gamma}$ est





▼ A gauche, figure 34 : le champ de pesanteur terrestre résulte de la composition du champ de gravitation et de la force centrifuge due à la rotation de la Terre. A droite, une marée basse dans le Cotentin.

▶ *Figure 35 : trajectoire parabolique d'un projectile dans le champ de pesanteur, en négligeant la résistance de l'air. Page ci-contre, à gauche, figure 36 ; trajectoire d'un projectile dans l'air : la portée est considérablement diminuée.*



pratiquement l'attraction gravitationnelle que les autres astres exercent au centre de gravité de la Terre.

Le terme $\vec{F}' - m\vec{\gamma}$ représente donc la variation de champ gravitationnel entre le centre et la surface de la Terre. Si l'attraction gravitationnelle est celle de la Lune, elle vaut à peu près $\frac{g}{9} \cdot 10^{-6}$; si l'attraction est due au Soleil, sa valeur est de $\frac{g}{19} \cdot 10^{-6}$. Les deux variations sont très faibles devant g et ne peuvent pas être mises en évidence lors de mesures de l'intensité de g. Cependant, lorsque l'action s'effectue sur des masses considérables comme celles des mers, la contribution du terme $\vec{F}' - m\vec{\gamma}$ devient très importante :

si $\vec{g}$ et $(\vec{F}' - m\vec{\gamma})$ ont même direction, l'action des astres ne modifie que l'intensité totale de la pesanteur ;

si $\vec{g}$ et $(\vec{F}' - m\vec{\gamma})$ ont des directions différentes, la surface de la mer ne reste pas perpendiculaire à $\vec{g}$ mais se modifie de façon à être perpendiculaire à la résultante $\vec{R}$.

C'est le phénomène des *marées*, qui est d'autant plus important que la masse d'eau est plus forte. Les marées sont très faibles dans les mers fermées. Elles peuvent atteindre une dizaine de mètres d'amplitude suivant la forme de la côte et du plateau continental (par exemple 12,6 m au Mont-Saint-Michel).

Il est à remarquer que la variation de direction de $\vec{g}$ peut être à la fois calculée et mesurée en laboratoire. On constate que cette variation n'est pas aussi grande que prévue. En effet, l'écorce terrestre n'est pas rigide et subit également l'action du Soleil et de la Lune : ce sont les marées de l'écorce terrestre. Le sol, par rapport auquel les expériences sont réalisées, n'est pas fixe dans le repère lié à la Terre où l'on s'est initialement placé.

Chute des corps

Étudions le mouvement d'un corps de masse m dans le champ terrestre. Si l'espace considéré n'est pas trop grand, on peut considérer le champ terrestre comme uniforme. Négligeons pour le moment la résistance de l'air, ainsi que la force de Coriolis.

Mouvement vertical

Dans un repère lié à la Terre, l'équation de mouvement du centre de gravité de l'objet est :

$$z = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + z_0$$

Si la vitesse initiale est nulle, on peut choisir convenablement l'origine de façon que $z = \frac{1}{2} gt^2$.

Le mouvement dans le vide est indépendant de la masse du corps.

Trajectoire d'un projectile

Soit un projectile lancé en O, origine d'un repère Oxyz, avec une vitesse $\vec{v}$ dans le plan Oxz et faisant l'angle α avec l'axe Ox (*fig.* 35). Donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0 ; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g$$

Par deux intégrations successives, on obtient (g, accélération de la pesanteur, est négatif dans le repère choisi) :

$$\begin{cases} z = + \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t \sin \alpha \\ x = v_0 t \cos \alpha \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire est :

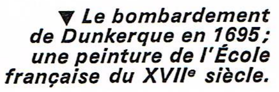
$$z = \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha$$

La trajectoire est *parabolique*.

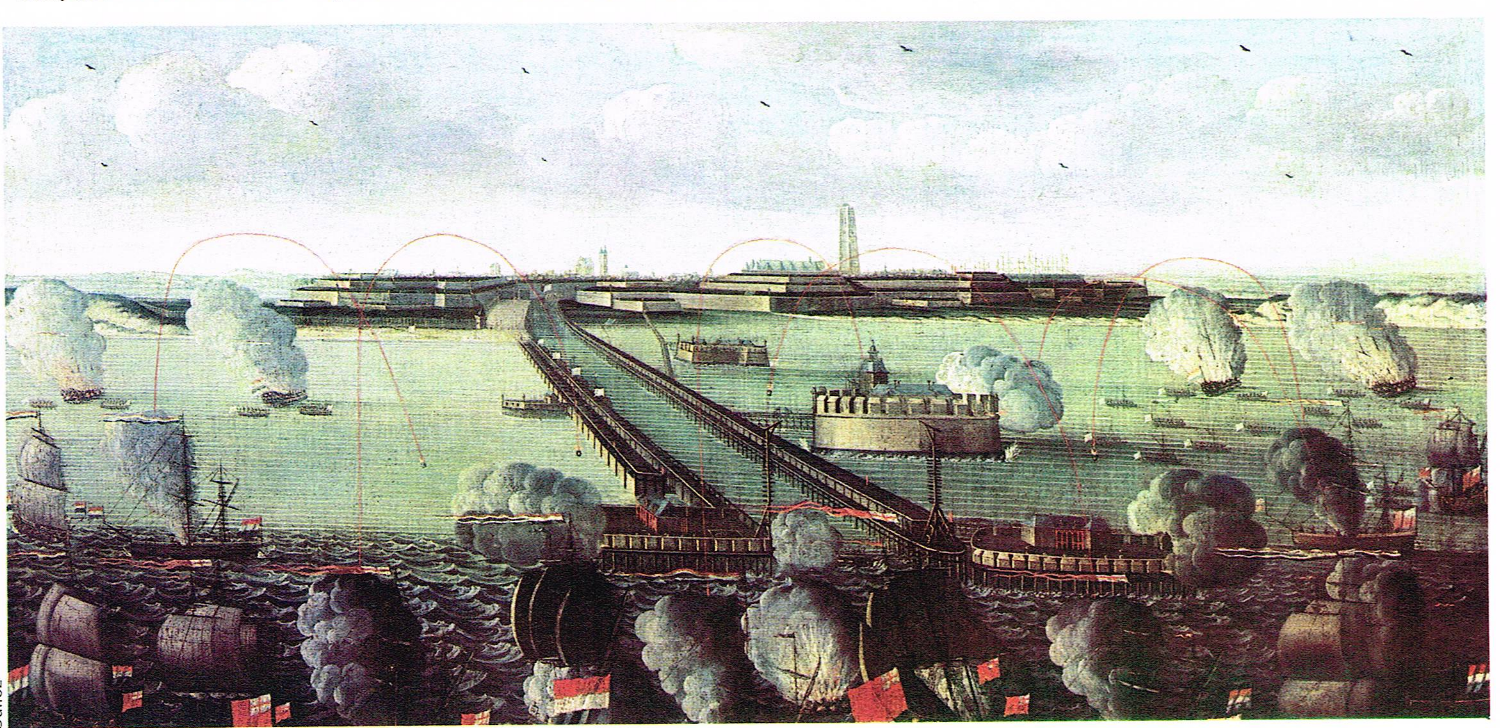
On peut calculer l'ensemble des points que le projectile lancé à la vitesse $\vec{v}$ peut atteindre lorsque l'angle α varie. Cet ensemble est situé à l'intérieur d'une parabole appelée *parabole de sûreté*.

Résistance de l'air

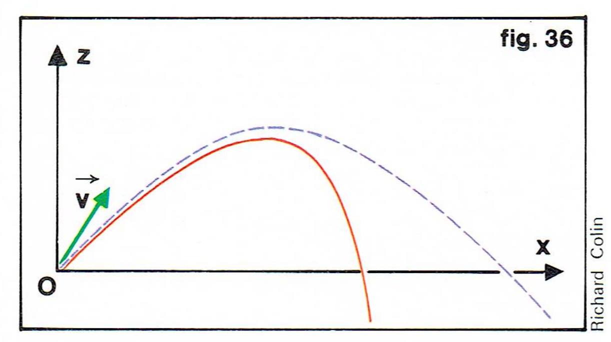
Nous avons négligé la résistance de l'air dans les expressions précédentes. On peut tenir compte de ce facteur en introduisant dans les équations du mouvement un terme de frottement dépendant de la vitesse. La forme de la trajectoire est alors très différente, et la portée peut se trouver considérablement diminuée (*fig.* 36).

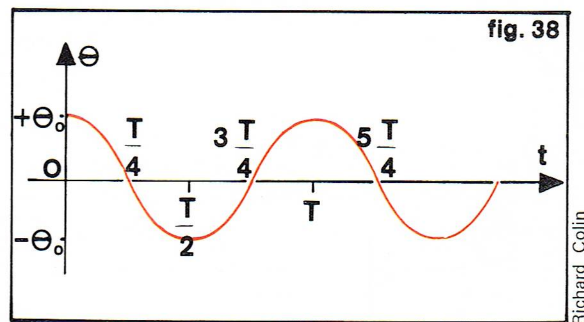


▼ *Le bombardement de Dunkerque en 1695 ; une peinture de l'École française du XVII[e] siècle.*



Bulloz





◀ ***A droite, figure 38 ; variation en fonction du temps de l'angle du pendule avec la verticale : mouvement sinusoïdal.***

Les oscillateurs

Nous abordons maintenant un sujet très important par ses applications dans tous les domaines de la physique ; en effet, bien des phénomènes que nous allons décrire ont des analogues extrêmement fidèles dans les domaines de l'électricité, de l'acoustique, de la physique moléculaire, etc. Les lois que nous allons établir sont donc extrêmement générales et aisément transposables.

La raison pour laquelle ces lois sont très générales est la suivante : les phénomènes d'oscillation apparaissent chaque fois que la réponse d'un système à une sollicitation est proportionnelle à celle-ci et en sens opposé, c'est-à-dire chaque fois que les phénomènes sont linéaires. Or c'est presque toujours le cas en physique lorsque la sollicitation n'éloigne pas trop le système de son état d'équilibre : par exemple, lorsqu'on tire sur un ressort suffisamment peu pour que celui-ci ne se déforme pas irréversiblement.

Exemple élémentaire d'oscillateur : le pendule simple

Considérons le pendule simple représenté sur la *figure* 37 ; c'est une masse ponctuelle m suspendue à un point fixe P par un fil de masse négligeable, de longueur l. En gardant le fil tendu, nous faisons dévier la masse m d'un angle θ par rapport à la verticale : la masse s'élève donc d'une quantité :

$$h = l - l \cos \theta = l\,(1 - \cos \theta)$$

Rappelons-nous que nous devons rester près de la position d'équilibre pour que le système reste linéaire : l'angle θ doit être petit, de sorte que $\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et par conséquent : $h \simeq \frac{1}{2} l\theta^2$.

Écrivons la loi de conservation de l'énergie : la masse m s'étant élevée de h, son *énergie potentielle* a varié de la quantité :

$$U = mgh = \frac{1}{2} mgl\theta^2$$

Si nous lâchons le pendule sans vitesse initiale à partir d'une position θ_0, il acquiert une vitesse v : $v = l\frac{d\theta}{dt}$.

Son *énergie cinétique* est donc :

$$E_c = \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

L'*énergie totale* est donc :

$$E = \frac{1}{2} mgl\theta^2 + \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

L'énergie totale restant constante, elle est égale à l'énergie initiale :

$$\frac{1}{2} mgl\theta_0^2 = \frac{1}{2} mgl\theta^2 + \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Écrivons maintenant la conservation du moment cinétique : la force extérieure appliquée est le poids, dirigé verticalement vers le bas, donc le moment appliqué est :

$$M = lmg \sin \theta$$

soit encore :

$$M \simeq lmg\theta \text{ puisque } \theta \text{ est petit.}$$

Le moment cinétique, lui, vaut :

$$\vec{J} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

soit : $J = - ml^2 \frac{d\theta}{dt}$

Écrivons le théorème du moment cinétique :

$$M = \frac{dJ}{dt}$$

soit ici : $lmg\theta = - ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$

ou encore $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$

Cette dernière équation est l'*équation du mouvement* ; c'est une équation différentielle linéaire du second ordre dont on vérifie facilement que la solution est :

$$\theta = \theta_0 \cos (\omega t + \varphi)$$

où ω, appelé *pulsation du mouvement*, vaut : $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

ω est lié à la fréquence f par la relation : $\omega = 2\pi f$

et à la période T par la relation : $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

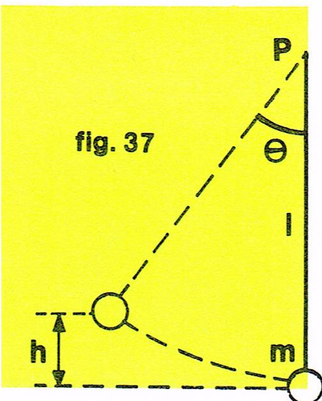
L'angle de phase, φ, dépend des conditions initiales ; on voit par exemple que si $\theta = \theta_0$ à l'instant $t = 0$, on a $\varphi = 0$.

Vérifions qu'une telle solution sinusoïdale, dont l'allure est indiquée sur la *figure* 38, satisfait bien à la loi de conservation de l'énergie :

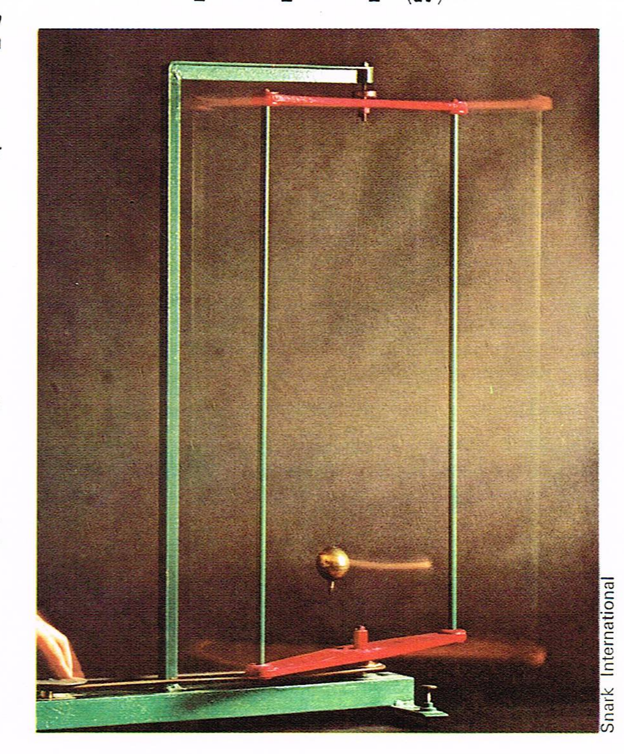
$$\frac{1}{2} mgl\theta_0^2 = \frac{1}{2} mgl\theta^2 + \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Divisons les deux membres par ml :

$$\frac{1}{2} g\theta_0^2 = \frac{1}{2} g\theta^2 + \frac{1}{2} l \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

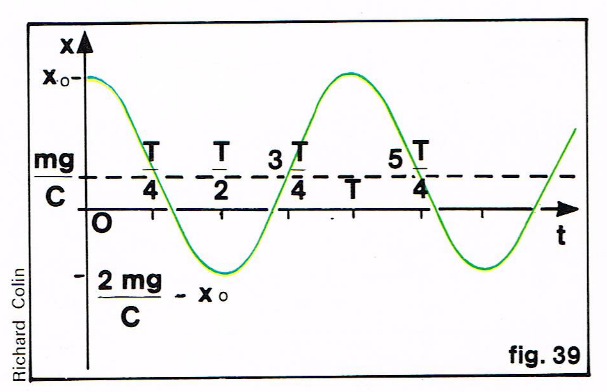


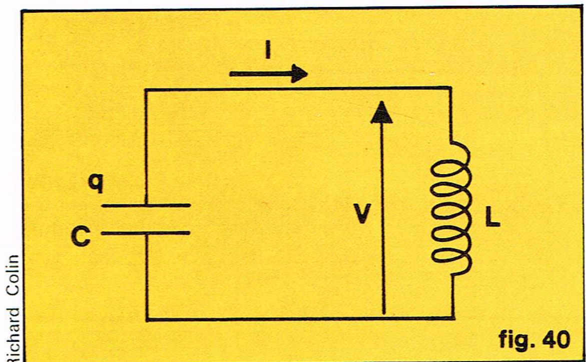
▲ ***Figure 37 : représentation graphique du pendule simple.***



◀ ***On réserve généralement le nom de pendule à un solide pouvant tourner autour d'un axe horizontal et soumis uniquement à la pesanteur.***

▶ *A gauche, figure 39 : élongation d'un ressort en fonction du temps : c'est un mouvement sinusoïdal autour de la valeur mg/C, qui est l'élongation de l'équilibre. A droite, figure 40 : un circuit électrique oscillant est constitué d'une inductance* L *et d'une capacité* C.





Remplaçons θ par sa valeur $\theta_0 \cos \omega t$:

on a alors $\frac{d\theta}{dt} = -\omega\theta_0 \sin \omega t$, et par conséquent :

$$\frac{1}{2} g\theta_0^2 = \frac{1}{2} g\theta_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} l\omega^2\theta_0^2 \sin^2 \omega t$$

Le premier membre est indépendant du temps ; le second membre doit l'être aussi, ce qui exige que $g = \omega^2 l$.

On retrouve donc bien la relation $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Nous trouvons sur cet exemple les caractéristiques d'un *mouvement oscillatoire* : énergie potentielle proportionnelle au carré de l'écart par rapport à l'équilibre, et équation du mouvement du type :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0,$$

dont les solutions sont de la forme :

$$y = A \cos (\omega t + \varphi)$$

Ce mouvement est périodique et se reproduit donc indéfiniment semblable à lui-même. Ceci n'est manifestement pas plausible physiquement, car chacun sait que, à cause de divers frottements, un pendule finit toujours par cesser d'osciller.

Système masse-ressort-Oscillateur amorti

Système masse-ressort

Considérons maintenant le système constitué par un ressort de constante de rappel C auquel est accrochée une masse *m*. A l'équilibre, le ressort a une longueur l_0; étirons-le d'une quantité *x*. La masse *m* est soumise à deux forces : la force de pesanteur *mg*, dirigée vers le bas, et la force de rappel — C*x*; la force totale agissant sur le point matériel *m* est donc : $F = mg - Cx$.

Appliquons la loi fondamentale de la dynamique :

$$mg - Cx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

soit **(29)** $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C}{m} x = g$$

Cette équation différentielle est différente de la précédente en ce sens que le second membre de l'équation n'est pas nul. On sait que, dans un tel cas, la solution est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre (c'est-à-dire l'équation que l'on aurait si *g* était nul) et d'une solution particulière de l'équation complète. Cette dernière solution est évidente : on voit que $x = \frac{m}{C} g$ satisfait à l'équation complète. Quant à l'équation sans second membre, nous avons vu que sa solution est de la forme :

$$x = A \cos (\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$$

La solution de l'équation **(29)** est donc :

$$x(t) = A \cos (\omega t + \varphi) + \frac{m}{C} g$$

et la vitesse est donnée par :

$$v(t) = -A\omega \sin (\omega t + \varphi)$$

Supposons que l'on ait lâché la masse *m* sans vitesse initiale, d'une position $x = x_0$; nous pouvons donc écrire les deux conditions :

$$x(0) = x_0 = A \cos \varphi + \frac{m}{C} g$$

$$v(0) = 0 = -A\omega \sin \varphi$$

La dernière condition exige $\varphi = 0$, car A est nécessairement différent de zéro (sinon, il n'y aurait pas de mouvement). La première condition s'écrit donc :

$$x_0 = A + \frac{m}{C} g, \quad \text{ou} \quad A = x_0 - \frac{m}{C} g$$

Par conséquent, la loi du mouvement peut s'écrire :

(30) $$x(t) = \left(x_0 - \frac{m}{C} g\right) \cos \omega t + \frac{m}{C} g$$

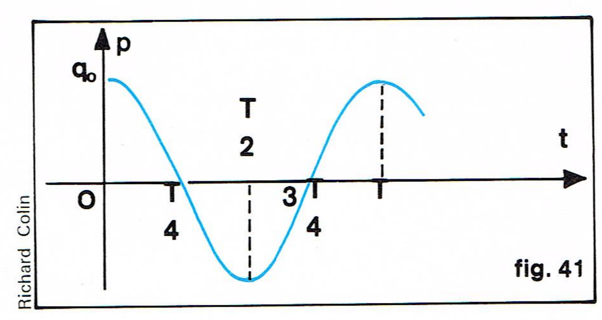
La *figure* 39 représente l'élongation *x* (*t*) en fonction du temps. La différence entre la courbe *x* (*t*) et la courbe précédente θ (*t*) réside dans le fait que, pour $x = \frac{T}{4}$, l'élongation ne s'annule pas puisqu'elle vaut $\frac{mg}{C}$: elle est égale à l'élongation qu'aurait le ressort à l'équilibre, en l'absence de mouvement. Si l'on excepte cette différence, ces deux courbes sont très analogues : dans les deux cas, la force est proportionnelle à l'écart par rapport à la position d'équilibre (c'est-à-dire à θ ou à *x*) ; dans les deux cas, l'énergie potentielle comprend un terme proportionnel au carré de l'écart par rapport à la position d'équilibre.

Ces conditions sont très générales et sont caractéristiques des *oscillateurs harmoniques sans frottement ;* sur la *figure* 40 est représenté un circuit électrique comprenant une inductance L et une capacité C : c'est aussi un oscillateur harmonique. En effet, à l'équilibre, la charge *q* portée par le condensateur est nulle ; supposons que l'on fasse apparaître une charge *q* sur les armatures : cela entraînera l'apparition d'un courant $q = \frac{dI}{dt}$, donc d'une différence de potentiel (électrique) :

$$V = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2},$$

équation qui est analogue à $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$.

De plus, V est lié à *q* par $V = \frac{q}{C}$, qui est très semblable à la relation $F = Cx$ dans le cas du ressort. Nous voyons que le potentiel électrique V joue le rôle de la force, et



▶ *Figure 41 : variation, en fonction du temps, de la charge q du condensateur.*

la charge q celui de l'élongation : le système constitue un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La *figure* 41 montre la variation de q en fonction du temps en supposant $q = q_0$ et $I = 0$ à l'instant initial. Dans tous ces exemples, nous avons supposé qu'il n'y a aucun frottement susceptible de gêner l'oscillation. Ce n'est jamais le cas : dans le circuit LC, par exemple, les fils ont certainement une résistance dans laquelle se dissipe de l'énergie par effet Joule.

Oscillateur harmonique à frottement solide

Supposons, comme indiqué sur la *figure* 42, que l'on ait un ressort auquel est accrochée une masse qui repose sur un plan horizontal. La force exercée par le ressort est horizontale, le poids est vertical, mais compensé par la réaction du plan ; il n'intervient donc pas dans l'équation du mouvement, qui est simplement notre équation :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Cx = 0,$$

si l'on considère qu'il n'y a pas de frottement.

Si, au contraire, on suppose que, par suite du frottement, il s'exerce sur la masse m une force de frottement F constante, qui s'oppose en permanence au mouvement, quel que soit son sens, l'équation devient :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Cx = \lambda F$$

où $\lambda = 1$ si $\frac{dx}{dt} < 0$ et $\lambda = -1$ si $\frac{dx}{dt} > 0$

Comme dans les cas précédents, nous supposons que nous soumettons le ressort à une élongation x_0, et que nous lâchons la masse m sans vitesse initiale. Deux cas sont possibles : si le module de la force de rappel $|Cx_0|$ est inférieur au module de la force de frottement $|F|$, le solide restera immobile ; si, au contraire, la force de frottement est inférieure à la force de rappel, le solide aura tendance à revenir vers sa position d'équilibre.

Supposons que nous soyons dans ce deuxième cas :

$$|Cx_0| > |F|$$

soit encore $x_0 > \frac{F}{C}$

ou $x_0 < -\frac{F}{C}$

Reprenons notre équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C}{m}x = \frac{\lambda}{m}F$$

Comme l'équation **(29)**, cette équation a un second membre et a donc une solution de la forme :

$$\textbf{(31)} \qquad x = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{\lambda}{C}F$$

avec ici $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$, $\varphi = 0$ et $A = x_0 - \frac{\lambda}{C}F$

La différence entre cette expression de $x\,(t)$ et celle qui est donnée par la relation **(30)** réside dans le fait que A dépend de $\frac{dx}{dt}$ puisque λ en dépend. Si l'on a initialement allongé le ressort, x_0 est positif ; la masse m va avoir tendance à revenir vers sa position d'équilibre, donc sa vitesse est négative : $\frac{dx}{dt} < 0$

et par conséquent $\lambda = 1$.

Exprimons $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = -\left(x_0 - \frac{\lambda}{C}F\right)\omega\sin\omega t$$

Dans la phase initiale du mouvement, nous avons vu que $\lambda = 1$:

$$\frac{dx}{dt} = -\left(x_0 - \frac{F}{C}\right)\omega\sin\omega t$$

La vitesse s'annulera pour la première fois lorsque ωt vaudra π, soit $t = \frac{T}{2}$. La position de la masse sera alors, d'après **(31)** :

$$x = -x_0 + \frac{2F}{C}$$

Deux cas se présenteront alors :

— Si $\left|-x_0 + \frac{2F}{C}\right| < \frac{F}{C}$, le module de la force de rappel du ressort $\left|C\left(-x_0 + \frac{2F}{C}\right)\right|$ sera inférieur au module F de la force de frottement : le mouvement s'arrêtera là. Cela se produira si $\frac{F}{C} < x_0 < \frac{3F}{C}$.

On remarque en particulier que, si

$$\frac{F}{C} < x_0 < \frac{2F}{C}$$

la position à laquelle le mouvement s'arrêtera sera positive, donc le mobile ne reviendra même pas jusqu'à sa position d'équilibre en l'absence de frottement ($x = 0$) ; si, au contraire, $\frac{2F}{C} < x_0 < \frac{3F}{C}$, le solide atteindra une élongation négative et s'arrêtera.

— Si $\left|-x_0 + \frac{2F}{C}\right| > \frac{F}{C}$, le module de la force de rappel sera supérieur au module de la force de frottement, donc le mobile reprendra son mouvement en sens inverse.

Dans ce dernier cas, la force de frottement deviendra négative ($\lambda = -1$), et l'équation du mouvement deviendra :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C}{m}x = -\frac{F}{m}$$

Cette équation, comme l'équation **(31)**, admet une solution du type :

$$x = A'\cos(\omega t + \varphi) - \frac{F}{C}$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$. La différence réside dans la nouvelle condition initiale : nous prenons comme nouvelle origine du temps l'instant où la vitesse du solide s'est annulée ; à cet instant, l'élongation valait $x = -x_0 + \frac{2F}{C}$,

donc la nouvelle loi de mouvement est :

$$x = \left(-x_0 + \frac{3F}{C}\right)\cos\omega t - F$$

donc $\frac{dx}{dt} = \left(x_0 - \frac{3F}{C}\right)\omega\sin\omega t.$

La vitesse s'annule donc à nouveau au point :

$$x = x_0 - \frac{4F}{C}$$

Une discussion analogue à la précédente montre que :

— si $\frac{3F}{C} < x_0 < \frac{5F}{C}$, le mobile s'arrête ;

— si $x_0 > \frac{5F}{C}$, le mobile repart en sens inverse.

fig. 42

Richard Colin

◀ ***Figure 42 ; exemple d'oscillateur harmonique amorti : le corps de masse m repose sur un plan horizontal qui exerce sur lui des forces de frottement.***

▶ *Page ci-contre, en haut à gauche, figure 44; élongation du ressort en fonction du temps, en présence d'un frottement visqueux : régime pseudo-périodique.*

Dans ce dernier cas, l'annulation suivante de la vitesse se produit pour $x = -x_0 + \frac{6\,F}{C}$; si le mobile repart à nouveau, il s'arrêtera pour $x = x_0 - \frac{8\,F}{C}$, et ainsi de suite.

La *figure* 43 montre la loi du mouvement $x\,(t)$ pour divers cas possibles. On constate que les maximums successifs sont sur une droite de pente $-\frac{4\,F}{TC}$ et les minimums successifs sur une droite de pente $+\frac{4\,F}{TC}$. On peut ainsi mesurer F. Le fait que les maximums et les minimums soient alignés est caractéristique des frottements solides.

Oscillateurs harmoniques à frottement visqueux

Nous allons maintenant étudier le cas d'un oscillateur qui subit un frottement de la part d'un liquide ou d'un gaz. L'expérience montre que, dans un tel cas, la force de frottement F est proportionnelle à la vitesse du mobile et de sens opposé à celle-ci : $F = -k\,\frac{dx}{dt}$.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit maintenant :

$$-Cx - k\,\frac{dx}{dt} = m\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

(32) soit $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{C}{m}x = 0$$

Les solutions de cette équation dépendent des solutions de l'équation :

(33) $$\alpha^2 + \frac{k}{m}\alpha + \frac{C}{m} = 0$$

- *Le discriminant de l'équation* **(33)** *est négatif.*

$$\Delta = \left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4\,C}{m} < 0$$

soit $$\left|\frac{k}{m}\right| < \sqrt{\frac{4\,C}{m}}$$

L'équation admet deux solutions complexes :

$$\alpha_1 = -\frac{k}{2\,m} + j\sqrt{\frac{C}{m} - \left(\frac{k}{2\,m}\right)^2}$$

$$\alpha_2 = -\frac{k}{2\,m} - j\sqrt{\frac{C}{m} - \left(\frac{k}{2\,m}\right)^2}$$

Si l'on pose :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{k}{2\,m} \quad \text{et} \quad \omega = \sqrt{\left(\frac{k}{2\,m}\right)^2 - \frac{C}{m}}$$

la loi du mouvement est du type :

$$x = Ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t + \varphi),$$

A et ω étant déterminés par les conditions initiales. τ est appelée *constante de temps* ou *constante de relaxation* du système.

La vitesse a pour expression :

$$\frac{dx}{dt} = A\left[-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \varphi) - e^{-t/\tau}\,\omega\,\sin(\omega t + \varphi)\right]$$

soit

$$\frac{dx}{dt} = -Ae^{-t/\tau}\left[\frac{1}{\tau}\cos(\omega t + \varphi) + \omega\sin(\omega t + \varphi)\right]$$

Supposons que le mobile soit lâché sans vitesse initiale avec une élongation x_0; cela s'exprime par :

$$x_0 = A\cos\varphi$$

$$0 = \frac{1}{\tau}\cos\varphi + \omega\sin\varphi$$

De la seconde équation, on tire : $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\omega\tau}$

Comme $\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}$, il en résulte :

$$A = x_0\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}}$$

Cherchons les autres instants t_0 où la vitesse s'annule, c'est-à-dire les maximums et les minimums de x; d'après la relation **(33)**, ils correspondent à :

$$\operatorname{tg}(\omega t_0 + \varphi) = -\frac{1}{\omega\tau} = \operatorname{tg}\varphi$$

soit $\omega t_0 + \varphi = \varphi + n\pi$ ou encore $t_0 = n\frac{\pi}{\omega} = n\frac{T}{2}$

où n est un nombre entier; la vitesse s'annule donc au bout de chaque demi-période (T est parfois aussi appelée *pseudo-période*).

Considérons maintenant les instants t_1 tels que :

$$\cos(\omega t_1 + \varphi) = 1$$

on a alors : $x\,(t_1) = Ae^{-\frac{t_1}{\tau}}$

Comme $\sin(\omega t_1 + \varphi) = 0$, il en résulte que, pour $t = t_1$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{A}{\tau}e^{-\frac{t_1}{\tau}}$$

Nous voyons donc que, en ces points $t = t_1$, la fonction $x\,(t)$ a la même valeur et la même dérivée que la fonction $y\,(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$: les courbes représentatives de ces deux fonctions sont tangentes.

Considérons maintenant deux instants t et $t + T$, séparés par une période; la fonction $\cos(\omega t + \varphi)$ a la même valeur en ces deux instants, de sorte que :

$$\frac{x\,(t + T)}{x\,(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+T)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda T}$$

La quantité λ est appelée le *décrément logarithmique.*

La *figure* 44 représente la variation de l'élongation en fonction du temps. Une telle variation est caractéristique de ce que l'on appelle un *régime pseudo-périodique.*

- *Le discriminant de l'équation* **(33)** *est nul.*

On a donc une racine double réelle :

$$\alpha = -\frac{k}{2\,m}$$

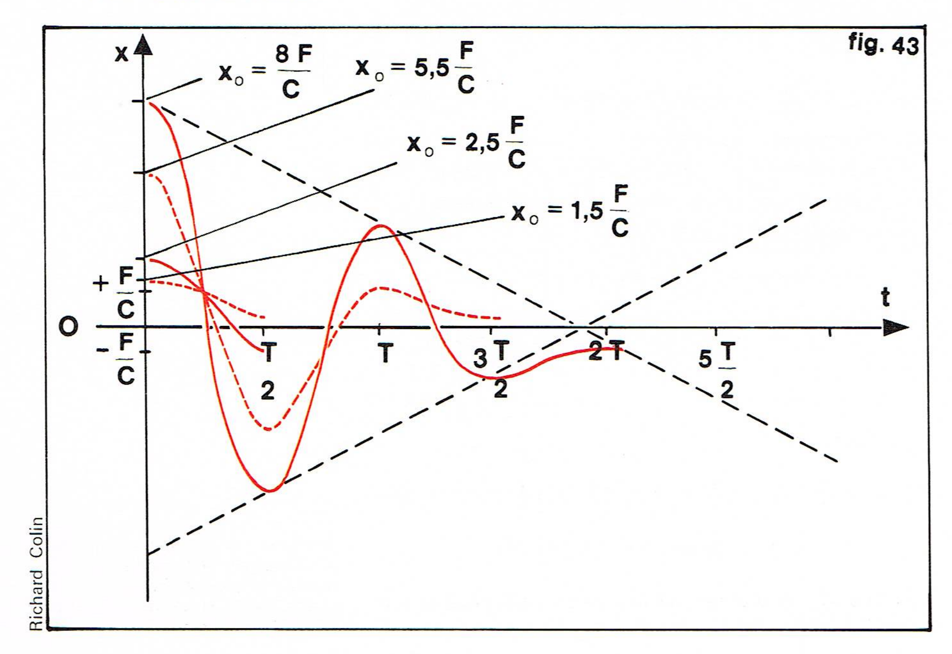
La solution de l'équation différentielle est alors :

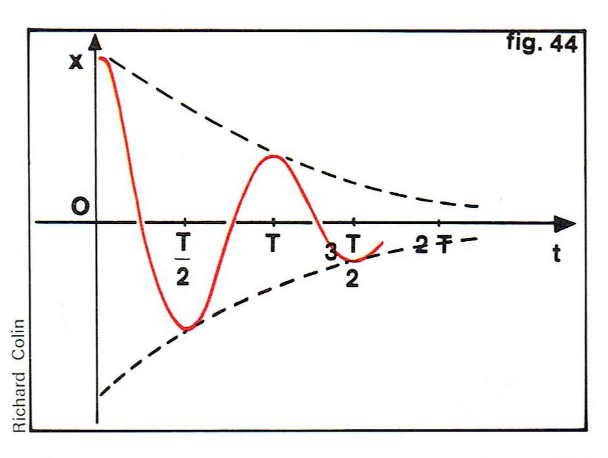
$$x = (At + B)\,e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{où } \tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{2\,m}{k} = \sqrt{\frac{m}{C}}$$

A et B sont déterminés par les conditions initiales : si $x = x_0$ et $\frac{dx}{dt} = 0$, à $t = 0$ on a :

$$x = x_0\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

▼ *Figure 43 : élongation du ressort en fonction du temps, en présence d'un frottement solide.*





Cette fois, il n'y a pas d'oscillations : le mobile revient directement à sa position d'équilibre ; sa vitesse est maximale pour : $t = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{m}{C}} = \frac{T_0}{2\pi}$ où T_0 est la période des oscillations qu'aurait le système en l'absence de frottement. La *figure* 45 montre l'évolution de x en fonction de t. Un tel *régime* est dit *critique*.

- *Le discriminant de l'équation* **(33)** *est positif.*

L'équation admet deux racines réelles négatives :

$$\alpha_1 = -\frac{k}{2m} + \sqrt{\left(\frac{k}{2m}\right)^2 - \frac{C}{m}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{k}{2m} - \sqrt{\left(\frac{k}{2m}\right)^2 - \frac{C}{m}}$$

L'élongation a alors la forme :

$$x = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

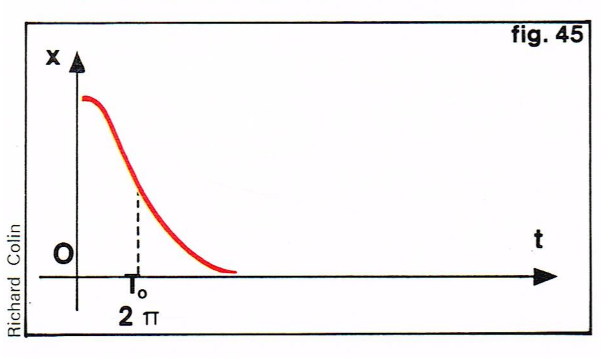
avec $\tau_1 = -\frac{1}{\alpha_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{\alpha_2}$

Si, pour $t = 0$, on a $x = x_0$ et $\frac{dx}{dt} = 0$, il vient :

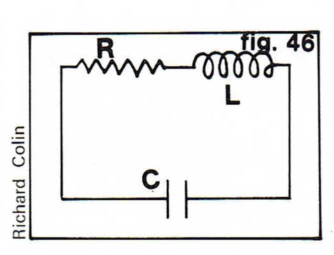
$$x = x_0 \left[\frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{1 - \frac{\tau_2}{\tau_1}} + \frac{e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}}\right]$$

Le mobile revient vers sa position d'équilibre d'autant plus vite que ses temps de relaxation sont courts. Un tel régime est dit *régime apériodique*.

Les trois sortes d'équations que nous venons de voir (régime pseudo-périodique, régime critique et régime apériodique) sont caractéristiques des oscillations avec frottement visqueux et sont extrêmement générales. Elles interviennent évidemment en mécanique : les amortisseurs de voiture, par exemple, ont précisément pour rôle d'éviter que les ressorts de la suspension ne fassent subir aux passagers des oscillations pseudo-périodiques désagréables. Elles interviennent aussi en électricité : nous avons vu au paragraphe consacré au *Système masse-ressort* que, dans un circuit comportant une inductance et une capacité (circuit LC), la tension aux bornes du condensateur joue le rôle de la force et la charge du condensateur celui de l'élongation x. Si nous ajoutons maintenant, en série avec l'inductance et la capacité, une résistance R (*fig.* 46), il apparaît aux bornes du condensateur une tension supplémentaire $R_I = R \frac{dq}{dt}$; cette tension joue le rôle de force de frottement proportionnelle à $\frac{dq}{dt}$, qui est analogue à la vitesse. Les équations donnant q en fonction de t sont donc exactement les mêmes que celles donnant x en fonction de t.



◀ **Figure 45 ; élongation du ressort en fonction du temps, en présence d'un frottement visqueux : régime critique.**



▲ ***Figure 46 : un circuit électrique oscillant amorti comprend une inductance* L, *une capacité* C *et une résistance* R.**

Oscillations forcées - Résonance

Les phénomènes que nous allons étudier maintenant sont d'une importance fondamentale dans tous les domaines de la physique : mécanique, électricité, optique, électronique, physique quantique, physique nucléaire, physique du solide, etc. Ils se résument essentiellement dans le fait que, lorsque l'on soumet un système à une force alternative de fréquence ω et que le système présente une fréquence propre ω_0, il se passe des phénomènes très particuliers si ω est égal à ω_0 ou en est voisin.

Oscillations forcées

Reprenons l'équation **(32)** décrivant le mouvement d'un système oscillant avec un amortissement visqueux. Nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

où ω_0 est la pulsation propre du système en l'absence de frottement, et où τ est le temps de relaxation du système.

Nous allons maintenant supposer que, au lieu de laisser le système évoluer de lui-même, on lui applique une force :

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

L'équation du mouvement devient alors :

(34) $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Comme nous l'avons déjà indiqué au paragraphe *Système masse-ressort*, la solution générale est la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation sans second membre. Or, les solutions de cette dernière, ainsi que nous l'avons vu au paragraphe précédent, décroissent dans le temps et sont pratiquement nulles dès que t est très supérieur au temps de relaxation ; seule la solution particulière de l'équation complète subsistera.

Montrons qu'une solution de cette équation complète est de la forme :

$$x = A \cos (\omega t + \varphi)$$

On a en effet $\frac{dx}{dt} = - A\omega \sin (\omega t + \varphi)$

et $$\frac{d^2x}{dt^2} = - A\omega^2 \cos (\omega t + \varphi)$$

En reportant ces valeurs dans l'équation **(34)**, nous obtenons :

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos (\omega t + \varphi) - A\frac{\omega}{\tau} \sin (\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Or, nous savons que :

$$\cos (\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi$$

et $$\sin (\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - A\frac{\omega}{\tau} \sin \varphi\right] \cos \omega t$$
$$- \left[(\omega_0^2 - \omega^2) A \sin \varphi + A\frac{\omega}{\tau} \cos \varphi\right] \sin \omega t$$
$$= \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Il en résulte que :

$$A\left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - \frac{\omega}{\tau} \sin \varphi\right] = \frac{F_0}{m}$$

et $$(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + \frac{\omega}{\tau} \cos \varphi = 0$$

pour que les coefficients de $\cos \omega t$ soient égaux et que celui de $\sin \omega t$ soit nul.

▶ *Figure 47 : variation de l'amplitude de la réponse d'un système oscillant en fonction de la fréquence : il y a résonance au voisinage de la fréquence de vibration propre du système.*

Il résulte de cette deuxième condition que :

$$\text{tg}\,\varphi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Par conséquent $\cos\varphi = \dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}$

et $\sin\varphi = \dfrac{-\omega/\tau}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}$

Ces deux dernières expressions nous permettent de calculer la valeur de l'amplitude A du mouvement :

$$A = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi - \dfrac{\omega}{\tau}\sin\varphi} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}$$

Nous voyons qu'il existe une très grande différence entre les oscillations propres d'un système que l'on laisse revenir à son état d'équilibre (oscillations de relaxation) et les oscillations forcées de ce même système : d'une part, les oscillations forcées se font à la fréquence ω de l'excitation et non à la fréquence propre ω_0 ; d'autre part, les grandeurs A et φ, amplitude et phase du mouvement des oscillations forcées, ne dépendent pas des conditions initiales, mais dépendent de la fréquence d'excitation. En particulier, φ a maintenant une signification bien précise ; en effet, nous avons pris l'excitation sous la forme :

$$F = F_0 \cos \omega t$$

et la réponse sous la forme :

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

De façon précise, φ est donc le *déphasage* (c'est-à-dire le retard ou l'avance), entre l'excitation F et la réponse x.

Résonance

Nous allons maintenant regarder comment varient, en fonction de la pulsation ω, l'amplitude A de la réponse et le déphasage φ entre l'excitation et la réponse.

Nous supposons tout d'abord que le système est peu amorti, c'est-à-dire que $T_0 \ll \tau$: si le système était laissé à lui-même, il ferait beaucoup d'oscillations avant d'être amorti. Cela peut aussi s'écrire : $\omega_0\tau \gg 1$.

Dans cette hypothèse, supposons tout d'abord que nous excitons le système à une fréquence faible devant sa fréquence de résonance : $\omega \ll \omega_0$; nous voyons alors que

$$A \simeq \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{C}$$

et que $\cos\varphi \simeq 1$ et $\sin\varphi \simeq 0$, donc $\varphi \simeq 0$.

Seule intervient la constante de rappel du ressort, et non la masse ; d'autre part, la réponse est en phase avec l'excitation. Ces deux faits montrent que, aux basses fréquences, la réponse suit parfaitement l'excitation et que l'inertie (donc la masse) ne joue aucun rôle.

Supposons maintenant que l'excitation soit à une fréquence très élevée par rapport à la fréquence propre du système ; on a alors :

$$A \simeq \frac{F_0}{m\omega^2}$$

$$\cos\varphi \simeq -1, \quad \text{et} \quad \sin\varphi \simeq 0,$$

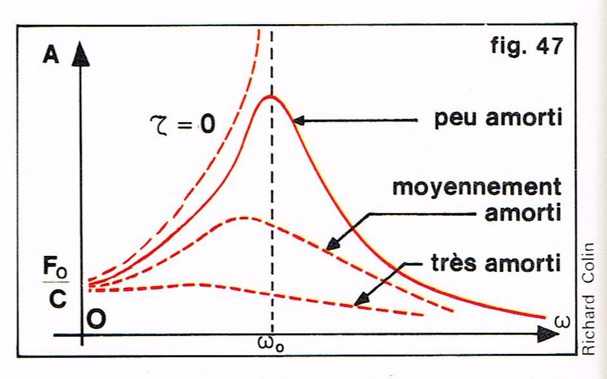
donc $\varphi \simeq \pi$.

Cette fois seule la masse intervient dans l'expression de A, et non la raideur du ressort ; d'autre part, la réponse est en retard d'une demi-période sur l'excitation : l'inertie de l'objet se fait fortement sentir à ces fréquences élevées, et le système a du mal à suivre l'excitation.

Plaçons-nous maintenant au voisinage de la fréquence propre : $\omega = \omega_0$; l'amplitude vaut alors :

$$A = \frac{F_0\tau}{m\omega_0}$$

Si l'amortissement est très faible, donc si τ est très grand, A devient très grand également : à la résonance, c'est l'amortissement qui détermine la réponse du système ; il est courant que la réponse à la résonance soit 10^3 à 10^4 fois plus forte que la réponse à basse fréquence. Il est à noter cependant que le maximum ne se produit pas pour $\omega = \omega_0$, mais pour une pulsation ω telle que : $\omega^2 = \omega_0^2 - \dfrac{1}{2\tau^2}$.



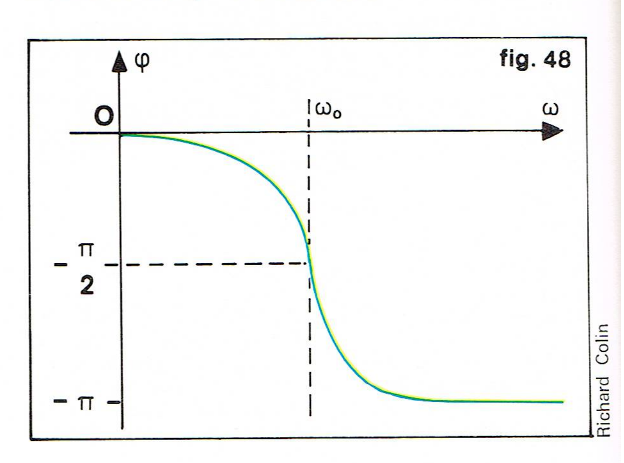
Plus l'oscillateur sera amorti, plus le décalage entre ω et ω_0 sera accentué, et plus A sera faible.

Toujours pour $\omega = \omega_0$, on voit que $\cos\varphi \simeq 0$ et $\sin\varphi \simeq -1$, de sorte que $\varphi \simeq -\dfrac{\pi}{2}$: la réponse est en *quadrature retard* par rapport à l'excitation, c'est-à-dire qu'elle est en retard d'un quart de période. Cela signifie qu'elle est nulle lorsque l'élongation est maximale, et qu'elle est maximale lorsque l'élongation est nulle, ce qui fait que le système, qui aurait tendance à s'immobiliser à sa position d'équilibre, est relancé à chaque demi-période au bon moment.

Les *figures* 47 et 48 montrent l'allure de la variation de A et φ en fonction de la fréquence : l'amplitude présente un maximum, plus ou moins pointu, au voisinage de $\omega - \omega_0$, tandis que la phase varie rapidement de $-\pi$ à 0. Pour une force excitatrice F_0 donnée, on peut donc avoir une réponse très faible si l'on est loin de la résonance, ou une réponse extrêmement forte pour ω voisin de ω_0. Cette propriété est extrêmement importante, tant par les avantages qu'elle peut présenter que par les inconvénients qu'elle peut avoir.

Par exemple, il est très important, dans toutes les machines tournantes, que la fréquence de rotation soit très différente de la fréquence propre du système mécanique : si tel n'était pas le cas, le phénomène de résonance produirait des vibrations de grande amplitude pouvant entraîner la destruction de la machine. C'est pour une raison analogue qu'il est interdit aux troupes de soldats de franchir un pont suspendu en marchant au pas : de graves accidents se sont produits parce que la fréquence du pas des soldats était voisine de la fréquence propre de vibration du pont.

Dans le domaine de l'électronique, le phénomène de résonance dans un circuit comprenant une inductance et une capacité est très utilisé. Par exemple, une antenne de poste de radio capte les ondes électromagnétiques d'un grand nombre d'émetteurs, donc de nombreuses fréquences différentes. Le signal provenant de l'antenne sert de signal d'excitation à un circuit oscillant. Lorsque la fréquence propre du circuit oscillant est identique à celle d'un poste émetteur, il en résulte une réponse très importante au voisinage de cette fréquence, tandis que toutes les émissions effectuées à d'autres fréquences ne donnent que des réponses très faibles : on sélectionne ainsi l'émetteur de son choix. Pour capter un autre émetteur, il suffit de changer la fréquence du circuit oscillant du



▶ *Figure 48 : variation du déphasage entre l'excitation et la réponse, en fonction de la fréquence.*

poste de radio ; comme cette fréquence est $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ il suffit de faire varier la valeur de L ou de C ; en pratique, c'est toujours la capacité que l'on fait varier : le bouton de sélection des stations est relié à un condensateur de capacité variable. Il est clair qu'un récepteur sera d'autant plus sélectif que son pic de résonance sera aigu.

Dans le domaine de la physique du solide, la résonance magnétique joue un rôle extrêmement important comme outil d'étude des propriétés des solides : nous avons vu que, si une particule possède un moment magnétique et qu'elle est soumise à un champ magnétique B, son moment cinétique est soumis à un phénomène de précession, c'est-à-dire qu'il tourne autour de la direction du champ magnétique à une fréquence propre $\omega_0 = \gamma B$ (voir *Particule possédant un moment magnétique, soumise à un champ magnétique*).

Si l'on soumet cette particule à un champ magnétique alternatif perpendiculaire à B et de fréquence ω_0, il se produit un phénomène de résonance qui se traduit par une absorption de puissance électromagnétique. La première application est évidemment la détermination du rapport gyromagnétique γ.

Puissance absorbée - Coefficient de qualité

La force appliquée F produit un travail $dW = F dx$.

La puissance est donc $P = \frac{dW}{dt} = F\frac{dx}{dt}$

or, F et v varient de façon cyclique avec une pulsation ω, donc la puissance moyenne au cours d'une période est :

$$\langle F \cdot v \rangle = -\frac{\frac{\omega F_0^2}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \langle \cos \omega t \sin (\omega t + \varphi) \rangle$$

or

$$\langle \cos \omega t \sin (\omega t + \varphi) \rangle =$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos \omega t \sin (\omega t + \varphi)\, dt = \frac{1}{2} \sin \varphi$$

Par conséquent

$$\langle P \rangle = -\frac{\frac{\omega F_0^2}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \frac{1}{2} \frac{-\frac{\omega}{\tau}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}$$

soit $$\langle P \rangle = \frac{F_0^2 \omega^2}{2 \tau m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2\right]}$$

Ce résultat est extrêmement général. L'allure de la puissance absorbée en fonction de ω est indiquée sur la *figure* 49. Pour $\omega = \omega_0$, la puissance absorbée est :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2 \tau}{m}$$

Lorsque $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2$, la puissance est la moitié de la puissance maximale ; les fréquences correspondantes sont séparées par un intervalle :

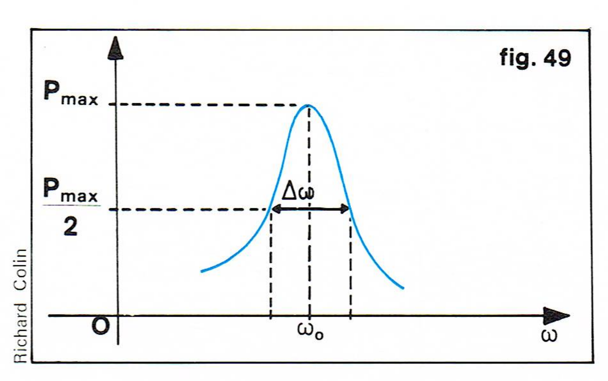
$$2\,\Delta\omega \simeq \frac{1}{\tau}$$

Le pic d'absorption est donc d'autant plus étroit que l'amortissement est faible. On caractérise généralement la qualité de la résonance par la quantité :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \simeq \omega_0 \tau$$

Q est appelé *coefficient de qualité* du système résonnant (en électronique, on l'appelle aussi *coefficient de surtension*) ; il est proportionnel au rapport de l'énergie emmagasinée à la perte d'énergie par période. Un ordre de grandeur typique du coefficient de qualité en électronique est 100 à 1 000. Une cavité résonnante en hyperfréquence peut avoir un coefficient de qualité de 10^4.

La forme de la courbe de la *figure* 49, appelée *courbe lorentzienne*, est très caractéristique des phénomènes de résonance. Par exemple, on peut assimiler une molécule diatomique (C=O par exemple) à un oscillateur harmonique ; si cette molécule est composée de deux atomes différents, elle présente un léger moment dipolaire, qui peut être excité par un champ électrique alternatif ; il y aura donc résonance lorsque la fréquence de ce champ électrique sera égale à la fréquence de vibration de la molécule. Cette fréquence est de l'ordre de 10^{13} hertz, ce qui fait que le champ excitateur peut être le champ d'une onde électromagnétique du domaine infrarouge. Ainsi, lorsque l'on fait passer un faisceau infrarouge (*fig.* 50) à travers, par exemple, une enceinte contenant de l'oxyde de carbone et que l'on mesure la puissance recueillie après passage du faisceau, on obtient une courbe qui ressemble à celle de la *figure* 49, à ceci près qu'elle est inversée, puisque la *figure* 49 représente la différence entre la puissance absorbée et la puissance incidente.



◄ ***Figure 49 ; variation de la puissance absorbée par le résonateur en fonction de la fréquence : courbe lorentzienne caractéristique des phénomènes de résonance.***

Oscillateurs couplés

Nous allons maintenant envisager la situation, très importante en pratique, dans laquelle deux ou plusieurs oscillateurs sont couplés entre eux. Nous prendrons comme exemple très simple le cas schématisé sur la *figure* 51, dans lequel deux masses m_1 et m_2 sont reliées entre elles par un ressort de raideur C_3 et à deux points fixés par deux ressorts de raideurs C_1 et C_2. Nous négligeons cette fois tous les phénomènes d'amortissement. Soit x_1 et x_2 les déplacements des masses m_1 et m_2 par rapport à leur position d'équilibre. La loi fondamentale de la dynamique appliquée à ces deux masses donne les équations suivantes :

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + (C_1 + C_3)x_1 - C_3 x_2 = 0$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + (C_2 + C_3)\, x_2 - C_3 x_1 = 0$$

Cherchons des solutions de la forme :

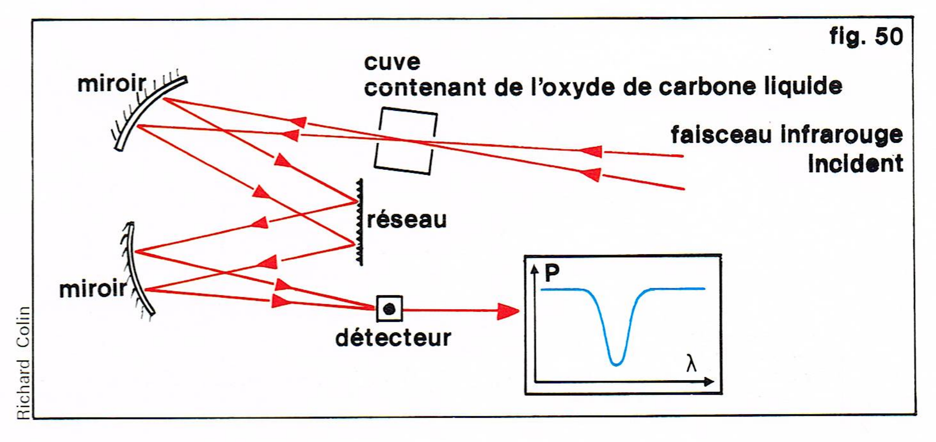
$$x_1 = A \cos \omega t$$
$$x_2 = B \cos \omega t$$

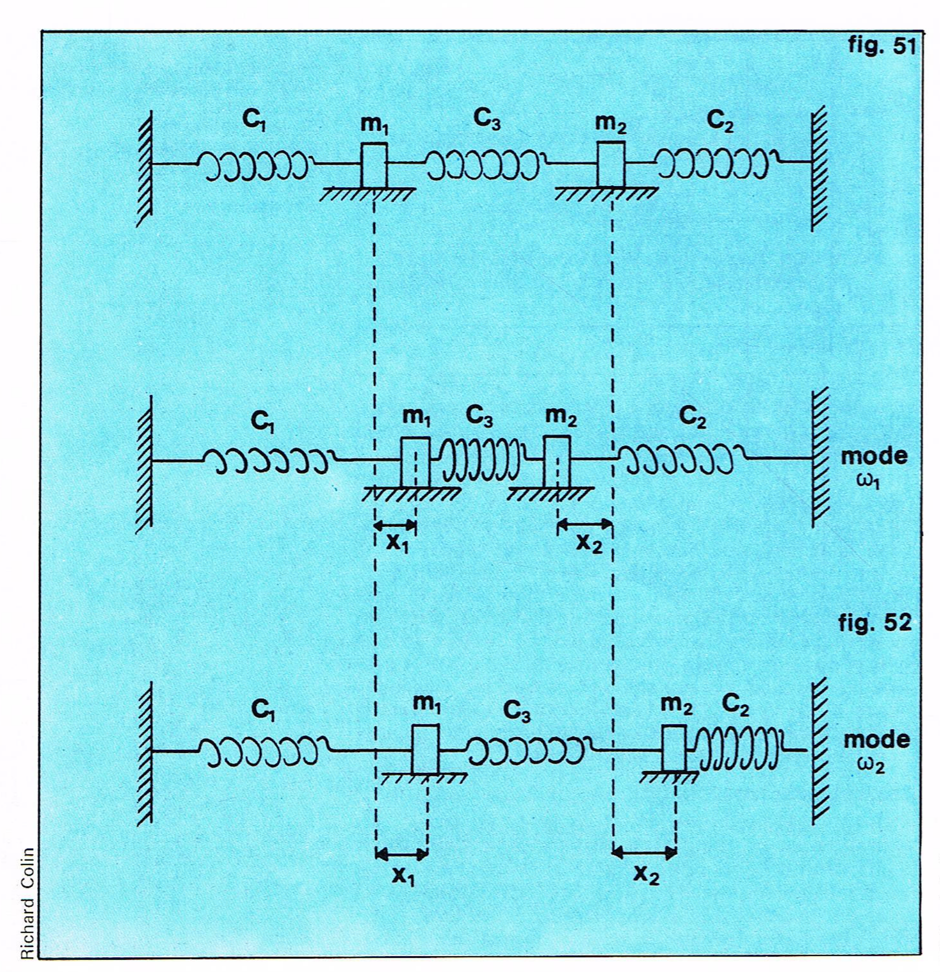
Si nous reportons ces expressions dans les équations du mouvement, nous trouvons :

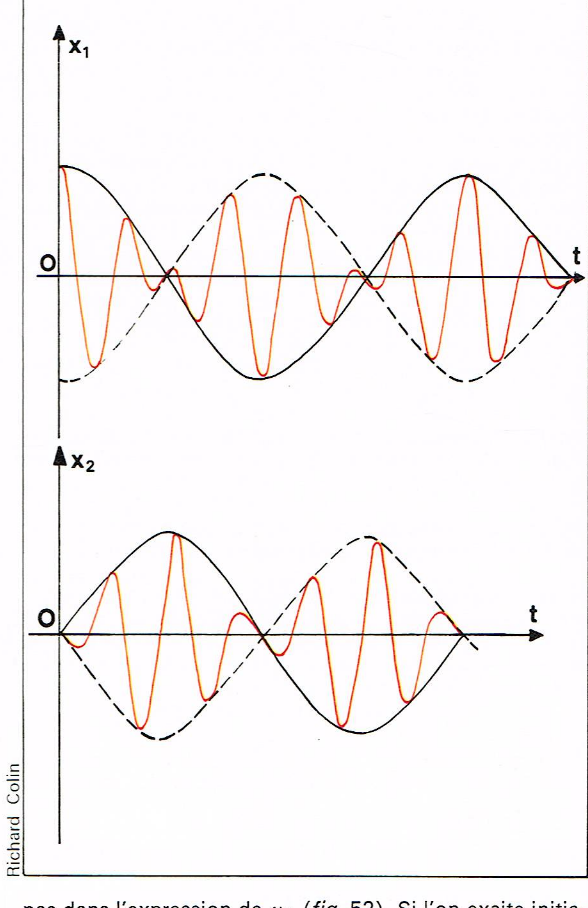
$$\begin{cases} A\,(-m_1\omega^2 + C_1 + C_3) - BC_3 = 0 & (35) \\ -AC_3 + B\,(-m_2\omega^2 + C_2 + C_3) = 0 & (36) \end{cases}$$

Ce système d'équations, où A et B sont les inconnues, n'admet de solution non triviale (c'est-à-dire avec $A \neq 0$

▼ ***Figure 50 ; un phénomène de résonance en physique moléculaire : absorption du rayonnement infrarouge par des molécules.***







▲ *A gauche, en haut, figure 51 : couplage de plusieurs oscillateurs; en bas, figure 52 : les deux modes fondamentaux de vibration de deux oscillateurs identiques couplés. A droite, figure 53 : variations des élongations des deux ressorts.*

et $B \neq 0$) que si son déterminant est nul, c'est-à-dire si la pulsation ω est solution de l'équation :

$$m_1 m_2 \omega^4 - \omega^2 [m_1 (C_2 + C_3) + m_2 (C_1 + C_3)] + (C_1 + C_3)(C_2 + C_3) - C_3^2 = 0$$

Considérons pour simplifier le cas particulier très important où les deux oscillations sont identiques : $m_1 = m_2$ et $C_1 = C_2$; désignons par m la masse commune et par C la raideur commune ; ω est alors déterminé par l'équation :

$$m^2\omega^4 - 2\,\omega^2 m\,(C + C_3) + (C + C_3)^2 = C_3^2$$

soit encore : $[m\omega^2 - (C + C_3)]^2 = C_3^2$

Les deux solutions sont donc :

$$\omega_1^2 = \frac{C + 2\,C_3}{m} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{C}{m}$$

Or la fréquence propre de chacun des deux oscillateurs (composé d'une masse m, d'un ressort C et d'un ressort C_3) est $\omega_0^2 = \dfrac{C + C_3}{m}$.

Nous voyons donc que le couplage entre ces deux oscillateurs introduit deux fréquences propres qui valent respectivement :

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{C_3}{m} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 - \frac{C_3}{m}$$

et sont donc situées de part et d'autre de la fréquence propre commune ; c'est d'ailleurs un phénomène extrêmement général que l'écartement des fréquences propres par couplage entre deux oscillateurs.

Revenons aux équations **(35)** et **(36)**, et cherchons les amplitudes A et B des mouvements ; on trouve :

$$A = -B \quad \text{pour} \quad \omega = \omega_1$$

et

$$A = B \quad \text{pour} \quad \omega = \omega_2$$

Pour $\omega = \omega_1$ nous voyons donc que, à chaque instant, les deux masses ont des élongations opposées : elles vibrent en *opposition de phase ;* pour $\omega = \omega_2$, elles vibrent au contraire *en phase* et avec la même élongation, de sorte que leur distance reste constante ; le ressort C_3 n'est ni comprimé, ni étendu, ce qui explique qu'il n'intervienne pas dans l'expression de ω_2 (*fig.* 52). Si l'on excite initialement un de ces modes (c'est-à-dire si l'on fait initialement $x_{01} = -x_{02}$ ou $x_{01} = x_{02}$), celui-ci se poursuivra indéfiniment (puisque nous négligeons ici les frottements). En revanche, si l'on excite initialement d'une façon quelconque, le mouvement obtenu sera une combinaison linéaire de ces deux modes et évoluera dans le temps. Les équations seront de la forme :

$$x_1 = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$$
$$x_2 = A \cos \omega_1 t - B \cos \omega_2 t$$

Supposons par exemple que, à l'instant $t = 0$, nous maintenions m_2 immobile et déplacions m_1 d'une quantité x_0 ; nous aurons alors :

$$x_1 = \frac{a}{2} \cos \omega_1 t + \frac{a}{2} \cos \omega_2 t$$

$$x_2 = \frac{a}{2} \cos \omega_1 t - \frac{a}{2} \cos \omega_2 t$$

soit encore :

$$x_1 = a \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$$

$$x_2 = -a \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$$

Les variations de x_1 et x_2 sont représentées sur la *figure* 53 : il s'agit d'un mouvement compliqué qui résulte des battements de deux mouvements de fréquences ω_1 et ω_2.

Lorsque, au lieu de 2 oscillateurs identiques couplés, on a affaire à N oscillateurs couplés, on obtient N équations différentielles couplées qui conduisent à un système de N équations homogènes où les N inconnues sont les élongations de chacune des N masses. On a donc à annuler un déterminant de dimension N, ce qui fournit N valeurs de ω qui correspondent à N modes de vibration. Une telle chaîne d'oscillateurs sert en physique du solide comme modèle pour les vibrations d'un réseau cristallin *(phonons)*.

TRAITÉ DE DYNAMIQUE, DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE & du Mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une manière nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres, d'une manière quelconque.

Par M. d'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences.

ERUDIT ET DITAT

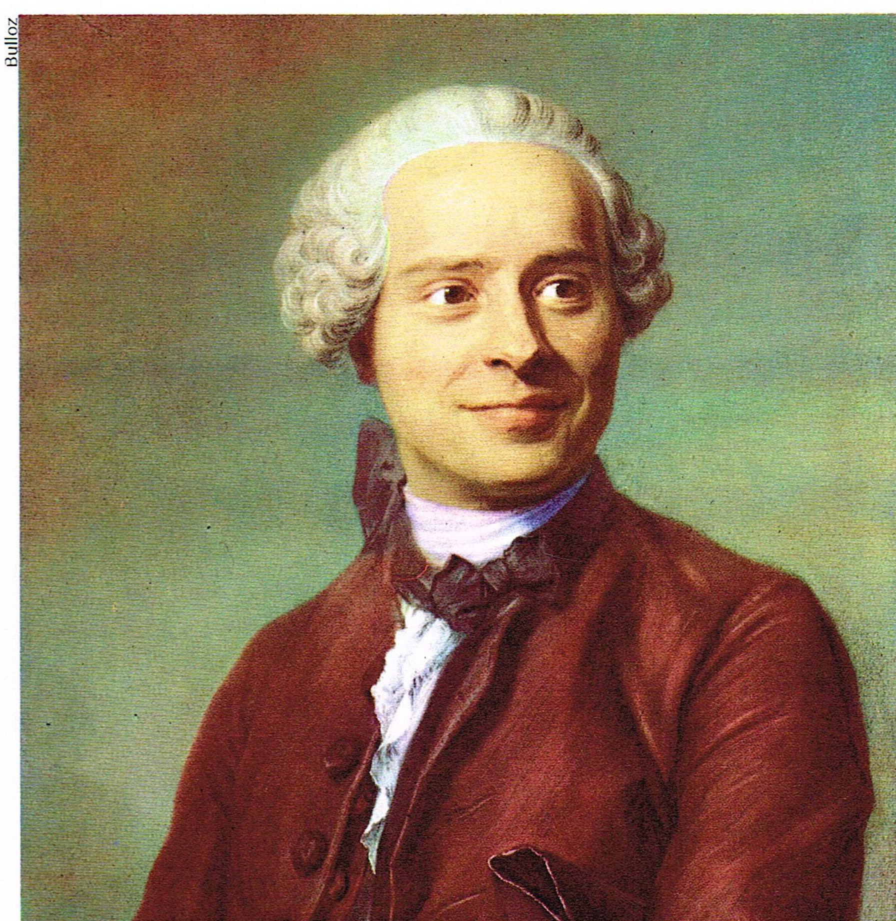
A PARIS, Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.

MDCCXLIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Giraudon

Bulloz



▲ *A gauche, frontispice du* **Traité de dynamique** *de J. d'Alembert, édition de 1743. A droite, d'Alembert, portrait peint par Quentin de La Tour (musée du Louvre).*

Dynamique des solides

Nous abordons maintenant l'étude du mouvement des solides indéformables, c'est-à-dire d'ensembles de points matériels contraints par des forces de cohésion à rester à des distances fixes les uns des autres. Ce problème est évidemment d'une énorme importance pratique, et présente dans certains cas une grande complexité. La théorie du gyroscope, par exemple, occupe à elle seule un ouvrage en quatre volumes !

Équations du mouvement d'un solide en rotation

Moment cinétique d'un solide

Nous avons vu dans le chapitre *Mécanique d'un système de points matériels* que l'équation fondamentale de la dynamique a pour conséquence que le moment des forces appliquées à un système de particules est égal à la dérivée du moment cinétique $\vec{L}$; $\vec{L}$ est donné par :

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r_i} \wedge m_i\vec{v_i}$$

Supposons que ce corps ne soit soumis à aucune force extérieure ; il existe alors un référentiel d'inertie lié au centre de gravité du solide. Celui-ci est donc soumis à un mouvement de rotation caractérisé par un certain vecteur $\vec{\Omega}\,(t)$. Chaque particule du solide est donc animée d'une vitesse :

$$\vec{v_i} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r_i}$$

Cela est vrai également si le corps est soumis à une ou plusieurs forces, mais possède un point fixe par rapport à un repère inertiel ; on prend alors comme axes de référence un système fixe par rapport au repère inertiel et dont l'origine est le point fixe. La vitesse garde de toute façon la même expression que précédemment. Le moment cinétique par rapport à l'origine est alors :

$$\vec{L} = \sum_i m_i\vec{r_i} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r_i})$$

Or $\vec{r_i} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r_i}) = \vec{\Omega} r_i^2 - \vec{r_i}\,(\vec{r_i} \cdot \vec{\Omega})$

Ce qui donne :

$$\vec{L} = \sum_i m_i[r_i^2\vec{\Omega} - \vec{r_i}\,(\vec{r_i} \cdot \vec{\Omega})]$$

Appelons Ω_x, Ω_y, Ω_z les composantes de $\vec{\Omega}$ et x_i, y_i, z_i celles de $\vec{r_i}$. L'expression de $\vec{L}$ devient alors :

$$\vec{L} = \sum_i m_i[r_i^2\vec{\Omega} - \vec{r_i}\,(\Omega_x x_i + \Omega_y y_i + \Omega_z z_i)]$$

Écrivons la composante de $\vec{L}$ selon l'axe Ox :

$$L_x = \sum_i m_i[(r_i^2 - x_i^2)\,\Omega_x - x_i y_i \Omega_y - x_i z_i \Omega_z]$$

On obtient des expressions semblables pour les composantes du moment cinétique selon Oy et Oz :

$$L_y = \sum_i m_i[(r_i^2 - y_i^2)\,\Omega_y - y_i x_i \Omega_x - y_i z_i \Omega_z]$$

$$L_z = \sum_i m_i[(r_i^2 - z_i^2)\,\Omega_z - z_i x_i \Omega_x - z_i y_i \Omega_y]$$

Nous voyons que ces trois expressions font intervenir les quantités :

$$\sum_i m_i\,(r_i^2 - x_i^2), \quad -\sum_i m_i x_i y_i, \quad -\sum_i m_i x_i z_i,$$

et leurs analogues. En général, ces quantités dépendent du temps puisque nous avons supposé que les axes étaient fixes. Elles sont appelées *moments d'inertie* du solide ; elles forment une matrice symétrique dont les éléments sont :

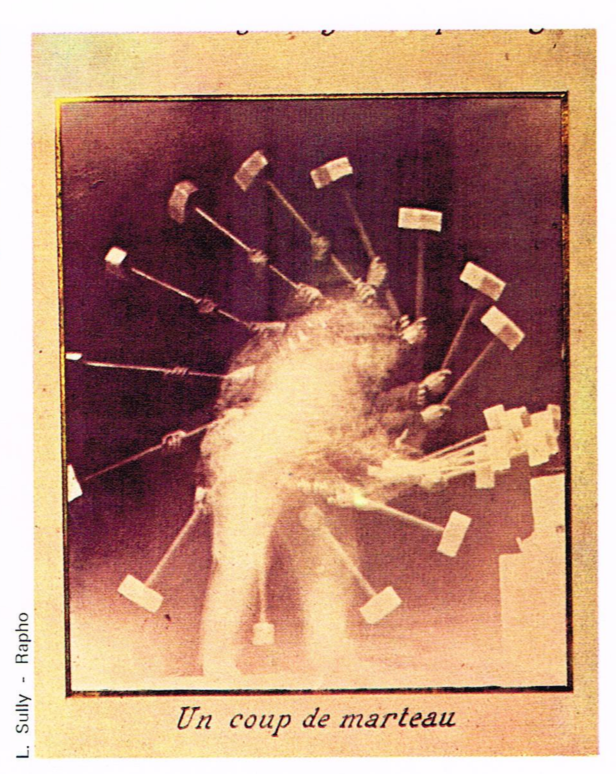
$$I_{xx} = \sum_i m_i\,(r_i^2 - x_i^2)\,; \qquad I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i\,;$$

$$I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i$$

$$I_{yx} = I_{xy}\,; \quad I_{yy} = -\sum_i m_i\,(r_i^2 - y_i^2)\,; \quad I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i$$

$$I_{zx} = I_{xz}\,; \qquad I_{zy} = I_{yz}\,; \qquad I_{zz} = \sum_i m_i\,(r_i^2 - z_i^2)$$

▶ *La stroboscopie permet de décomposer le mouvement ; cette photo, qui date de 1890, montre bien les phases successives : vitesse de plus en plus grande du marteau, rebondissement sur l'enclume (musée Marey ; Beaune).*



L. Sully - Rapho

Le moment cinétique $\vec{L}$ est donc relié au vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ par : $\vec{L} = \overline{\overline{\mathfrak{J}}}\vec{\Omega}$

où $\overline{\overline{\mathfrak{J}}}$ désigne la *matrice d'inertie* du solide considéré.

Nous pouvons donner une autre expression de la matrice d'inertie : en effet, un solide n'est généralement pas constitué de petits points matériels liés entre eux, mais il se présente, du point de vue macroscopique, comme une distribution continue de matière de densité $\rho\ (x, y, z)$. Les sommes qui interviennent dans l'expression des moments d'inertie doivent donc être transformées en intégrales. On a alors les expressions suivantes :

$$I_{xx} = \iiint (r^2 - x^2)\ \rho\ dv,$$
$$I_{xy} = -\iiint xy\rho\ dv,$$
$$I_{xz} = -\iiint xz\rho\ dv,$$

et ainsi de suite pour les autres coefficients. Les intégrales sont étendues à tout le volume du solide. On peut remarquer que la somme des éléments diagonaux de la matrice est indépendante du choix des axes, alors que chacun des éléments de la matrice dépend des axes choisis :

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \iiint \rho\ (x, y, z)\ r^2 dv$$

où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Rappelons à nouveau que les coefficients de la matrice d'inertie dépendent du système d'axes choisis. Il est souvent très commode et, du moins pour les corps de forme régulière, facile, de trouver des axes tels que tous les éléments non diagonaux de la matrice d'inertie soient nuls. Ces axes sont appelés axes principaux d'inertie du corps considéré.

Revenons à l'expression des termes diagonaux ; par exemple $I_{xx} = \iiint \rho\ (y^2 + z^2)\ dv$. Dans cette expression intervient le carré de la distance $(y^2 + z^2)$ de chaque point du solide à l'axe Ox. Pour cette raison, I_{xx} est appelé *moment d'inertie* du solide par rapport à Ox ; de même, I_{yy} et I_{zz} sont les moments d'inertie par rapport à Oy et Oz. Cherchons l'expression du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque Δ passant par l'origine. Soit (α, β, γ) les composantes du vecteur unitaire $\vec{n}$ de l'axe considéré ; on a donc :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

La distance δ du point M, de coordonnées (x, y, z), à cette droite est donnée par :

$$\delta^2 = (\gamma^2 + \beta^2)\ x^2 + (\alpha^2 + \gamma^2)\ y^2 + (\alpha^2 + \beta^2)\ z^2 - 2\ \alpha\beta xy - 2\ \alpha\gamma xz - 2\ \beta\gamma yz,$$

Le moment d'inertie par rapport à cette droite est donc :

$$I_\Delta = \iiint \rho\delta^2 dv$$

soit encore

$$I_\Delta = \iiint \rho\alpha^2\ (y^2 + z^2)\ dv + \iiint \rho\beta^2\ (x^2 + z^2)\ dv + \iiint \rho\gamma^2\ (x^2 + y^2)\ dv - 2\ \alpha\beta \iiint \rho xydv - 2\alpha\gamma \iiint \rho xzdv - 2\ \beta\gamma \iiint \rho yzdv.$$

On voit apparaître dans cette dernière expression les éléments de la matrice d'inertie :

$$I_\Delta = \alpha^2 I_{xx} + \beta^2 I_{yy} + \gamma^2 I_{zz} - 2\ \alpha\beta I_{xy} - 2\ \alpha\gamma I_{xz} - 2\ \beta\gamma I_{yz}. \quad \textbf{(37)}$$

Supposons que nous portions sur l'axe Δ une longueur égale à $\frac{1}{I_\Delta}$ à partir de l'origine O ; l'autre extrémité M de ce vecteur $\vec{\xi}$ a pour coordonnées

$$\left(X = \frac{\alpha}{\sqrt{I_\Delta}},\ Y = \frac{\beta}{\sqrt{I_\Delta}},\ Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I_\Delta}}\right).$$

Reportant les valeurs $\alpha = X\sqrt{I_\Delta}$, $\beta = Y\sqrt{I_\Delta}$, $\gamma = Z\sqrt{I_\Delta}$ ainsi définies dans l'expression **(37)**, nous voyons que le point M est sur une surface dont l'équation est :

$$I_{xx}X^2 + I_{yy}Y^2 + I_{zz}Z^2 - 2\ I_{xy}XY - 2\ I_{yz}YZ - 2\ I_{xz}XZ = 1$$

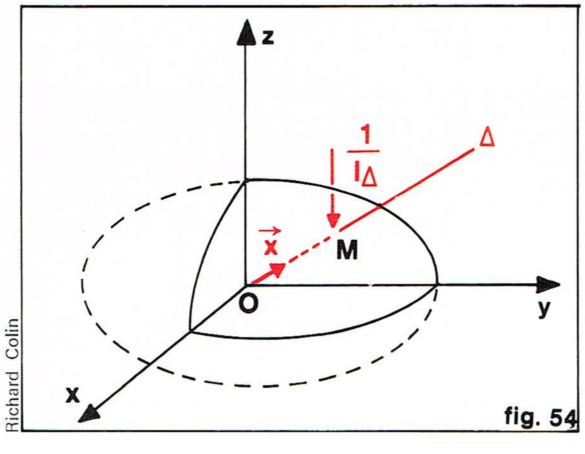
Cette équation est celle d'un ellipsoïde que l'on appelle *ellipsoïde d'inertie* (*fig.* 54).

Si les axes Ox, Oy et Oz sont tels que les éléments non diagonaux de la matrice d'inertie sont nuls, l'équation précédente se réduit à :

$$I_{xx}X^2 + I_{yy}Y^2 + I_{zz}Z^2 = 1$$

Cela signifie que Ox, Oy, Oz sont les axes de symétrie de l'ellipsoïde d'inertie. Par conséquent, les axes principaux d'un solide ne sont pas autre chose que les axes de symétrie de l'ellipsoïde d'inertie.

Si les axes principaux d'inertie d'un corps sont souvent très pratiques pour étudier le mouvement d'un solide, il arrive également qu'il soit utile de prendre comme système de référence des axes dont l'origine soit au centre de gravité G du solide. Nous allons voir comment se



Richard Colin

z'
z
dz²
G
y'
Z_G
X_G
x'
y
O
Y_G
x
fig. 55

Richard Colin

▶ *A gauche, figure 54 : ellipsoïde d'inertie d'un corps solide. A droite, figure 55 ; passage d'un repère quelconque au repère barycentrique : théorème de Huygens.*

transforme l'expression des moments d'inertie par rapport à un axe lorsque l'on passe d'un système $Oxyz$ à un système $Gx'y'z'$ (avec $Ox \,//\, Gx'$, $Oy \,//\, Gy'$, $Oz \,//\, Oz'$). Soit X_G, Y_G, Z_G les coordonnées de G dans le repère $Oxyz$ (*fig.* 55) ; les formules de changement de repère sont les suivantes :

$$x = x' + X_G$$
$$y = y' + Y_G$$
$$z = z' + Z_G$$

avec $X_G = \dfrac{\iiint \rho x dv}{\iiint \rho dv}$; $\quad Y_G = \dfrac{\iiint \rho y dv}{\iiint \rho dv}$; $\quad Z_G = \dfrac{\iiint \rho z dv}{\iiint \rho dv}$

Cherchons l'expression de I_{xy}. Nous avons :

$$xy = x'y' + x'Y_G + y'X_G + X_GY_G$$

Par conséquent :

$$I_{xy} = I_{x'y'} + Y_G \iiint x' \rho dv + X_G \iiint y' \rho dv + X_GY_G \iiint \rho dv$$

Or, $\iiint x' \rho dv = \iiint y' \rho dv = 0$ puisque le centre de gravité est l'origine des axes $Gx'y'z'$; par conséquent :

$$I_{xy} = I_{x'y'} + MX_GY_G$$

où $M = \iiint \rho dv$ est la masse totale du solide.

De même : $\quad I_{yz} = I_{y'z'} + MY_GZ_G$

$\quad I_{zx} = I_{z'x'} + MZ_GX_G.$

Pour les termes diagonaux, on obtient :

$$I_{xx} = I_{x'x'} + M\,(Z_G^2 + Y_G^2)$$

Or $Z_G^2 + Y_G^2$ n'est autre que le carré de la distance d_x entre les axes Ox et Gx'.

$$I_{xx} = I_{x'x'} + Md_x^2$$

De même

$$I_{yy} = I_{y'y'} + Md_y^2$$
$$I_{zz} = I_{z'z'} + Md_z^2$$

Le moment d'inertie par rapport à un axe Ox est donc égal à la somme du moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Gx' parallèle à Ox et du moment d'inertie par rapport à O qu'aurait un point matériel de masse M placé au centre de gravité. Ce théorème est connu sous le nom de **théorème de Huygens.**

Énergie cinétique de rotation

L'énergie cinétique de rotation est l'énergie cinétique mesurée par rapport à un système d'axes lié au centre de gravité. Elle vaut :

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i\,(\vec{\Omega} \wedge \vec{r_i})^2$$

soit encore, pour un corps continu :

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho\,(\vec{\Omega} \wedge \vec{r})^2\,dv$$

Nous pouvons aussi écrire l'énergie cinétique de rotation sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho\,(\vec{\Omega} \wedge \vec{r})\,\frac{d\vec{r}}{dt}\,dv = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \iiint \rho \left(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\right) dv$$

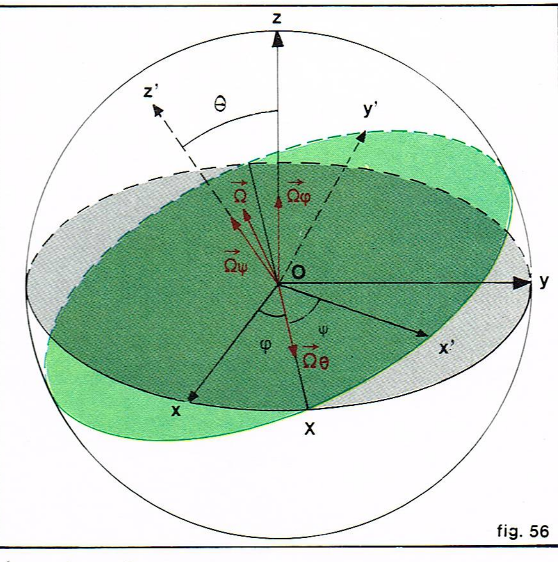
Soit encore $T = \dfrac{1}{2} \vec{\Omega}\, \bar{\bar{\mathfrak{J}}}\, \vec{\Omega}$

car $\iiint \rho \left(\vec{r} \wedge \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right) dv = \vec{L}$ et $\vec{L} = \bar{\bar{\mathfrak{J}}}\vec{\Omega}.$

Cette expression un peu compliquée de l'énergie cinétique se simplifie si l'on cherche à l'exprimer dans le système d'axes principaux d'inertie du solide ; en effet, on a alors :

$$T = \frac{1}{2}\,(I_{xx}\Omega_x^2 + I_{yy}\Omega_y^2 + I_{zz}\Omega_z^2)$$

Cette expression de l'énergie cinétique, rappelons-le, est celle que l'on trouve si l'on se place dans un référentiel lié au centre de gravité du solide ; c'est donc l'énergie due au mouvement du solide par rapport à son centre de gravité. Comme nous l'avons vu au paragraphe *Principe de Hamilton*, il faut, pour obtenir l'énergie cinétique totale, ajouter à ce terme l'énergie cinétique qu'aurait un point matériel confondu avec le centre de gravité du solide et dont la masse serait égale à la masse totale du solide considéré.



◀ ***Figure 56 : définition des angles d'Euler.***

Équations du mouvement

Pour établir les équations du mouvement d'un solide, nous allons utiliser les *équations de Lagrange*. Rappelons que ces équations sont des équations différentielles portant sur les dérivées du lagrangien : $L = T - V$, par rapport aux coordonnées généralisées. Un solide possédant six degrés de liberté (trois degrés de translation et trois de rotation), nous devons trouver six *coordonnées généralisées*. Celles qui décrivent le mouvement de translation sont évidentes : ce sont les trois coordonnées X_G, Y_G, Z_G du centre de gravité. Pour décrire la rotation, on utilise trois angles appelés *angles d'Euler*, qui apparaissent sur la *figure* 56 : ce sont les angles φ, θ et ψ qui définissent la position du repère $Ox'y'z'$ par rapport au repère fixe $Oxyz$. La droite OX est l'intersection du plan $x'Oy'$ avec xOy ; elle est appelée *ligne des nœuds*.

On passe alors des coordonnées (x, y, z) dans le repère $Oxyz$ aux coordonnées (x', y', z') dans le repère $Ox'y'z'$ par les relations suivantes :

$$x' = (\cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi)\,x - (\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi)\,y + z\sin\theta\sin\varphi$$

$$y' = (\cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi)\,x - (\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi)\,y - z\sin\theta\cos\varphi$$

$$z' = (\sin\theta\sin\psi)\,x + (\sin\theta\cos\psi)\,y + z\cos\theta$$

Ayant défini les coordonnées généralisées, on doit définir les *forces généralisées :* dans le cas de la translation, il s'agit évidemment des forces habituelles, et pour la rotation, il s'agit du moment des forces.

Puisque nous savons que nous pouvons traiter de façon indépendante la translation et la rotation, nous pouvons écrire le lagrangien concernant uniquement le mouvement de rotation du solide :

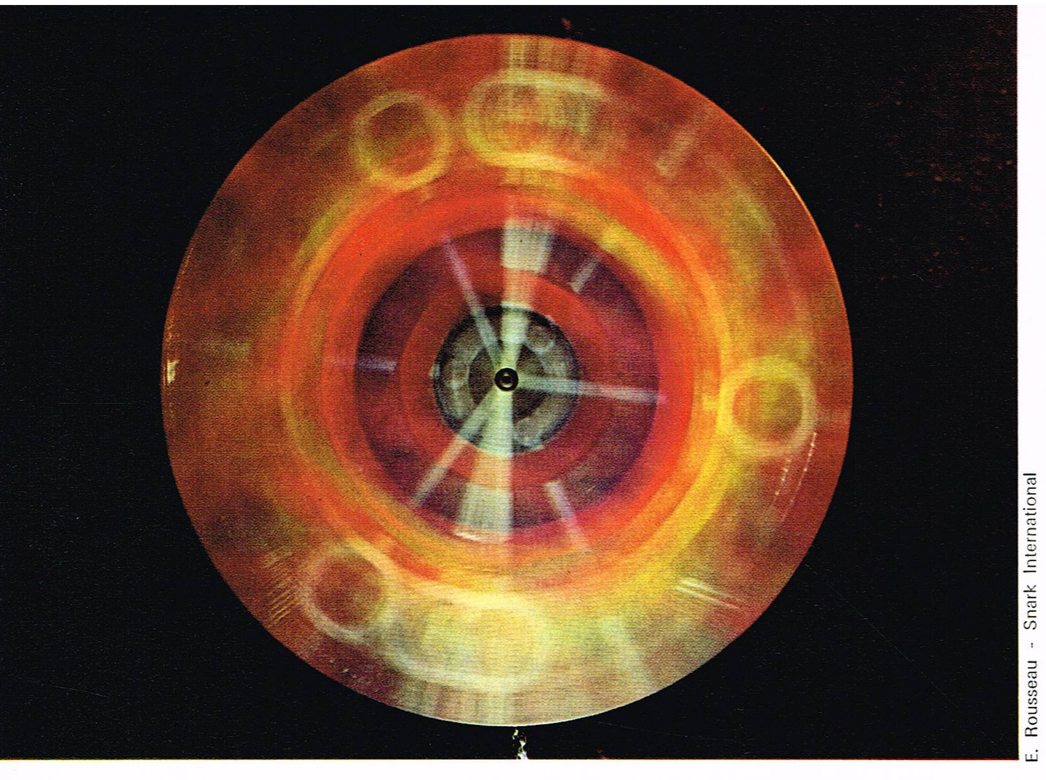
$$L = \frac{1}{2}\vec{\Omega}\,\bar{\bar{\mathfrak{J}}}\,\vec{\Omega} - V\,(\varphi, \theta, \psi)$$

Supposons, pour simplifier, que les axes liés au solide soient les axes principaux :

$$L = \frac{1}{2}\,(I_{x'x'}\Omega_{x'}^2 + I_{y'y'}\Omega_{y'}^2 + I_{z'z'}\Omega_{z'}^2) - V\,(\varphi, \theta, \psi)$$

Il faut maintenant exprimer $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$, $\Omega_{z'}$ en fonction de φ, θ, ψ. Or la rotation du solide peut se décomposer en trois mouvements : variation de l'angle φ, qui correspond à un vecteur $\vec{\Omega}_\varphi$ porté par Oz, de module $\dfrac{d\varphi}{dt}$, variation de l'angle θ, qui correspond à un vecteur $\vec{\Omega}_\theta$ porté par la ligne des nœuds et de module $\dfrac{d\theta}{dt}$, variation de l'angle ψ, qui correspond à un vecteur $\vec{\Omega}_\psi$ porté par Oz' et de module $\dfrac{d\psi}{dt}$; le vecteur $\vec{\Omega}$ est alors la somme :

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_\varphi + \vec{\Omega}_\theta + \vec{\Omega}_\psi$$



E. Rousseau - Snark International

fig. 57

Richard Colin

▲ *A gauche, observation d'un disque de rotation à l'aide d'un stroboscope électronique de fréquence variable. A droite, figure 57 : moment d'inertie d'une sphère.*

Pour connaître $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$, $\Omega_{z'}$ il suffit donc de connaître les composantes de $\vec{\Omega}_\varphi$, $\vec{\Omega}_\theta$, $\vec{\Omega}_\psi$ selon Ox′, Oy′ et Oz′. On trouve aisément, en utilisant les formules de passage de Oxyz à Ox′y′z′, que l'on a les relations suivantes :

$$\Omega_{x'} = \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\sin\psi + \frac{d\theta}{dt}\cos\psi$$

$$\Omega_{y'} = \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\cos\psi - \frac{d\theta}{dt}\sin\psi$$

$$\Omega_{z'} = \frac{d\varphi}{dt}\cos\theta + \frac{d\psi}{dt}$$

Nous pouvons maintenant appliquer les équations de Lagrange. Prenons, par exemple, celle qui est relative à la coordonnée généralisée ψ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$

$\dot{\psi}$ n'intervient que dans $\Omega_{z'}$: $\dfrac{d\Omega z'}{d\dot{\psi}} = 1$

par conséquent : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(I_{z'z'}\Omega_{z'}\right) = I_{z'z'}\dfrac{d\Omega_{z'}}{dt}$.

ψ intervient dans **V** et dans T :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \psi} = -M_{z'}$$

où $M_{z'}$ est la composante selon Oz′ du moment résultant des forces appliquées.

D'autre part $\qquad \dfrac{\partial \Omega_{x'}}{\partial \psi} = \Omega_{y'}$

$$\frac{\partial \Omega_{y'}}{\partial \psi} = -\Omega_{x'}$$

L'équation de Lagrange relative à ψ s'écrit donc :

$$I_{z'z'}\frac{d\Omega_{z'}}{dt} - (I_{x'x'} - I_{y'y'})\,\Omega_{x'}\Omega_{y'} = M_{z'}$$

On trouve de même pour θ et φ :

$$I_{x'x'}\frac{d\Omega_{x'}}{dt} - (I_{y'y'} - I_{z'z'})\,\Omega_{y'}\Omega_{z'} = M_{x'}$$

$$I_{y'y'}\frac{d\Omega_{y'}}{dt} - (I_{z'z'} - I_{x'x'})\,\Omega_{x'}\Omega_{z'} = M_{y'}$$

Ces équations sont appelées *équations d'Euler*.

Nous pouvons retrouver ces équations à partir du théorème du moment cinétique :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Ce théorème ne s'applique que dans un référentiel d'inertie Oxyz, mais il est pratique d'exprimer L dans un référentiel Ox′y′z′ lié au solide, et en particulier dans le référentiel constitué par les axes principaux, car l'expression de la matrice d'inertie est alors très simple, et indépendante du temps. Nous devons donc chercher la relation entre $\left(\dfrac{d\vec{L}}{dt}\right)_{Oxyz}$ et $\left(\dfrac{d\vec{L}}{dt}\right)_{Ox'y'z'}$; nous avons déjà effectué une telle opération au paragraphe *Référentiels non inertiels*:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{Oxyz} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$$

$\vec{\Omega}$ est le vecteur caractérisant la rotation de Ox′y′z′ par rapport à Ox; comme Ox′y′z′ est lié au solide, $\vec{\Omega}$ n'est autre que le vecteur de rotation du solide. Nous pouvons donc écrire le théorème du moment cinétique, par exemple en projection sur l'axe Oz′ (supposé être axe principal du solide) :

$$M_{z'} = \left(\frac{d}{dt}\,\bar{\bar{J}}\,\vec{\Omega}\right)_{z'} + \Omega_{x'}L_{y'} - \Omega_{y'}L_{x'}$$

soit encore :

$$M_{z'} = I_{z'z'}\frac{d\Omega_{z'}}{dt} - (I_{x'x'} - I_{y'y'})\,\Omega_{x'}\Omega_{y'}$$

Cette relation est bien identique à l'une des équations d'Euler trouvées précédemment. Ces équations constituent les équations du mouvement de rotation du solide. Avant de les appliquer à quelques cas particuliers, nous allons calculer les moments d'inertie de quelques solides simples.

Moments d'inertie de solides simples

● *Cas de la sphère homogène*

La sphère étant parfaitement symétrique, les axes Ox, Oy et Oz jouent le même rôle ; on aura donc :

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

Pour la même raison, les éléments diagonaux de la matrice d'inertie sont forcément nuls :

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$$

Nous avons vu, de plus, que :

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\iiint \rho r^2 dv$$

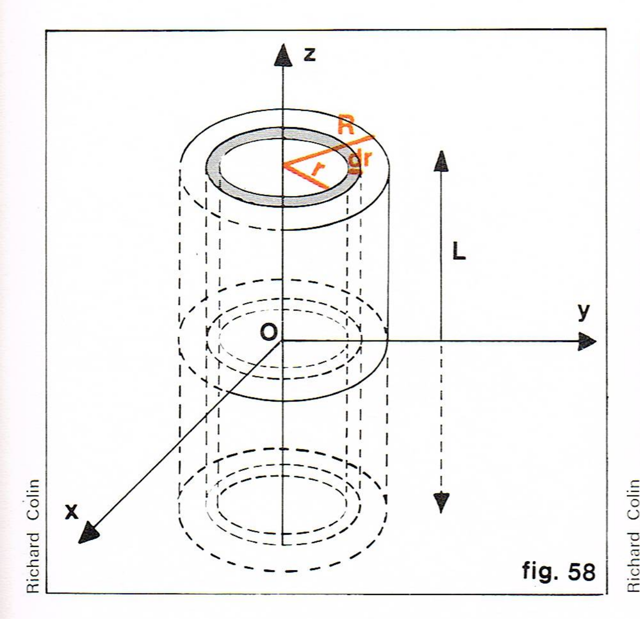
Donc : $I_{xx} = \dfrac{1}{3}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) = \dfrac{2}{3}\iiint \rho r^2 dv.$

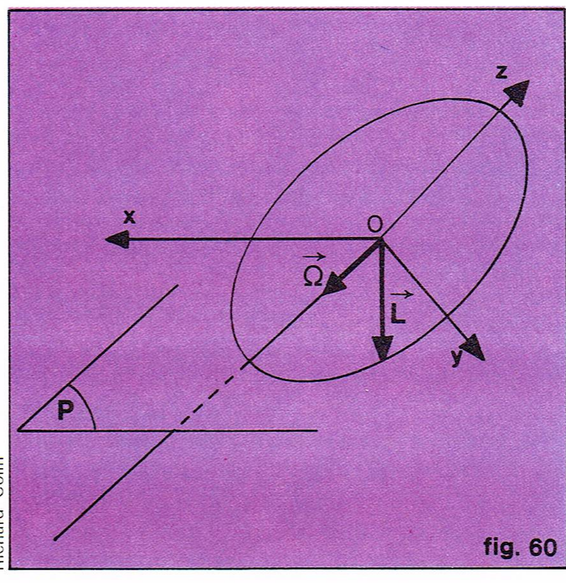
Prenons comme élément de volume une coquille sphérique d'épaisseur dr (*fig.* 57) :

$$dv = 4\,\pi r^2 dr$$

Donc : $I_{xx} = \dfrac{2}{3}\rho\displaystyle\int_0^R 4\,\pi r^4 dr = \dfrac{8}{15}\pi\rho R^5$

Or, la masse totale de la sphère est $M = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho$





◄ *A gauche, figure 58 : moment d'inertie d'un cylindre. A droite, figure 60 ; théorème de Poinsot : la distance du centre de l'ellipse au plan* P *est constante.*

Par conséquent : $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} MR^2$.

Notons que, pour une sphère, la relation $\vec{L} = \bar{\bar{J}}\vec{\Omega}$ se réduit à :

$\vec{L} = \frac{2}{5} MR^2\vec{\Omega}$; le moment cinétique d'une sphère est toujours parallèle à son vecteur instantané de rotation.

● *Cas du cylindre homogène*

Supposons que l'axe O*z* soit l'axe du cylindre (*fig.* 58). Les axes O*x* et O*y*, perpendiculaires à l'axe, jouent certainement le même rôle ; on doit avoir : $I_{xx} = I_{yy}$.

Calculons $I_{zz} = \iiint \rho\,(x^2 + y^2)\,dv$.

Nous prenons comme élément de volume une couche cylindrique d'épaisseur *dr* :

$$dv = 2\,\pi r L dr \quad \text{avec } r^2 = x^2 + y^2.$$

Nous avons alors :

$$I_{zz} = \rho \int_0^R r^2\, 2\,\pi L r dr$$
$$= \frac{1}{2}\pi\rho L R^4$$

or, la masse totale du cylindre est :

$$M = \rho\pi R^2 L$$

donc : $I_{zz} = \frac{1}{2} MR^2$

par conséquent :

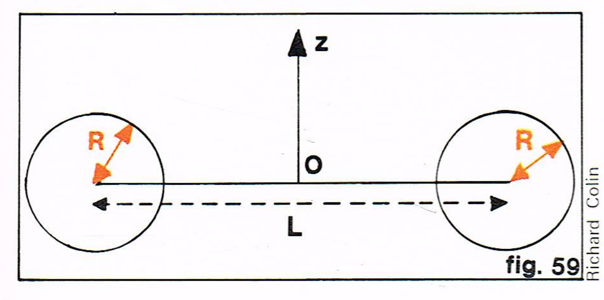
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}\left[2\iiint \rho\,(r^2 + z^2)\,dv - I_{zz}\right]$$
$$= M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right)$$

Pour une baguette très fine ($R \ll L$), cette formule se réduit à : $I_{xx} = M\frac{L^2}{12}$.

Cherchons maintenant les éléments diagonaux :

$$I_{xy} = -\iiint \rho xy dv$$

A tout point de coordonnées (*x*, *y*) correspond un point de coordonnées (*x*, — *y*) : les contributions de ces deux points à l'intégrale s'annulent ; par conséquent $I_{xy} = 0$. Pour la même raison, on a : $I_{yz} = I_{zx} = 0$.



◄ *Figure 59 : moment d'inertie d'un haltère.*

Les axes O*xyz* que nous avons choisis constituent donc les axes principaux d'inertie du cylindre.

● *Cas d'un haltère*

Nous supposons que deux sphères homogènes de rayon R sont fixées sur une tige de masse négligeable, de longueur L. Cherchons le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le milieu de la tige et perpendiculaire à celle-ci (*fig.* 59). Nous savons que chacune des sphères a pour moment d'inertie $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$ par rapport à un axe passant par son centre ; pour connaître le moment d'inertie situé à une distance $\frac{L}{2}$ du centre, nous utilisons le théorème de Huygens :

$$I = I_0 + M\frac{L^2}{4} \quad \text{soit : } I = \frac{2}{5} MR^2 + M\frac{L^2}{4}$$

Le moment d'inertie total est donc :

$$I_1 = \frac{4}{5} MR^2 + M\frac{L^2}{2}$$

Quant au moment d'inertie par rapport à l'axe passant par les centres des deux sphères, il est simplement :

$$I_2 = \frac{4}{5} MR^2$$

Mouvement d'un solide en l'absence de forces

Nous allons maintenant considérer le cas d'un solide en l'absence de forces (ou de couples). Les équations d'Euler se réduisent alors à :

$$I_{x'x'}\frac{d\Omega_{x'}}{dt} = \Omega_{y'}\Omega_{z'}\,(I_{y'y'} - I_{z'z'})$$

et les deux analogues.

Nous savons que, dans ce cas, l'énergie cinétique et le moment cinétique doivent rester constants au cours du mouvement, ce qui permet d'intégrer les équations du mouvement. Nous allons donner ici une description géométrique du mouvement.

Solide quelconque

Reprenons le vecteur $\vec{\rho}$ que nous avons défini au paragraphe *Moment cinétique d'un solide*, et dont l'extrémité a pour coordonnées (X, Y, Z) ; nous définissons la fonction F (X, Y, Z) par la relation :

$$F(X, Y, Z) = I_{x'x'}X^2 + I_{y'y'}Y^2 + I_{z'z'}Z^2$$

La surface définie par F (X, Y, Z) = I est l'*ellipsoïde d'inertie*. La normale à cette surface est proportionnelle à $\overrightarrow{\text{grad}}\,F$: sa direction est donc définie par le vecteur unitaire de composantes ($2\,I_{x'x'}X$, $2\,I_{y'y'}Y$, $2\,I_{z'z'}Z$), ou par tout vecteur dont les composantes sont proportionnelles à celui-ci ; en particulier, si l'on considère le vecteur $\vec{\rho}$ parallèle à $\vec{\Omega}$, ces trois composantes deviennent :

▶ *Figure 61 ; toupie symétrique ayant un point fixe : gyroscope.*

$$2\,I_{x'x'}\Omega_{x'} = 2\,L_{x'}$$
$$2\,I_{y'y'}\Omega_{y'} = 2\,L_{y'}$$
$$2\,I_{z'z'}\Omega_{z'} = 2\,L_{z'}$$

Par conséquent, le vecteur $\vec{\Omega}$ sera tel que le vecteur $\vec{L}$ soit parallèle à la normale à l'ellipsoïde d'inertie au point où la direction de $\vec{\Omega}$ coupe cet ellipsoïde (*fig.* 60). Puisque aucun couple n'est appliqué, la direction de $\vec{L}$ est fixe dans l'espace, et l'ellipsoïde d'inertie (qui est lié au solide) doit donc se déplacer en restant tangent à un plan fixe perpendiculaire à $\vec{L}$.

La distance D de l'origine O au plan fixe est égale à la projection de $\vec{\rho}$ sur la direction de $\vec{L}$:

$$D = \frac{\vec{\rho}\vec{L}}{|\vec{L}|}$$

Rappelons que $\vec{\rho}$ est dans la direction de $\vec{\Omega}$: $\vec{\rho} = \lambda\vec{\Omega}$ et que les coordonnées (X, Y, Z) de $\vec{\rho}$ vérifient la relation :

$$F\,(X, Y, Z) = 1$$

Remplaçons X, Y, Z par $\lambda\Omega_{x'}$, $\lambda\Omega_{y'}$, $\lambda\Omega_{z'}$.

$$1 = \lambda^2\,(I_{x'x'}\Omega^2_{x'} + I_{y'y'}\Omega^2_{y'} + I_{z'z'}\Omega^2_{z'})$$

soit encore : $1 = 2\,T\lambda^2$
où T est l'énergie cinétique définie au paragraphe *Énergie cinétique de rotation*.

Nous savons donc maintenant que :

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2\,T}}\vec{\Omega}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$D = \frac{\vec{\rho}\vec{L}}{|\vec{L}|} = \frac{1}{\sqrt{2\,T}}\frac{\vec{\Omega}\vec{L}}{|\vec{L}|}$$

Or : $\vec{L} = \bar{\bar{J}}\vec{\Omega}$, donc :

$$\vec{\Omega}\cdot\vec{L} = \vec{\Omega}\,\bar{\bar{J}}\,\vec{\Omega} = I_{x'x'}\Omega^2_{x'} + I_{y'y'}\Omega^2_{y'} + I_{z'z'}\Omega^2_{z'}$$

soit : $\vec{\Omega}\cdot\vec{L} = 2\,T$

Donc : $$D = \frac{\sqrt{2\,T}}{|\vec{L}|}$$

Le solide étant isolé, T et $|\vec{L}|$ sont constants, donc D est constante.

Le mouvement du solide sera donc un mouvement de précession tel que l'ellipsoïde d'inertie roulera sans glisser sur le plan fixe, la distance du centre de l'ellipsoïde à ce plan restant constante **(théorème de Poinsot).**

Solide symétrique

Dans le cas où le solide est symétrique, on peut facilement retrouver directement le résultat du théorème de Poinsot. Supposons que l'axe O*z* soit l'axe de symétrie (dans ce paragraphe, le système d'axes lié au solide O*x'y'z'* est le seul à intervenir, donc aucune confusion n'est possible avec le système d'axes fixes; pour cette raison, nous désignerons dorénavant ces axes par O*x*, O*y*, O*z* au lieu de O*x'*, O*y'*, O*z'*). Les deux moments d'inertie I_{xx} et I_{yy} sont donc égaux. Les équations d'Euler s'écrivent alors :

$$I_{xx}\frac{d\Omega_x}{dt} = (I_{xx} - I_{zz})\,\Omega_z\Omega_y$$

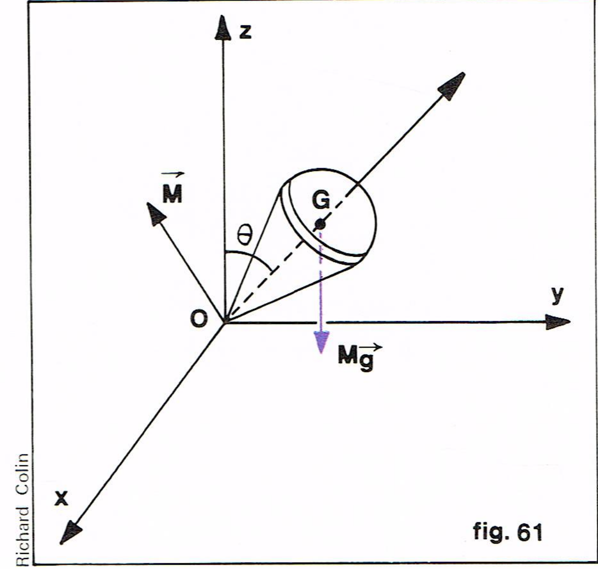
$$I_{xx}\frac{d\Omega_y}{dt} = -\,(I_{xx} - I_{zz})\,\Omega_z\Omega_x$$

$$I_{zz}\frac{d\Omega_z}{dt} = 0$$

La dernière équation montre que Ω_z est constant. Pour résoudre les deux autres, nous pouvons par exemple déduire $\frac{d\Omega_y}{dt}$ de la seconde équation et l'introduire dans la première équation après avoir dérivé celle-ci :

$$\frac{d^2\Omega_x}{dt^2} = -\left(\frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{xx}}\Omega_z\right)^2\Omega_x$$

Nous reconnaissons là une équation caractéristique d'un mouvement harmonique, indiquant que Ω_x varie sinusoïdalement dans le temps :



$$\Omega_x = A\sin\omega t \quad \text{où}\quad \omega = \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{xx}}\Omega_z$$

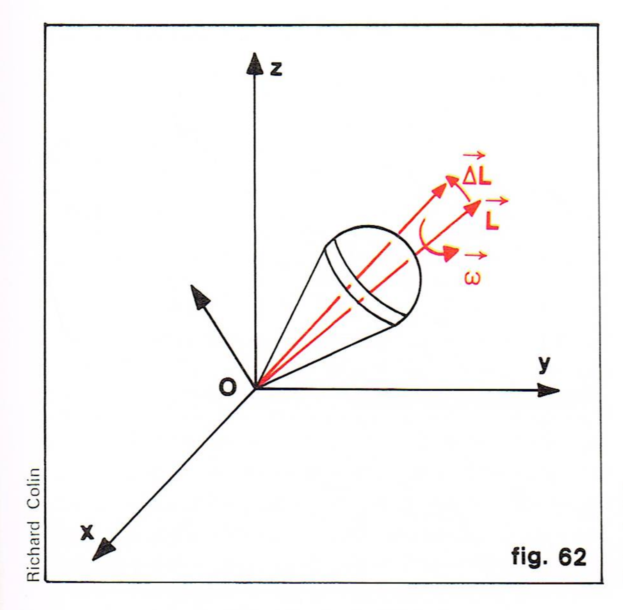
On démontre de même que : $\Omega_y = A\cos\omega t$,
ce qui signifie que le vecteur $\vec{\Omega}$ a une amplitude constante et tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de O*z*. Il faut se rappeler que O*z* n'est pas nécessairement lui-même fixe dans l'espace, puisque O*xyz* est un système d'axes lié au solide. Ce phénomène de précession n'apparaît pas pour une sphère parfaite, et son amplitude est d'autant plus grande que I_{xx} et I_{zz} sont plus différentes.

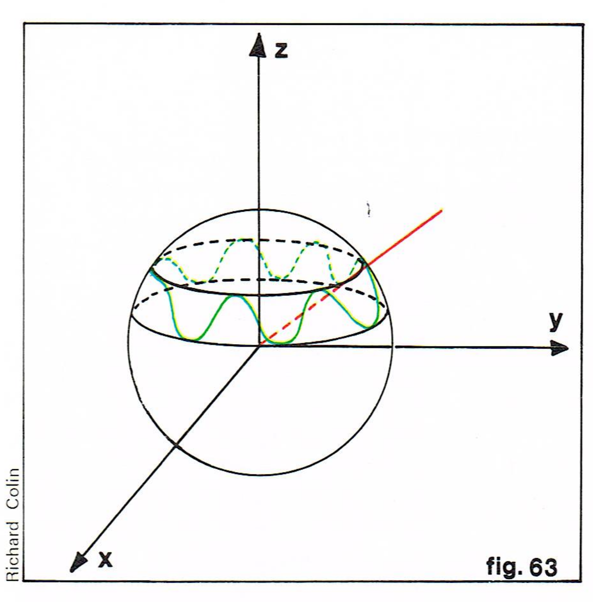
Un phénomène de ce genre a été observé pour la Terre, qui présente un léger renflement à l'équateur, de sorte que le rapport $\frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{xx}}$ est de l'ordre de 0,003; la fréquence de précession ω est donc de l'ordre de $0{,}003\,\Omega_z \simeq \frac{\Omega_z}{300}$, ce qui donne donc une période de 300 jours environ. Un observateur placé au pôle Nord devrait donc voir l'axe de rotation de la Terre tracer un cercle de quelques mètres de diamètre autour du pôle. La période effectivement observée est de 426 jours, et la courbe décrite par l'extrémité de $\vec{\Omega}$ est fort irrégulière. On interprète ces fluctuations comme dues à des phénomènes atmosphériques et à une déformation de la Terre consécutive aux variations de $\vec{\Omega}$; ce phénomène donne une idée de la rigidité de la Terre.

Il est très important de noter également que si, initialement, $\Omega_y = 0$, alors $\Omega_x = 0$ et le solide continue à tourner indéfiniment dans la direction fixe O*z*.



▶ *La toupie : un jeu d'enfant bâti sur un principe simple de mécanique.*





◀ *A gauche, figure 62 : sous l'action de la pesanteur, la toupie tend à basculer, ce qui lui confère un mouvement cinétique supplémentaire $\vec{\Delta L}$. A droite, figure 63 : mouvement de précession et de nutation d'un gyroscope.*

Mouvement d'un solide symétrique possédant un point fixe : effet gyroscopique

Nous considérons maintenant une toupie symétrique de masse M ayant un point fixe O (*fig.* 61), soumise à son propre poids. La résultante des forces extérieures est une force Mg verticale passant par son centre de gravité. Le solide est donc soumis à un moment M horizontal, perpendiculaire à l'axe de la toupie. L'équation du mouvement est donc :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Supposons que ce solide soit lâché sans vitesse initiale : il a donc à l'instant $t = 0$ un moment cinétique nul. A l'instant Δt, il aura un moment cinétique $\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$, parallèle à $\vec{M}$, donc horizontal. Il acquerra donc un vecteur de rotation qui, parce que la toupie est symétrique et que $\vec{M}$ est perpendiculaire à l'axe de la toupie, sera parallèle à $\vec{M}$. Autrement dit, on aura un phénomène très évident : la toupie va basculer autour du point O avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ qui dépendra du temps puisque $\vec{M}$ dépend de l'angle θ.

Supposons maintenant que, avant de lâcher la toupie, on l'ait mise en rotation très rapide $\vec{\omega}$ autour de son axe Oz (*fig.* 62). Elle possède donc initialement un moment cinétique $\vec{L}_0$ porté par Oz ; l'effet de la force de pesanteur sera de lui ajouter un petit vecteur $\Delta\vec{L}$ donné par :

$$\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$$

Comme $\Delta\vec{L}$ est très petit devant $\vec{L}_0$, et si nous admettons que la vitesse de rotation est suffisamment rapide pour que l'axe de rotation reste toujours aligné sur la direction de $\vec{L}$, nous en déduisons que l'axe du gyroscope va se mettre à tourner autour de l'axe vertical. Au bout d'un temps t, le gyroscope aura tourné d'un angle :

$$\Delta\varphi \simeq \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{|\vec{M}|\ \Delta t}{L_0}$$

Soit $\mathcal{J}$ le moment d'inertie de la toupie par rapport à son axe de rotation Oz ; nous pouvons exprimer le moment cinétique initial :

$$L_0 = \mathcal{J}\omega$$

La vitesse angulaire de précession est donc :

$$\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{|\vec{M}|}{\mathcal{J}\omega}$$

Par conséquent, nous constatons que la rotation du solide a pour effet de mettre en mouvement son centre de gravité dans un sens perpendiculaire aux forces qui s'exercent sur celui-ci. Ce paradoxe apparent est dû au fait que la démonstration que nous avons donnée est excessivement simplifiée. En fait, le solide commence bien par basculer comme s'il n'était pas en rotation, et ce n'est qu'ensuite que la précession va commencer. Le véritable mouvement du corps est indiqué sur la *figure* 63 : au mouvement de précession vient s'ajouter un petit mouvement appelé mouvement de nutation. L'amplitude de ce mouvement est inversement proportionnelle à ω^2, de sorte que, pour des vitesses de rotation suffisantes, le mouvement de nutation est imperceptible.

Ce comportement d'un solide tournant à grande vitesse et ayant un point fixe est appelé *effet gyroscopique*. Il en existe de nombreux exemples dans la vie courante.



▼ *Un gyroscope en mouvement.*



Ph. Michel - Explorer

▲ *Un exemple d'effet gyroscopique : le motocycliste.*

▼ *A gauche, figure 65 : solide en rotation autour de l'axe fixe x'x. A droite, figure 64 : suspension à la Cardan permettant à l'axe du gyroscope de garder une direction fixe dans l'espace.*

Par exemple, un motocycliste s'incline pour prendre un virage : il exerce un couple dirigé vers l'arrière, s'il s'incline à gauche ; les roues, qui constituent des gyroscopes, sont alors soumises à un mouvement de précession qui les fait tourner à gauche, ce qui est le but recherché.

Si le corps en rotation est monté de telle sorte que son point fixe soit son centre de gravité, il n'y a plus de couple appliqué. On peut alors le monter dans une armature à la Cardan (*fig.* 64), de telle sorte qu'il pointera en permanence dans une direction fixe de l'espace. Cette propriété extrêmement importante est utilisée dans tous les systèmes de guidage par inertie, gyrocompas, indicateurs d'horizon, etc.

Solide en rotation autour d'un axe fixe

Équations du mouvement

Nous considérons maintenant un solide tournant autour d'un axe $x'x$ défini par deux points fixes O et O′ (*fig.* 65). Ce solide est soumis à des forces extérieures dont la résultante est $\vec{F}$ et le moment résultant $\vec{M}$ par rapport à O ; nous désignons par $\vec{R}$ et $\vec{R}'$ les réactions des paliers supportant l'axe O et O′ et par $\vec{M}'$ le moment de la réaction en O′ par rapport à O (le moment de la réaction $\vec{R}$ est évidemment nul). Le théorème du moment cinétique s'écrit donc :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} + \vec{M}'$$

$\vec{L}$ est défini par la relation :

$$\vec{L} = \bar{\bar{\mathcal{J}}}\vec{\Omega}$$

où la seule composante non nulle de $\vec{\Omega}$ est $\Omega_x = |\vec{\Omega}|$:

$$L_x = I_{xx}\Omega_x$$

Comme R′ passe par l'axe $x'x$, la composante de $\vec{M}'$ le long de cet axe est nulle. L'équation du mouvement, en projection sur $x'x$, s'écrit donc simplement :

$$I_{xx}\frac{d\Omega_x}{dt} = M_x$$

car I_{xx} reste constant pendant la rotation autour de $x'Ox$.

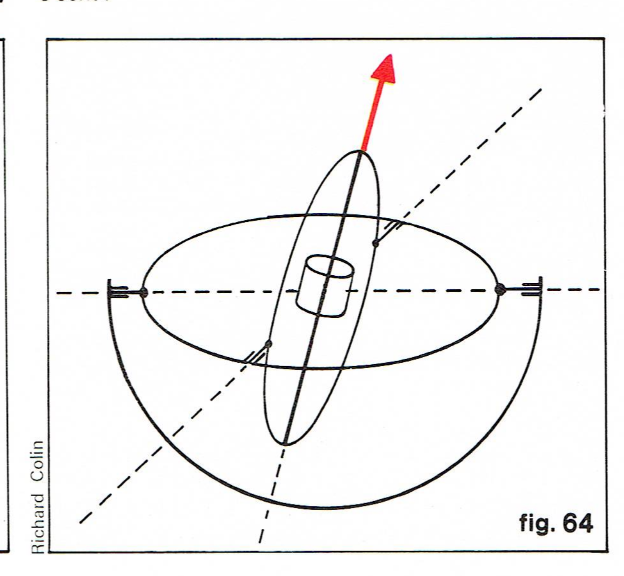
Réactions de l'axe

Il est très important, dans la pratique, de savoir à quelles forces l'axe va se trouver soumis, donc de connaître les réactions R et R′ en O et O′. Nous allons calculer ces réactions en supposant que l'on se trouve en régime permanent, c'est-à-dire que la vitesse angulaire Ω est constante. Le moment cinétique $\vec{L}$ a alors une longueur constante. Comme sa projection L_x est elle-même constante si $\frac{d\Omega_x}{dt} = 0$, il en résulte que l'extrémité de $\vec{L}$ décrit un cône de demi-angle au sommet θ ; le vecteur $\frac{d\vec{L}}{dt}$ est donc tangent au cercle décrit par l'extrémité de $\vec{L}$, et son module est $I_{xx}\Omega_x^2 \operatorname{tg} \theta$. Le théorème du moment cinétique s'écrit :

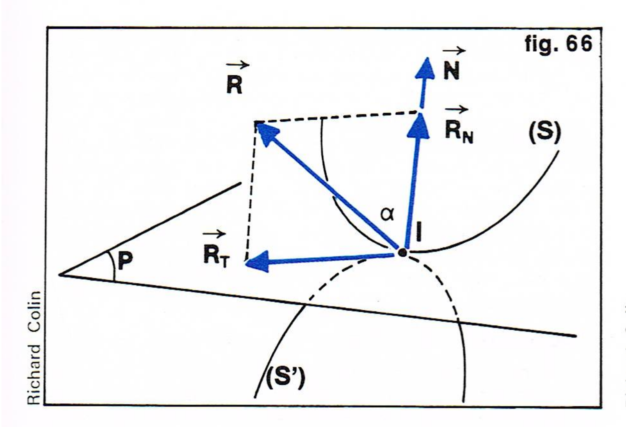
$\vec{R}$ $\vec{L}$ G $\vec{R}'$ θ d x′ O H O′ x

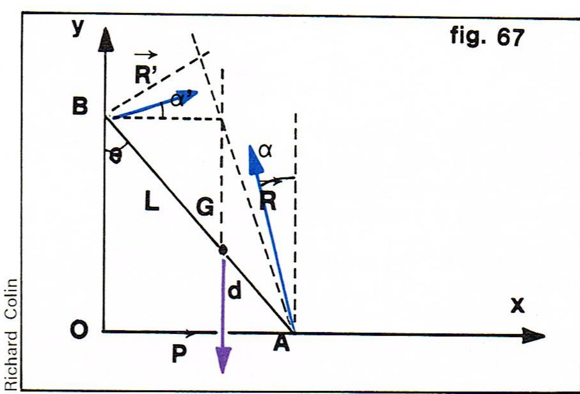
fig. 65

Richard Colin



Richard Colin





◀ *A gauche, figure 66 : force de frottement entre deux solides (S) et (S').*
A droite, figure 67 : à quelle condition l'échelle AB est-elle en équilibre ?

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{R'}$$

Il faut compléter cette équation par l'équation du mouvement du centre de gravité G ; celui-ci est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon HG = *d* ; l'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{R'} = - M\Omega_z^2\overrightarrow{HG}$$

Ces deux équations déterminent les réactions que les paliers exercent sur les axes.

On voit que, si, d'une part, l'axe de rotation est un axe principal d'inertie, et si, d'autre part, le centre de gravité du solide est sur l'axe de rotation, les réactions sont les mêmes que si le solide était immobile.

Si l'une ou l'autre de ces conditions n'est pas réalisée, les réactions possèdent des composantes variables avec le temps et qui sont proportionnelles au carré de la vitesse de rotation. Ces composantes peuvent devenir extrêmement grandes et entraîner la rupture de l'arbre. Il est donc très important pour les machines tournant à grande vitesse de réaliser l'équilibrage statique (amener G sur $x'x$) et l'équilibrage dynamique (amener $\vec{L}$ parallèle à $x'x$). Cet équilibrage est souvent réalisé par des balourds, petites masses que l'on fixe sur le solide en des points déterminés ; c'est en particulier le cas des roues d'automobiles sur les jantes desquelles on observe très fréquemment un balourd.

Statique des solides

Nous avons considéré jusqu'ici les équations du mouvement de points matériels ou d'ensembles de points matériels. Nous allons maintenant envisager les équations régissant l'équilibre statique de solides indéformables, ce qui présente évidemment un intérêt considérable pour toutes les constructions.

L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit, pour un solide immobile :

$$\sum_i F_i = 0$$

Quant au théorème du moment cinétique, il s'écrit :

$$\sum_i M_i = 0$$

Un solide est donc en équilibre lorsque la résultante des forces appliquées et la résultante des moments de ces forces sont nulles. En écrivant ces deux relations en projection sur les trois axes, on obtient six équations qui déterminent l'équilibre du solide.

Frottements

Les frottements jouent un rôle particulièrement important dans l'équilibre des solides, comme on peut le constater chaque jour : par exemple, une échelle appuyée contre un mur n'est en équilibre que grâce aux frottements contre le sol et le mur.

Frottement de glissement

Supposons que deux solides (S) et (S') soient en contact en un point I (*fig.* 66). Le solide (S') exerce sur (S) une réaction $\vec{R}$, passant par I. En l'absence de frottement, la réaction $\vec{R}$ est normale au plan tangent aux deux solides en I, de sorte que, si l'on exerce sur (S) une force, aussi minime soit-elle, présentant une composante parallèle au plan (P), le solide (S) glissera sur le solide (S').

Si, en revanche, il y a frottement, la réaction $\vec{R}$ n'est pas nécessairement perpendiculaire au plan tangent, mais fait avec la normale $\vec{N}$ un angle α. Cet angle est tel que la composante tangentielle R_T de la réaction équilibre la composante tangentielle de la force appliquée : le glissement est empêché et les deux solides restent en équilibre.

Il est évident que, si l'on augmente la force appliquée, cette situation ne peut se prolonger indéfiniment : il vient un moment où les frottements ne peuvent plus s'opposer au déplacement. La loi, purement expérimentale, qui détermine ce moment est la suivante : les deux solides resteront en équilibre tant que la réaction $\vec{R}$ restera à l'intérieur d'un cône de demi-angle au sommet φ_0, la valeur de φ_0 dépendant uniquement de la nature des deux surfaces en contact.

On appelle coefficient de frottement de glissement statique la quantité $f_0 = \text{tg}\ \varphi_0$. On a donc :

$$|R_T| \leqslant f_0\,|R_N|$$

pour qu'il n'y ait pas de glissement.

Lorsque le contact est sans frottement, la réaction est normale au plan tangent, donc $\varphi_0 = 0$. Le coefficient de frottement est donc nul.

Lorsque deux corps sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, il y a toujours un frottement ; la composante tangentielle de la réaction est alors colinéaire à la vitesse de glissement, de sens opposé, et son module est tel que l'on ait :

$$|R_T| = f\,|R_N| = |R_N|\ \text{tg}\ \varphi$$

Contrairement au cas du frottement statique, le frottement cinétique se traduit par une égalité et non par une inégalité.

Frottement de pivotement

Supposons maintenant que, au lieu d'une force tendant à faire glisser (S) sur (S'), on applique au solide (S) un couple C tendant à le faire pivoter autour du point I. Là encore, on constate que, au-delà d'une certaine valeur de couple, les forces de frottement deviennent incapables de s'opposer au mouvement. La loi, purement expérimentale, est la suivante :

$$|C_N| \leqslant K_0\,|R_N|$$

où $|C_N|$ désigne la composante normale du couple, et $|R_N|$ la composante normale de la réaction. Le coefficient K_0, appelé coefficient de frottement de pivotement, ne dépend que de la nature des surfaces en contact.

Exemple : problème de l'échelle

Nous considérons (*fig.* 67) une échelle AB, de longueur L, appuyée contre un mur, portant une charge, et nous cherchons quel est l'angle limite θ que peut faire l'échelle pour ne pas glisser. Nous appelons f et f' les coefficients de frottement sur le sol et le mur respectivement. Soit $\vec{P}$ le poids total de l'échelle et de la charge, appliqué au centre de gravité G qui se trouve à une distance d = AG de l'extrémité inférieure de l'échelle.

Les forces appliquées sont : le poids $\vec{P}$ appliqué en G, la réaction $\vec{R}$ appliquée en A, faisant un angle α avec la verticale, la réaction $\vec{R'}$, appliquée en B, faisant un angle α' avec l'horizontale.

Écrivons que la résultante des forces est nulle, en projection sur Ox et Oy :

$$R \sin \alpha - R' \cos \alpha' = 0$$
$$R \cos \alpha + R' \sin \alpha' - P = 0$$

Écrivons que le moment des forces par rapport à A est nul :

$$Pd \sin \theta - R'L \cos (\theta - \alpha') = 0$$

Si l'angle θ est fixe, les quantités R, R', α, et α' sont inconnues. Or nous n'avons que trois équations : nous ne pouvons donc déterminer les quatre inconnues ; on dit que le *système* est *hyperstatique*.

L'équilibre limite est atteint lorsque $\alpha = \varphi$ et $\alpha' = \varphi'$. Nous cherchons maintenant à calculer R, R' et surtout l'inclinaison limite θ_l : nous pouvons trouver ces trois inconnues puisque nous avons trois équations. Les deux premières donnent :

$$R = P \frac{\cos \varphi'}{\cos (\varphi' - \varphi)} \quad \text{et} \quad R' = P \frac{\sin \varphi}{\cos (\varphi' - \varphi)}$$

Nous déduisons alors θ_l de la troisième équation :

$$Pd \sin \theta_l - PL \frac{\sin \varphi}{\cos (\varphi' - \varphi)} \cos (\theta_l - \varphi') = 0$$

$$d \sin \theta_l - L \frac{\sin \varphi}{\cos (\varphi' - \varphi)} (\cos \theta_l \cos \varphi' + \sin \theta_l \sin \varphi') = 0$$

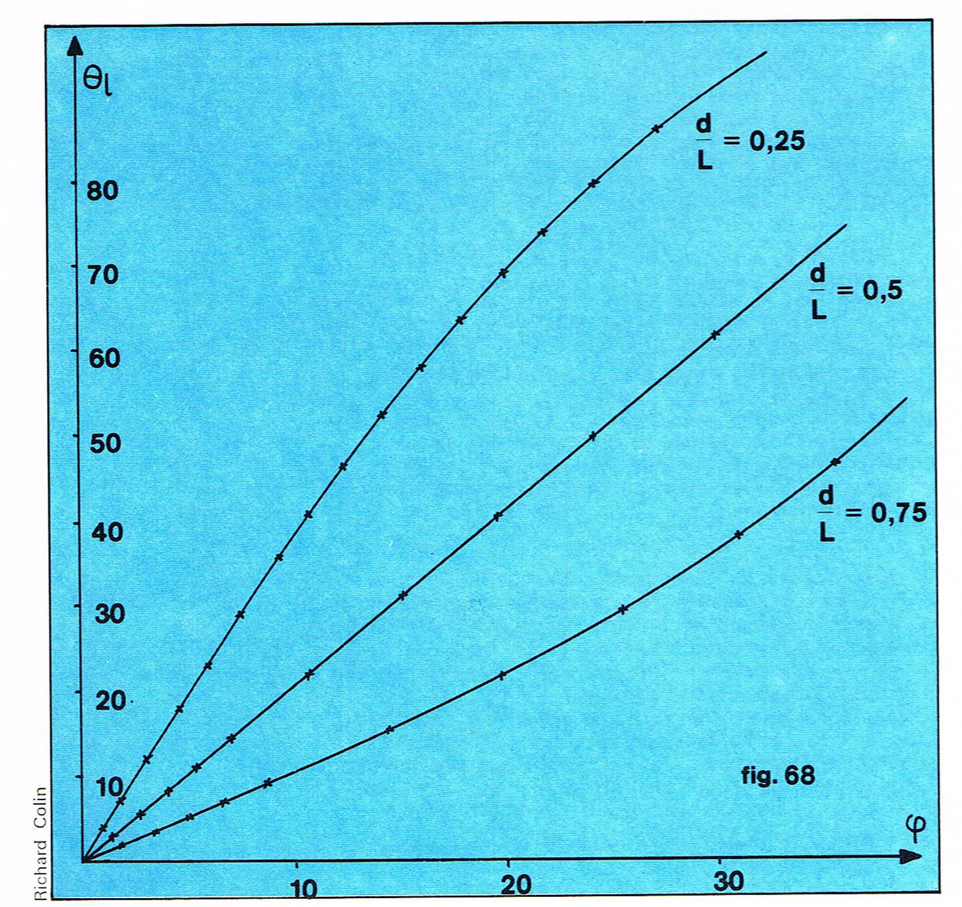
soit :

$$\text{cotg}\, \theta_l = \frac{d}{L} (\text{cotg}\, \varphi + \text{tg}\, \varphi') - \text{tg}\, \varphi'$$

Si le mur et le sol sont de la même matière, on a $\varphi = \varphi'$; l'angle limite est alors :

$$\text{cotg}\, \theta_l = \frac{d}{L} (\text{cotg}\, \varphi + \text{tg}\, \varphi) - \text{tg}\, \varphi$$

▼ ***Figure 68 :*** ***angle que peut faire l'échelle avec la verticale, en fonction de l'angle de frottement*** φ, ***pour diverses valeurs de*** $\frac{d}{L}$.



L'allure de θ_l en fonction de φ est représentée sur la *figure* 68. On voit que, évidemment, plus le frottement est fort, plus l'angle limite est grand : pour un frottement très faible, l'échelle doit être quasi verticale. D'autre part, pour un frottement donné et un angle θ donné, on sera d'autant plus en sécurité que l'on sera bas sur l'échelle : par exemple, pour $\varphi = 20°$ et $\theta = 40°$, on est en sécurité pour $\frac{d}{L} = 0{,}25$, puisque $\theta < \theta_l$, et on arrive à la limite du glissement pour $\frac{d}{L} = 0{,}50$.

Principe des travaux virtuels

L'équilibre d'un système statique peut, nous l'avons vu dans l'exemple précédent, être déterminé en écrivant que la résultante des forces et le moment résultant sont nuls. Il existe cependant une autre méthode, fondée sur le calcul du travail des forces.

Nous savons en effet que, lorsqu'un corps est soumis à des forces conservatives, c'est-à-dire dérivant d'un potentiel **V**, on peut exprimer les forces comme dérivées de **V** par rapport aux variables d'espace (x, y, z) et les moments comme dérivées de **V** par rapport aux variables angulaires (ψ, θ, φ).

Supposons que l'on ait un système de solides indéformables à l'équilibre, et imaginons que l'on effectue un petit déplacement de chacun de ces solides, en respectant les liaisons : nous appelons une telle opération un *déplacement virtuel compatible avec les liaisons*.

Supposons que les contacts entre les solides se fassent sans frottement : les réactions sont perpendiculaires au plan tangent commun aux deux surfaces en contact ; or, pour qu'un déplacement soit compatible avec la liaison, il doit nécessairement se faire dans le plan tangent : dans un tel déplacement, le travail de la réaction est donc nul, puisque celle-ci est perpendiculaire au déplacement. Or, chaque solide, étant à l'équilibre, est soumis à des forces dont la résultante est nulle. Le travail effectué par l'ensemble de ces forces est donc nul. Or, le travail des forces de contact est nul, comme nous venons de le voir. Il en résulte que le travail de toutes les forces autres que les forces de contact est nul dans un déplacement virtuel compatible avec les liaisons.

Ce théorème, il faut le noter, n'apporte rien aux lois fondamentales de la statique ; il est simplement un outil commode pour résoudre les problèmes de statique.

Statique graphique

Outre les méthodes que nous venons de citer, un certain nombre de méthodes purement graphiques sont utilisées pour résoudre les problèmes de constructions mécaniques, lorsque l'on a un système de forces disposées dans un plan. Ces méthodes (polygone dynamique, polygone funiculaire) permettent d'obtenir rapidement et simplement, mais de façon relativement peu précise, les valeurs numériques des réactions aux appuis et des forces appliquées en divers points.

La formulation hamiltonienne de la mécanique

Jusqu'ici, nous avons vu les principes de la mécanique sous leurs formes lagrangienne et newtonienne, puis nous avons considéré un certain nombre d'applications de ces principes à divers aspects de la dynamique et de la statique. Nous allons maintenant revenir aux premiers principes pour donner de la mécanique une autre formulation dite *formulation hamiltonienne,* qui est d'une très grande généralité — et qui est par conséquent assez abstraite. Cette voie nous conduira jusqu'aux premiers principes de la mécanique quantique.

Définition de l'hamiltonien

Rappelons tout d'abord les **équations de Lagrange.**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

La fonction L, appelée lagrangien, est $L = T - V$ où T est l'énergie cinétique et **V** l'énergie potentielle ; q_i est une coordonnée généralisée de la i-ième particule du système et $\dot{q}_i$ est la dérivée de q_i par rapport au temps.

Nous avons également vu que, pour un système conser-



Harlingue - Roger Viollet

◀ *Le mathématicien* Hamilton *(1805-1865).*

vatif, l'énergie totale est conservée. Supposons que le système considéré soit conservatif et que, de plus, les contraintes soient indépendantes du temps. La fonction L ne dépend alors pas explicitement du temps, de telle sorte que l'on peut écrire :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}$$

Nous pouvons remplacer $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ par sa valeur obtenue d'après l'équation de Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

de sorte que nous obtenons :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}$$

ce qui peut encore s'écrire :

(38) $$\frac{d}{dt}\left[L - \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] = 0$$

Nous définissons l'**hamiltonien** par la relation :

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

soit encore :

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

La relation **(38)** montre donc que l'hamiltonien est une constante du mouvement : nous allons voir que H n'est autre que l'énergie totale du système.

Pour un système conservatif dans lequel V est indépendant de la vitesse, on a :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

Nous pouvons donc écrire l'hamiltonien sous la forme :

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L$$

Or, l'énergie cinétique T est une fonction quadratique homogène des vitesses ; on peut alors facilement démontrer que :

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2\,T$$

Par conséquent : $H = 2\,T - L = 2\,T - (T - V)$
ou encore : $H = T + V$
H est donc l'*énergie totale* du système, et, d'après la relation **(38)**, H est constant : nous retrouvons bien ainsi le théorème de conservation de l'énergie.

Équations du mouvement de Hamilton

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les coordonnées généralisées $q_i\ (t)$ et les vitesses généralisées $\dot{q}_i\ (t)$ à partir du moment où l'on connaît les coordonnées et les vitesses à l'instant initial, puisque les équations différentielles sont du second ordre ; le lagrangien lui-même est fonction des q_i, des $\dot{q}_i$ et du temps. L'hamiltonien, lui, est fonction des q_i, des p_i et de t ; il doit donc nous permettre de calculer les q_i et les p_i en fonction du temps. Considérons en effet l'hamiltonien :

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

La différentielle de H est :

(39) $$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Mais d'autre part, d'après la définition de H :

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Or, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ par définition des moments généralisés, et, de plus, $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$ en vertu de l'équation de Lagrange.

Par conséquent, la différentielle dH devient :

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Si nous identifions cette expression à la relation **(39)**, nous obtenons :

(40) $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} \end{array}\right.$$

Les équations **(40)** sont les **équations de Hamilton ;** elles sont au nombre de $2\,n$, où n est le nombre de degrés de liberté du système, et elles sont équivalentes aux équations de Lagrange. La procédure à suivre, pour résoudre un problème par les équations de Hamilton, consiste donc à calculer le lagrangien $L = T - V$, puis à former l'hamiltonien $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$, et, enfin, à appliquer les équations de Hamilton pour trouver les quantités $\dot{q}_i$ et $\dot{p}_i$; on obtient alors q_i et p_i à l'aide d'une intégration. Rappelons que l'hamiltonien ne doit être fonction que des q_i, des p_i et du temps.

Prenons l'exemple très simple d'un solide de masse m en chute libre dans le champ de pesanteur. L'énergie potentielle est $V = -mgz$, donc le lagrangien vaut :

$$L = \frac{1}{2} m\dot{z}^2 - mgz$$

La coordonnée généralisée étant z, le moment conjugué est :

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Nous pouvons donc exprimer la vitesse en fonction du moment : $\dot{z} = \frac{p_z}{m}$.

Formons l'hamiltonien : $H = p_z\dot{z} - L$.

L'hamiltonien n'est fonction que des coordonnées et des moments, non des vitesses ; nous devons donc utiliser l'expression de z en fonction de p_z, ce qui donne :

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + mgz$$

L'hamiltonien étant formé, nous appliquons les équations du mouvement :

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

$$-\dot{p}_z = \frac{\partial H}{\partial z} = mg$$

De la seconde équation, nous tirons :

$$p_z = -mgt + K$$

où K est une constante dépendant de la vitesse initiale. Reportant dans la première équation de Hamilton, nous obtenons après intégration :

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + Kt + K'$$

On trouve un mouvement uniformément accéléré. On pourrait évidemment aussi bien obtenir ce résultat en appliquant la loi fondamentale de la dynamique. Ce qui est important, c'est que les variables z et p_z jouent le rôle de deux variables indépendantes, alors que, dans la formulation de Lagrange, c'est z et $\dot{z}$ qui sont les deux variables.

Le principe de moindre action

Nous avons vu que l'on peut déduire les équations de Lagrange du principe de Hamilton qui est le suivant : si un système est caractérisé par des coordonnées généralisées q_i à un instant t_1 et des coordonnées généralisées q'_i à l'instant t_2, le chemin suivi pour aller d'un état à l'autre est tel que l'intégrale :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \qquad \text{soit extrémum.}$$

L est le lagrangien, qui est exprimé en fonction des coordonnées et des vitesses généralisées.

Puisque nous savons que nous pouvons prendre comme variables les coordonnées généralisées et les impulsions généralisées, nous pouvons énoncer un nouveau principe, dit **principe de moindre action ;** dans un système pour lequel l'hamiltonien est conservé, l'intégrale :

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i dt \quad \text{doit être extrémum.}$$

La différence entre les deux principes est la suivante :

– dans le cas du *principe de Hamilton*, les points de départ et d'arrivée ainsi que t_1 et t_2 sont fixés ;

– dans le cas du *principe de moindre action*, les points de départ et d'arrivée sont fixés, mais les instants t_1 et t_2 ne le sont pas ; en revanche, les chemins envisagés doivent être tels que l'hamiltonien soit conservé.

Reprenons l'exemple déjà considéré au paragraphe *Principe de Hamilton* d'un point matériel libre de masse m, qui passe à l'origine à l'instant t_1 et qui aboutit au point (X, 0, 0) à l'instant t_2. Cherchons quel est son mouvement entre t_1 et t_2. L'hamiltonien est :

$$H = T + V = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

La trajectoire doit être telle que l'intégrale

$$A = \int_{t_1}^{t2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dt$$

soit minimum puisque $p_x = mv_x$, $p_y = mv_y$, $p_z = mv_z$. De plus, l'hamiltonien doit être conservé :

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2 = \text{constante}$$

L'intégrale s'écrit donc :

$$A = mv_0^2 (t_2 - t_1)$$

Puisque v_0 est imposé par les conditions initiales, c'est $t_2 - t_1$ qui doit être minimal. Or, par définition :

$$t_2 - t_1 = \int_0^X \frac{dx}{v_x}$$

Or, v_x vaut au minimum v_0 ; la durée du trajet sera donc minimum si $v_x = v_0$ pendant tout le trajet ; on aura alors :

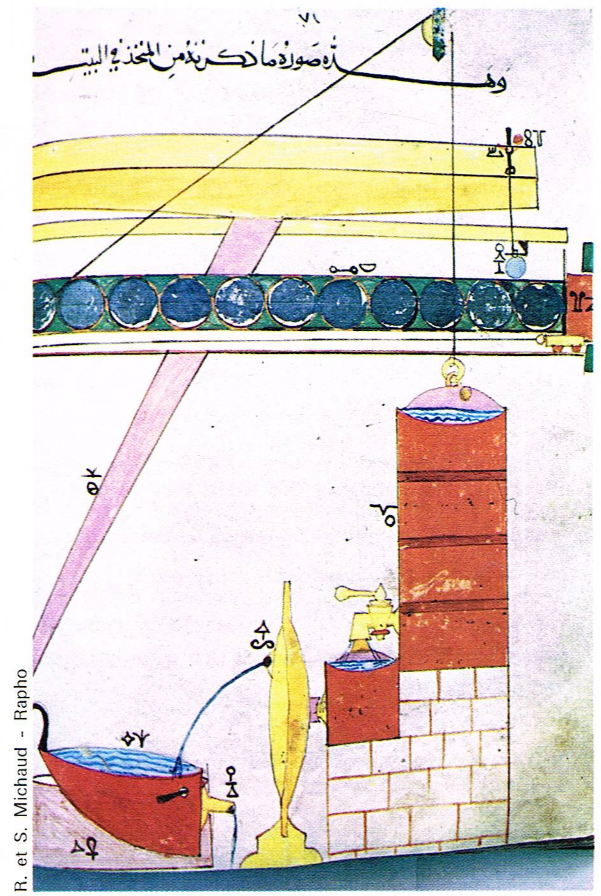
$$t_2 = t_1 + \frac{X}{v_0}$$

L'intégrale d'action sera donc minimum si le point se déplace en ligne droite à vitesse constante. On retrouve, bien sûr, le résultat obtenu à partir du principe de Hamilton, mais de façon très différente : nous avons été amené ici à minimiser la durée du trajet, alors que celle-ci est fixée dans le cas du principe de Hamilton.

Sous cette forme, le principe de moindre action s'apparente beaucoup au principe de Fermat qui régit l'optique géométrique : le chemin optique de la lumière entre deux points de l'espace est celui pour lequel la durée du trajet du rayon lumineux est minimum.

Les transformations canoniques et la théorie de Hamilton-Jacobi

Nous avons déjà indiqué que l'originalité de la formulation de Hamilton est qu'elle donne aux coordonnées et aux moments conjugués des rôles symétriques de variables indépendantes. Le choix de ces variables, pour résoudre un problème de mécanique, est très important, car un choix astucieux peut faciliter la résolution alors qu'un choix maladroit peut entraîner d'inextricables calculs. Par exemple, dans certains cas, on peut avoir intérêt à choisir comme coordonnées les coordonnées cartésiennes x et y, et dans un autre cas, les coordonnées polaires r et θ : aucun des deux choix n'aboutit à des solutions inexactes, mais l'un peut permettre de trouver la solution plus rapidement que l'autre. Il apparaît alors intéressant de savoir par quelles transformations on peut passer d'un système de coordonnées à un autre : ce sont les transformations ponctuelles, bien connues, et que nous avons utilisées à plusieurs reprises. Mais, par ailleurs, nous savons que l'hamiltonien dépend, non seulement des coordonnées q_i, mais aussi des moments p_i : il faut donc savoir également comment se transforment les moments dans un tel changement de variables. Nous nous trouvons donc devant le problème suivant : un système mécanique est décrit par des coordonnées généralisées $q_1, q_2, ..., q_i, ..., q_n$, par des moments généralisés $p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n$ et par un hamiltonien H dépendant de ces variables ; les équations du mouvement sont :



R. et S. Michaud - Rapho

▶ *Deux pages extraites du* **Livre des devis mécaniques** *(XIIIe siècle) [musée Topkapi ; Turquie].*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

et nous effectuons un changement de variables défini par les équations :

$$Q_i = Q_i\,(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n, t)$$
$$P_i = P_i\,(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n, t)$$

où les Q_i et les P_i sont les nouvelles coordonnées et les nouveaux moments. Il est évident que ces transformations sont intéressantes uniquement si elles nous permettent de rester dans la formulation de Hamilton, c'est-à-dire si l'on peut trouver un nouvel hamiltonien H′ tel que :

$$\textbf{(41)} \qquad \begin{cases} \dot{Q}_i = \dfrac{\partial H'}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\dfrac{\partial H'}{\partial Q_i} \end{cases}$$

Si un tel hamiltonien existe, on dit que l'on a effectué une transformation canonique.

Prenons un exemple extrêmement simple : supposons que les équations de transformation soient simplement :

$$\textbf{(42)} \qquad \begin{cases} Q_i = p_i \\ P_i = -q_i \end{cases}$$

Écrivons les équations de Hamilton avec les anciennes variables :

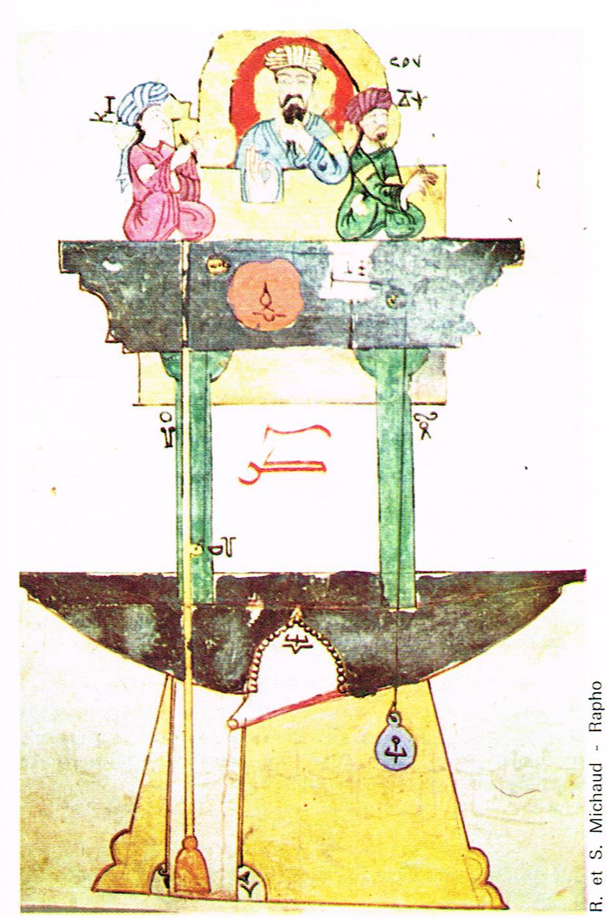
$$\textbf{(43)} \qquad \begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

Utilisons nos équations de transformation :

$$\dot{q}_i = -\dot{P}_i; \quad \dot{p}_i = \dot{Q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial Q_i}\frac{dQ_i}{dp_i} = \frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{dP_i}{dq_i} = -\frac{\partial H}{\partial P_i}$$



R. et S. Michaud - Rapho

Nous pouvons alors écrire les équations **(43)** sous la forme :

$$-\dot{P}_i = \frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

Si nous comparons ces équations aux équations **(41)**, nous voyons que le nouvel hamiltonien H′ est simplement identique à l'ancien hamiltonien H ; nous avons donc montré que les équations de transformation très simples **(42)** que nous nous sommes données forment une transformation canonique, et par la même occasion, nous avons trouvé l'expression du nouvel hamiltonien H′.

Revenons maintenant au cas général : le problème qui se pose, et que nous avons résolu dans un cas très particulier, est de savoir si une transformation donnée est une transformation canonique, et, dans l'affirmative, de trouver le nouvel hamiltonien H′.

Pour résoudre ce problème, utilisons le principe de Hamilton et la définition de l'hamiltonien ; pour les anciennes et les nouvelles variables :

$$I' = \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i P_i\dot{Q}_i - H'\right) dt \quad \text{minimum}$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i p_i\dot{q}_i - H\right) dt \quad \text{minimum}$$

On peut démontrer que, si ces deux conditions sont simultanément satisfaites, c'est que la différence entre les fonctions à intégrer est égale à la dérivée d'une fonction F arbitraire :

$$\textbf{(44)} \qquad \sum_i p_i\dot{q}_i - H - \sum_i P_i\dot{Q}_i + H' = \frac{dF}{dt}$$

Cette fonction F est évidemment fonction du temps, mais elle dépend aussi des P_i, des $\dot{Q}_i$, des p_i, et des $\dot{q}_i$, soit $4n$ variables ; mais les anciennes et les nouvelles variables ne sont pas indépendantes puisqu'elles sont liées par les relations de transformation : F ne dépend donc en fait que de $2\,n$ variables que l'on est libre de choisir en fonction de leur commodité : on peut prendre comme variables, outre le temps, les q_i et les Q_i, ou bien les q_i et les P_i, ou bien les Q_i et les p_i, ou encore les P_i et les p_i.

Prenons par exemple les q_i et les P_i comme variables ; on peut alors exprimer $\dfrac{dF}{dt}$ par :

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

L'équation **(44)** s'écrit alors :

$$\sum_i P_i\dot{Q}_i - H' - \sum_i p_i\dot{q}_i + H = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Si nous remarquons que $P_i\dot{Q}_i = \dfrac{d}{dt}(P_iQ_i) - Q_i\dot{P}_i$, nous trouvons, en identifiant terme à terme les deux membres de l'équation **(44)** :

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

$$H' = H + \frac{\partial G}{\partial t}$$

où la fonction G est définie par :

$$G = F - \sum_i P_iQ_i$$

Nous voyons donc que, dès que nous nous sommes fixé la fonction G, nous connaissons les nouvelles variables et le nouvel hamiltonien. G est appelée *fonction génératrice de la transformation canonique*.

Prenons un exemple de fonction génératrice :

$$G = \sum_i q_iP_i$$



Rapho



M. Gritscher - Rapho

▲ ***Jeux d'enfants, jeux d'adultes, les vitesses sont différentes mais le principe est le même.***

Les équations de transformation sont alors :

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} = P_i$$

$$Q_i = \frac{\partial G}{\partial p_i} = q_i$$

Les nouvelles variables sont identiques aux anciennes : la fonction génératrice choisie engendre la transformation identique.

Maintenant que nous savons effectuer un changement de variables respectant la forme hamiltonienne des équations de la mécanique, nous pouvons faire la remarque suivante, qui est d'une importance fondamentale : résoudre un problème de mécanique, c'est chercher à exprimer les coordonnées et les moments à un instant t en fonction des coordonnées et des moments à l'instant 0. En d'autres termes, nous cherchons à effectuer une transformation canonique qui transforme les coordonnées et les moments à un instant t en des quantités constantes qui seront les coordonnées et les moments à l'instant initial. La relation entre les nouvelles variables et les anciennes sera :

$$q = q\ (Q_0, P_0, t)$$
$$p = p\ (Q_0, P_0, t)$$

Ces relations sont très exactement les solutions de tout problème de mécanique, puisqu'elles donnent l'expression des coordonnées en fonction du temps et des conditions initiales.

Dans le système des nouvelles variables qui, rappelons-le, sont des constantes indépendantes du temps, les équations de Hamilton s'écrivent :

$$\frac{\partial H'}{\partial p_i} = \dot{Q}_i = 0$$

$$\frac{\partial H'}{\partial q_i} = -\dot{P}_i = 0$$

Le nouvel hamiltonien est relié à l'ancien par l'intermédiaire de la fonction génératrice :

$$H' = H + \frac{\partial G}{\partial t}$$

où G est fonction des anciennes coordonnées q_i, des nouveaux moments P_i et du temps ; nous savons donc que :

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

Cherchons la fonction génératrice qui rend H′ nul, ce qui assurera que $\frac{\partial H'}{\partial p_i} = \frac{\partial H'}{\partial q_i} = 0$. Cette fonction sera telle que :

$$H\ (q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n, t) + \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

ou encore :

$$H\left(q_1, q_2, ..., q_n, \frac{\partial G}{\partial q_1}, \frac{\partial G}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial G}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Cette dernière équation n'est pas autre chose qu'une équation aux dérivées partielles où G est la fonction inconnue. C'est elle qui fournira la solution au problème de mécanique considéré et, en ce sens, elle remplace à elle seule les $2n$ équations de Hamilton. Cette équation est appelée **équation de Hamilton-Jacobi.**

C'est une équation aux dérivées partielles, du premier ordre, où les $n + 1$ variables sont le temps t et les n coordonnées q_i. La solution S $(q_1, q_2, ..., q_n, t)$ de cette équation n'apparaît pas dans cette équation : seules ses dérivées premières apparaissent ; S ne sera donc définie qu'à une constante additive près. Par ailleurs, puisqu'il y a $n + 1$ variables, S doit dépendre de $n + 1$ constantes d'intégration k_i. Comme une de ces constantes est additive, il reste n constantes non additives $k_1, k_2, ..., k_n$ dans S :

$$S = S\ (q_1, q_2, ..., q_n, k_1, k_2, ..., k_n, t)$$

Ces constantes sont arbitraires ; par souci de commodité, nous prendrons pour ces constantes les n nouveaux moments $P_i : k_i = P_i$. Les nouvelles coordonnées Q_i sont alors données par la relation :

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$$

qui donne donc Q_i en fonction des p_i, q_i et t. Notre but initial était d'exprimer les q_i et p_i en fonction des coor-

données initiales Q_i et P_i et du temps : ce but sera atteint si nous pouvons inverser les relations précédentes.

Prenons l'exemple de l'oscillateur harmonique : un ressort de constante de rappel C portant une masse m. Nous avons vu que l'énergie potentielle est $\frac{1}{2} Cx^2$. Le *lagrangien* vaut :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} Cx^2$$

Le moment conjugué de la variable x est :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{x}$$

L'*hamiltonien* vaut :

$$H = p\dot{x} - L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} Cx^2$$

soit encore :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{Cx^2}{2}$$

L'équation de Hamilton-Jacobi est obtenue en remplaçant p par $\frac{\partial S}{\partial x}$ dans l'hamiltonien et en écrivant :

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Nous obtenons donc ici :

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{Cx^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Cherchons une solution de la forme :

$$S(x, k, t) = W(x) - kt$$

Remplaçant S par cette valeur dans l'expression de Hamilton-Jacobi, nous obtenons :

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \frac{Cq^2}{2} = k$$

ce qui donne par intégration :

$$W = \sqrt{mC} \int \sqrt{\frac{2k}{C} - q^2}\, dq$$

d'où

$$S = \sqrt{mC} \int \sqrt{\frac{2k}{C} - q^2}\, dq - kt$$

Ce qui nous intéresse, c'est de connaître Q :

$$Q = \frac{\partial S}{\partial k} = \sqrt{\frac{m}{C}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2k}{C} - q^2}} - t$$

Cette expression s'intègre sous la forme :

$$Q = -\sqrt{\frac{m}{C}}\, \text{Arc cos} \sqrt{\frac{C}{2k}}\, x - t$$

Nous pouvons maintenant inverser cette équation pour obtenir la solution de notre problème, c'est-à-dire x en fonction de Q et de t :

$$x = \sqrt{\frac{2k}{C}} \cos \omega (t + Q)$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$: nous obtenons bien le mouvement habituel d'un oscillateur harmonique. Il suffit de tenir compte des conditions initiales pour déterminer Q et k : si à $t = 0$ on lâche la masse en $x = x_0$ avec une vitesse initiale nulle, nous trouvons :

$$k = \frac{Cx_0^2}{2}$$

Nous remarquons que k n'est autre que l'énergie totale du système, ce qui n'a rien de surprenant, puisque, par définition :

$$k = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

et que l'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit :

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = H - k = 0$$

Nous avons donc vu, dans cet exemple simple, comment l'équation de Hamilton-Jacobi fournit la solution d'un problème de mécanique. Dans cet exemple, l'hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, ce qui nous a permis de séparer t des autres variables, en cherchant une solution de la forme :

$$S(q_1, q_2, ..., q_n, k_1, k_2, ..., k_n, t) = W(q_1, ..., k_1, ...) - kt$$

ce qui ramène l'équation à l'expression :

$$H\left(q_1, ..., q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = k$$

où le temps n'apparaît plus.

Si, comme dans l'exemple précédent, l'hamiltonien est identique à l'énergie totale $E = T + V$, alors S se met sous la forme :

$$S = W - Et$$

Les premiers pas vers la mécanique quantique

Restons dans l'hypothèse où l'hamiltonien est une constante du mouvement, et s'identifie à l'énergie totale du système. S est alors fonction des q_i, des P_i et de t, tandis que W n'est fonction que des q_i et des P_i (ces derniers, rappelons-le, étant des constantes). Nous pouvons donc, dans l'espace de configuration — c'est-à-dire dans l'espace des q_i — définir des surfaces sur lesquelles W est constante et des surfaces sur lesquelles S est constante : les premières sont fixes dans l'espace, tandis que les secondes se déplacent. Par exemple, supposons qu'à un instant t la surface constituée des points pour lesquels S a une certaine valeur S_0 coïncide avec la surface constituée des points pour lesquels $W = S_0$. A l'instant $t + dt$, la surface $W = S_0$ est la même qu'à l'instant t, tandis que la surface $S = S_0$ coïncide maintenant avec la surface $W = S_0 + Edt$: les surfaces à S constante se déplacent un peu comme le ferait un front d'onde acoustique ou lumineuse, avec une certaine vitesse de propagation.

Considérons pour simplifier le problème le système formé par un seul point matériel : les coordonnées généralisées sont simplement trois coordonnées (x, y, z) du point matériel considéré; considérons (*fig.* 69) deux surfaces voisines $W = S_0$ et $W = S_0 + Edt$; elles sont distantes de ds, de sorte que la vitesse de propagation est : $u = \frac{ds}{dt}$.

Or, ds est lié au gradient de W par la relation :

$$|\overrightarrow{\text{grad}}\, W| = \frac{dW}{ds}$$

Par ailleurs, nous venons de voir que $dW = Edt$.
Il en résulte que :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{E}{|\overrightarrow{\text{grad}}\, W|}$$

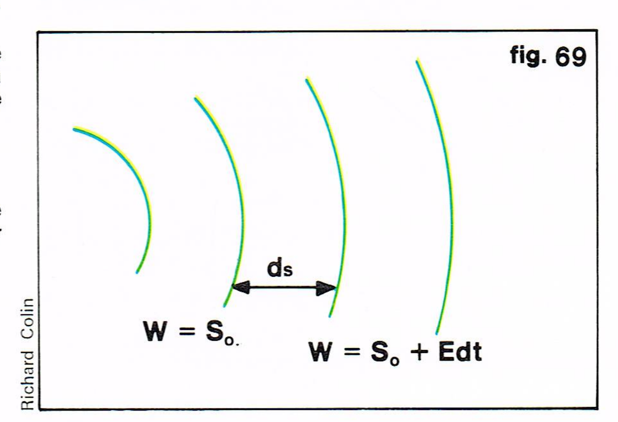
Or, l'équation de Hamilton-Jacobi, pour une particule libre, a la forme :

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right) + V = E$$

Ceci nous donne directement le module de $\overrightarrow{\text{grad}}\, W$:

$$|\overrightarrow{\text{grad}}\, W| = \sqrt{2m(E - V)}$$

et, par conséquent, la vitesse de propagation du front d'onde s'écrit :



◀ ***Figure 69 :** deux surfaces voisines pour lesquelles la fonction W est constante.*



Guillard - Réalités

▲ ***Une application du principe de l'équilibre des forces : les mobiles de Calder (copyright A.D.A.G.P., 1976).***

$$\frac{ds}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2\,m\,(E - V)}} = \frac{E}{\sqrt{2\,mT}}$$

Or, $T = \frac{1}{2}mv^2$; il en résulte donc que :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{E}{mv}$$

La vitesse de propagation de la surface est donc inversement proportionnelle à la vitesse de déplacement de la particule elle-même. Cherchons maintenant la relation entre la trajectoire de la particule et la forme de la surface à W constante : par définition de W, on a $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$; dans le cas de notre particule, cela s'écrit $\vec{p} = \overrightarrow{\text{grad}}\,W$: cela signifie que $\vec{p}$ (donc $\vec{v}$) est normale aux surfaces à S constante. La trajectoire du point matériel est donc normale aux surfaces à S constante. Lorsque le système n'est pas restreint à un point matériel unique, ces résultats restent valables.

Notons que la propriété que nous venons d'établir montre qu'il existe un lien, au moins formel, entre l'optique et la mécanique classique : en optique, les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'onde ; de la même manière, la trajectoire d'un point matériel est orthogonale aux surfaces à S constante.

Le principe de moindre action indique que, pour une particule, l'intégrale

$$\int \sqrt{2\,mT}\,ds$$

doit être minimum ; or $\sqrt{2\,mT}$ est inversement proportionnel à la vitesse de propagation de l'onde ; de plus, l'indice optique est $n = \frac{c}{\left(\frac{ds}{dt}\right)}$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Le principe de moindre action s'écrit donc :

$$\int n\,ds \text{ minimum}$$

Sous cette forme, le principe de moindre action s'identifie au principe de Fermat, qui indique que le chemin optique doit être minimum.

Pour en revenir au déplacement d'une particule, nous avons vu que tout se passe comme si une certaine onde, dont les surfaces d'onde sont les surfaces à S constante, accompagnait la particule dans son déplacement, mais nous n'avons rien dit quant à la nature ou la fréquence de cette onde. L'équation de propagation d'une onde est :

$$\Delta\varphi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

où u est la vitesse de propagation de l'onde et où :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

si nous nous restreignons à une dimension, la fonction φ est de la forme :

$$\varphi = A\cos\left(\frac{2\,\pi x}{\lambda} - 2\,\pi\nu t + \Phi\right)$$

où λ est la longueur d'onde, ν la fréquence et Φ une constante, λ et ν étant liés par : $\lambda\nu = u$.

Puisque les surfaces où S est constante sont des surfaces d'onde, c'est donc que S doit être proportionnelle à la phase :

$$S = W - Et = K\left(\frac{2\,\pi x}{\lambda} - 2\,\pi\nu t\right)$$

d'où il résulte que l'énergie E doit être proportionnelle à la fréquence ν :

$$E = h\nu$$

h est une constante universelle appelée *constante de Planck* ($h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ joule · seconde).

Comme $\lambda\nu = u$ et que $u = \frac{E}{p}$ on en déduit aisément que la longueur d'onde est liée à l'impulsion par la relation :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Nous aboutissons donc au résultat suivant : pour décrire le mouvement d'une particule, nous pouvons soit user de l'image classique, soit considérer une onde, dont la fréquence est liée à l'énergie de la particule par :

$$E = h\nu$$

et dont la longueur d'onde est liée à l'impulsion par $\lambda = \frac{h}{p}$, la trajectoire de la particule étant orthogonale aux surfaces d'onde.

En tenant compte de ces dernières relations, l'équation de propagation de l'onde peut s'écrire :

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\Delta\psi + V\psi = E\psi$$

où $\hbar = \frac{h}{2\,\pi}$

Cette dernière équation n'est autre que l'*équation de Schrödinger*, qui est à la base de la mécanique quantique. La signification physique de l'onde ψ ne sera pas développée ici, car elle sort complètement du cadre de la mécanique classique. De fait, tout ce que nous avons décrit dans cet exposé de la mécanique classique correspond à l'approximation dans laquelle la constante de Planck h est nulle, approximation qui est satisfaite tant que l'on étudie des phénomènes macroscopiques. Dès que l'on étudie des phénomènes microscopiques, à l'échelle atomique par exemple, les notions classiques de vitesse et de position disparaissent, et seule la fonction d'onde permet de décrire correctement les phénomènes.

BIBLIOGRAPHIE

GIÉ H., *Dynamique*, J.-B. Baillière ; *Statique des solides et des fluides*, J.-B. Baillière. - GOLDSTEIN H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley. - LANDAU L. et LIFCHIFZ E., *Mécanique*, éditions Mir. - SOUTIF M., *Vibrations, Propagation, Diffusion*, Dunod Université. - TARG S., *Éléments de mécanique rationnelle*, éditions Mir.



◀ *Visualisation du gradient de masse volumique dans une colonne d'air chaud.*

ONERA

MÉCANIQUE DES FLUIDES

AÉROSTATIQUE ET AÉRODYNAMIQUE

L'*aérostatique* et l'*aérodynamique* font partie de la science appelée *mécanique des fluides;* elles étudient respectivement les forces qui agissent au sein d'un gaz en l'absence de mouvement et les phénomènes complexes qui entrent en jeu lors des mouvements des gaz.

Du point de vue historique, l'aérodynamique a trouvé ses bases théoriques dans les études de D. Bernoulli (1700-1782), d'Euler (1707-1783) et de Lagrange (1736-1813). A ces noms, il convient d'ajouter ceux de nombreux mathématiciens et expérimentateurs tels que Newton (1642-1727), Borelli (1608-1678), Viviani (1622-1703), Boyle (1627-1691), Laplace (1749-1827), Venturi (1746-1822), Riemann (1826-1866), Mach (1838-1916), Reynolds (1842-1912), Prandtl (1875-1953), von Karman (1881-1963), etc.

Les propriétés des fluides

L'état fluide est physiquement caractérisé par la relative mobilité des molécules, qui ne conservent pas, au sein de la masse, une position fixe. Parmi les paramètres dont la connaissance revêt une particulière importance, nous allons définir la masse volumique, la viscosité et la compressibilité.

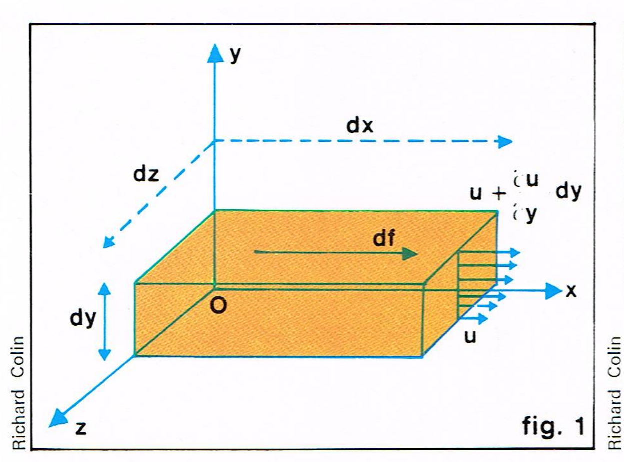
La **masse volumique** ρ est définie comme la masse de l'unité de volume. Pour un gaz parfait, celle-ci s'obtient à partir de l'équation d'état qui lie le volume spécifique V_s, la masse moléculaire $\mathcal{M}$, la pression P et la température absolue T, selon l'expression : $\rho = \frac{1}{V_s} = \frac{P\mathcal{M}}{RT}$ où R est la constante des gaz parfaits.

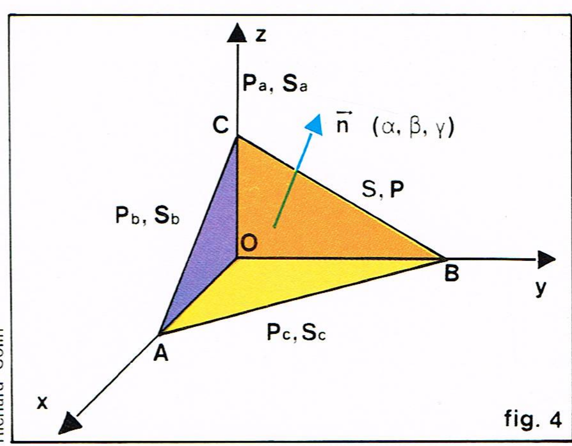
Pour une pression et une température normales ($1{,}013 \cdot 10^5$ Pa, 288,16 °K), la masse volumique de l'air est égale à 1,225 kg/m^3.

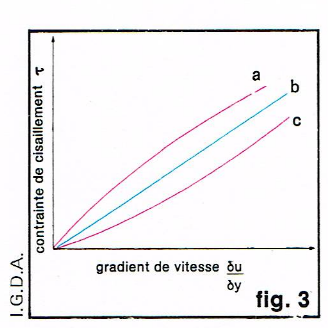
Coefficient de viscosité. Plaçons-nous dans le cas d'un écoulement uniforme d'un fluide dans un canal très large (écoulement bidimensionnel) et cherchons à exprimer la force de frottement exercée par la partie supérieure du fluide sur la partie inférieure par l'intermédiaire de la surface $dS = dx \cdot dz$ (elle lui sera donc proportionnelle) [*fig.* 1].

La grandeur qui interviendra pour exprimer la force de frottement $\mathcal{F}$ sera en fait la variation la vitesse par unité de hauteur, c'est-à-dire le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ pour deux couches

▶ *A gauche, figure 1 : définition du coefficient de viscosité μ. A droite, figure 4 : forces agissant sur le fluide contenu dans une pyramide en l'absence de mouvement.*







▲ *Figure 3 ; classification des fluides réels selon les variations de la contrainte de cisaillement en fonction du gradient de vitesse : a, fluides pseudo-plastiques ; b, fluides newtoniens ; c, fluides dilatants.*

séparées par la distance Δy, et, pour des couches infiniment voisines, $\dfrac{du}{dy}$.

Dans le cas où cette dépendance est linéaire, c'est-à-dire lorsque l'on peut poser partout

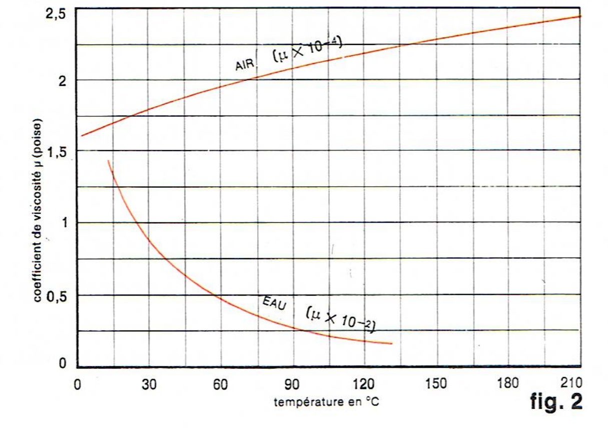
$$df = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot dxdz$$

on dira que le fluide est newtonien. Cette relation est appelée loi de Newton, et le coefficient de proportionnalité est appelé coefficient de viscosité.

Le rapport : $\tau = \dfrac{df}{dxdz}$ est appelé contrainte de cisaillement, et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ est le gradient de vitesse, ou vitesse de cisaillement. Dans le système M. K. S., la viscosité s'exprime en newtons-secondes/mètre carré (N-s/m^2), et en système C. G. S. (le plus utilisé dans la littérature relative à ce sujet), il s'exprime en poises, c'est-à-dire en dynes-secondes/centimètre carré (dyn-s/cm^2). Dans les conditions normales, la viscosité de l'air est de $1{,}79 \cdot 10^{-4}$ poise et celle de l'eau de $1{,}145 \cdot 10^{-2}$ poise.

La variation du coefficient de viscosité des fluides en fonction de la température obéit à des lois différentes selon les fluides considérés : pour des gaz, c'est une fonction croissante, et pour des liquides, une fonction décroissante (*fig.* 2). Cette différence de comportement est expliquée par la différence de la nature des forces d'interaction entre les molécules dans ces deux cas.

La viscosité est une des caractéristiques les plus importantes d'un fluide, puisque la grandeur des contraintes de cisaillement dépend de sa valeur. Dans le cas des fluides newtoniens, ces contraintes sont nulles uniquement si le gradient de vitesse $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ est nul, c'est-à-dire si le fluide est à l'état de repos ou s'écoule sans se déformer. Malgré cela, dans la résolution de nombreux problèmes de dynamique des fluides ou d'aérodynamique, il est nécessaire de négliger l'action des forces de cisaillement en supposant nulle la viscosité (fluide parfait). Cette approximation est souvent justifiée quand la couche de fluide immédiatement au contact des solides, et où les phénomènes liés à la viscosité sont prépondérants (couche limite), est suffisamment petite. On a vu que les fluides newtoniens étaient définis par une dépendance linéaire de la contrainte de cisaillement avec le gradient de vitesse. Il existe des fluides pour lesquels cette dépendance n'est plus linéaire, ce qui revient à dire que μ n'est plus constant mais dépend de $\dfrac{\partial u}{\partial y}$. C'est le cas, par exemple, des plastiques, des suspensions, du sang, et de nombreux corps organiques. Ces fluides, appelés fluides non newtoniens, sont classés, selon la dépendance de τ en fonction du gradient de vitesse, en pseudo-plastiques (leur viscosité apparente, c'est-à-dire la pente de τ fonction de $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, est une fonction décroissante de $\dfrac{\partial u}{\partial y}$) ; dilatants (viscosité apparente fonction croissante de $\dfrac{\partial u}{\partial y}$), etc. (*fig.* 3).



▶ *Figure 2 : variation du coefficient de viscosité pour l'eau et pour l'air en fonction de la température, dans des conditions normales de pression.*

La **compressibilité** relie la variation de volume dV du fluide à la variation dP de la pression agissant sur lui selon la loi :

$$dP = -K\frac{dV}{V}$$

Cette définition du *coefficient de compressibilité* K est indépendante de l'état de la matière, aussi s'applique-t-elle aussi bien aux fluides qu'aux solides. La compressibilité des fluides revêt une importance croissante à mesure que croît la vitesse, et ses effets sont négligeables uniquement pour les vitesses très inférieures à celle du son.

Statique des fluides

Un des principaux problèmes de l'aérostatique (ou de l'hydrostatique) concerne la détermination des forces qui, au repos, agissent sur la surface d'un corps plongé dans un fluide ou sur les surfaces qui le délimitent.

Considérons un élément du corps de surface dS et décomposons la force élémentaire $\vec{df}$ agissant sur celui-ci en sa composante normale $\vec{df_n}$ et en sa composante tangentielle $\vec{df_t}$; ces dernières sont reliées respectivement à la pression P et à la contrainte de cisaillement τ agissant sur dS. Puisque le fluide est à l'état de repos et que le cisaillement est nul, la force élémentaire $\vec{df}$ se réduit à $\vec{df} = P\vec{n}dS$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface dS. La force $\vec{F}$ exercée par le fluide sur le corps est donc donnée par la résultante des actions élémentaires $P\vec{n}dS$:

$$\text{(1)} \qquad \vec{F} = \int_S P\vec{n}dS$$

Pour la déterminer, il est nécessaire de connaître la loi de variation des forces élémentaires $P\vec{n}dS$.

Considérons (*fig.* 4) les forces s'exerçant, en l'absence de mouvement, sur le tétraèdre élémentaire OABC de volume V. On peut toujours choisir un volume suffisamment petit pour que la pression s'exerçant sur chacune des faces du tétraèdre soit uniforme. Soit P_a, P_b, P_c, P ces pressions s'exerçant respectivement sur les faces OBC, OCA, OAB, ABC de surfaces S_a, S_b, S_c et S. Si

α, β, γ sont les composantes du vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la surface ABC, écrire que le système est en équilibre revient à dire que la résultante $\vec{R}$ des forces qui s'exercent sur lui est nulle :

$$R_x = P_a S_a - PS\alpha = 0$$
$$R_y = P_b S_b - PS\beta = 0$$
$$R_z = P_c S_c - PS\gamma - \rho V g$$
$$= P_c S_c - PS\gamma - \frac{1}{3}\rho S_c OC g = 0$$

En effet, $\rho V g$ représente le poids du tétraèdre élémentaire et $V = \frac{1}{3} S_c OC$.

De plus, $S_a = \alpha S$, $S_b = \beta S$, $S_c = \gamma S$,

donc : $P - P_a = 0$

$$P - P_b = 0 \quad \text{et} \quad P - P_c + \frac{1}{3}\rho OC g = 0$$

Le volume choisi ayant été pris arbitrairement petit, OC l'est également, et l'on peut toujours, dans ce cas, négliger le terme $\rho OC\, g$. On obtient donc la relation

$$P = P_a = P_b = P_c$$

qui, $\vec{n}$ étant arbitrairement choisi, montre que la pression en un point du fluide est indépendante de la direction de la normale à la surface élémentaire sur laquelle elle s'exerce.

Considérons maintenant la composante verticale des forces s'exerçant sur un cylindre élémentaire de section transversale dS et de hauteur dz (*fig.* 5). Ces forces verticales se réduisent aux forces de pression agissant sur les surfaces A et B, et à la force de pesanteur

$$dF_z = -g dm = -\rho g dV = -\rho g dS dz.$$

Au total, l'écriture de l'équilibre donne l'équation :

$$-\rho g dS dz = (P + dP)\, dS - P dS$$

soit :

(2) $$dP = -\rho g dz$$

Si on avait considéré la composante horizontale de la résultante des forces s'exerçant sur un cylindre élémentaire horizontal de section transversale dS et de longueur dl, les forces de pesanteur ne seraient pas intervenues, et le même raisonnement aurait conduit à $dP = 0$, de telle sorte que l'on aurait pu énoncer la *loi de Pascal :* la pression existant en un point M d'un fluide en équilibre est constante sur toute la surface horizontale S passant par M.

Pour un fluide incompressible (ρ = constante), l'intégration de l'équation $dP = -\rho g dz$ entre deux niveaux z_a et z_b donne :

$$P_a - P_b = -\rho g\, (z_a - z_b)$$

ce qui signifie que la variation de pression entre deux niveaux est proportionnelle à la différence de hauteur entre ces mêmes niveaux *(loi de Stevino)*.

Partant des équations **(1)** et **(2)**, il est possible d'obtenir l'expression mathématique du *principe d'Archimède :* la résultante des forces de pression agissant sur un corps immergé dans un fluide est une force égale et opposée au poids du volume de fluide déplacé, appliquée au centre de gravité de ce dernier.

En effet, en appliquant l'équation **(1)** à un corps (que nous supposerons cylindrique pour simplifier) plongé dans le fluide, on obtient, pour la résultante des forces F, l'expression :

$$F = \rho g S h = \rho g V$$

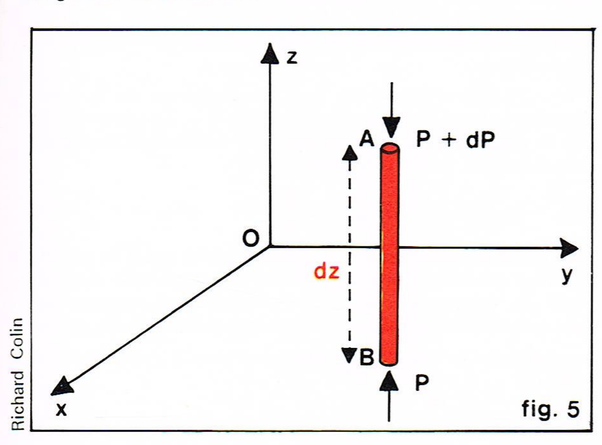
où S est la section transversale du cylindre, h sa hauteur et V le volume. Pour que les conditions d'équilibre du corps (de masse M) se réalisent, il faut que soit vérifiée l'égalité :

(3) $$Mg = \rho g V$$

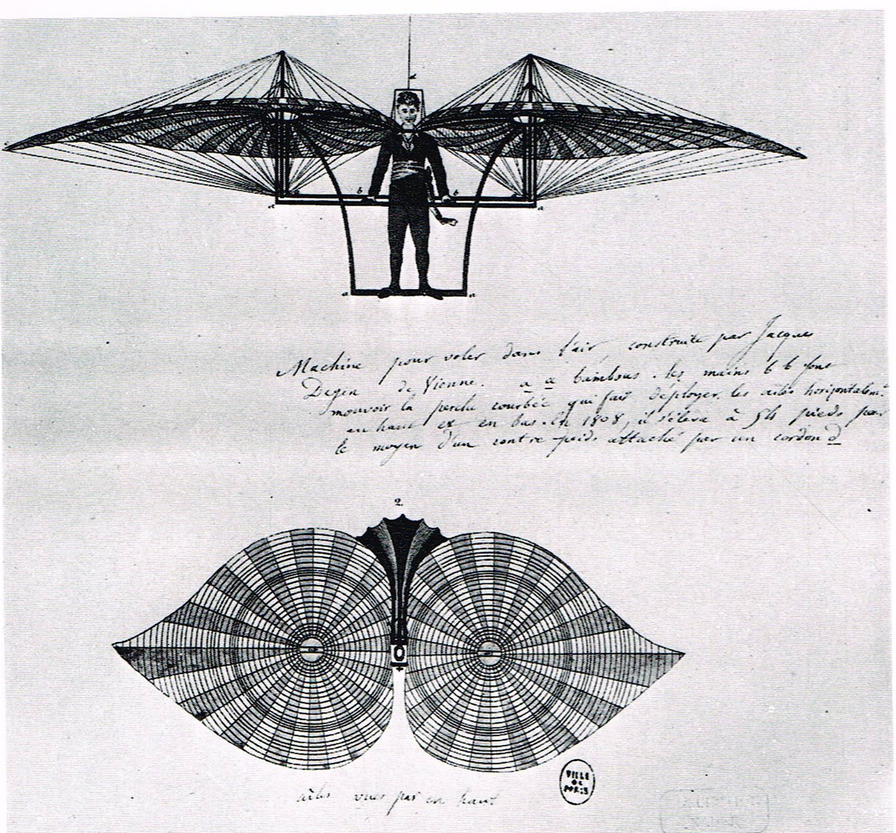
L'équation **(3)** fournit la condition pour l'équilibre du corps mais non pour sa stabilité ; on peut facilement vérifier que cette dernière est satisfaite si le centre de gravité du corps est situé au-dessous du centre de gravité du volume de fluide déplacé ; si les deux points coïncident, le corps est en équilibre indifférent dans toutes les positions.

Bulloz

▲ ***La théorie des aérostats est fondée sur le principe d'Archimède ; ici,*** **Enlèvement d'une montgolfière** ***(École française du XVIII[e] siècle).***



◀ ***Figure 5 : forces agissant sur le fluide contenu dans un cylindre élémentaire.***



Bulloz

▲ *Gravure de la* « Machine à voler » *de Jacques Degen (musée Carnavalet).*

Dynamique des milieux continus

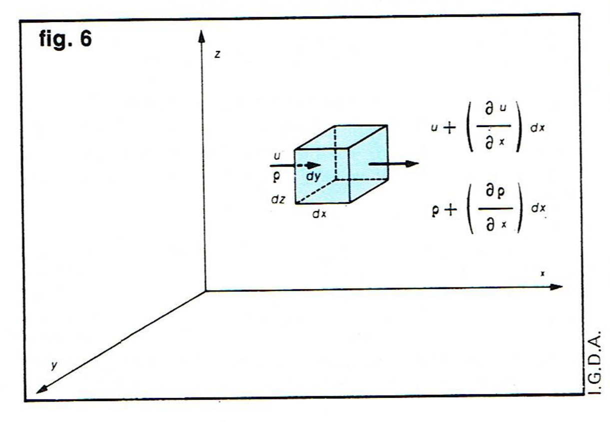
Pour analyser le mouvement de la particule fluide, il est nécessaire d'établir les équations qui relient les paramètres permettant de décrire la dynamique du système, c'est-à-dire le temps, la vitesse, la pression et la masse volumique. Elles sont obtenues en appliquant à la particule fluide des lois physiques (par exemple l'équation fondamentale de la dynamique) ou des principes physiques fondamentaux tels que celui de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

L'**équation de la continuité** représente, par exemple, l'application du principe de conservation de la masse. Considérons (*fig.* 6) un parallélépipède de côtés dx, dy, dz, traversé par un fluide s'écoulant parallèlement à l'axe Ox. Calculons le flux de masse à travers ce parallélépipède pendant le temps dt (on comptera positivement le flux rentrant et négativement le flux sortant). Si u et ρ indiquent respectivement la vitesse et la masse volumique du fluide au point x, ces mêmes grandeurs, calculées au point $x + dx$, seront :

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}dx, \qquad \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}dx.$$

Le flux entrant pendant le temps dt à l'intérieur du petit volume examiné, dans la direction Ox, est donné par :

$$-\rho u\, dy\, dz\, dt$$



I.G.D.A.

▶ *Figure 6 : variation suivant x, à travers le volume élémentaire dx dy dz, de la composante suivant x, u, de la vitesse et de la densité ρ.*

et le flux sortant par :

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}dx\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) dy\, dz\, dt$$

En négligeant les termes en $(dx)^2$ et en effectuant la différence entre le flux entrant et le flux sortant, on obtient :

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dx\, dy\, dz\, dt$$

D'après le principe de conservation de la masse, cette différence doit être égale à la variation, dans le temps dt, de la masse de fluide contenue dans le volume examiné :

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, dz\, dt$$

et dans ce cas on a : $\dfrac{\partial (\rho u)}{\partial x} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

Si nous indiquons par u, v, et w les composantes de la vitesse $\vec{V}$ le long des trois axes, le flux total qui traverse le volume élémentaire dV sera donné par :

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Or la quantité $\dfrac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \dfrac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \dfrac{\partial (\rho w)}{\partial z}$

représente par définition la divergence du vecteur $\rho\vec{V}$, notée div $(\rho\vec{V})$; on peut donc écrire :

$$\text{(5)} \qquad \text{div}\,(\rho\vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Or le gradient d'une fonction $f = f\,(x, y, z, t)$ est donné par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

On peut définir d'autre part, la dérivée lagrangienne qui représente physiquement la variation temporelle de la grandeur $f\,(x, y, z, t)$ associée à une particule lors de son mouvement par :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}v + \frac{\partial f}{\partial z}w = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\, f.$$

L'équation **(5)** peut alors s'écrire sous la forme :

$$\text{(6)} \qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho\, \text{div}\, \vec{V} = 0$$

puisque l'on a aussi :

$$\text{div}\,(\rho\vec{V}) = \vec{V}\cdot \text{grad}\, \rho + \rho\, \text{div}\, \vec{V}$$

L'équation **(5)** [ou **(6)**] est appelée équation de continuité.

Si l'écoulement est stationnaire, **(5)** prend la forme :

$$\text{(7)} \qquad \text{div}\,(\rho\vec{V}) = 0$$

Si le fluide est incompressible (ρ = Cte) ou si les variations de densité sont suffisamment petites pour qu'on puisse le considérer comme tel, **(6)** s'écrit div $\vec{V} = 0$.

Une autre relation fondamentale est obtenue en appliquant l'équation fondamentale de la dynamique à une masse donnée de fluide. Considérons les forces agissant sur un cube élémentaire de fluide de volume dV (*fig.* 7). Nous avons :

a - Forces d'inertie F_I. Les composantes de la force d'inertie le long des axes de référence x, y, z sont données par le produit de la masse ρdV par les composantes de l'accélération, et leurs valeurs sont :

$$dF_{Ix} = \rho\frac{du}{dt}dV; \quad dF_{Iy} = \rho\frac{dv}{dt}dV; \quad dF_{Iz} = \rho\frac{dw}{dt}dV;$$

b - Forces conservatives. En indiquant par φ le potentiel d'un champ éventuel (qu'il soit gravitationnel, magnétique en dehors des sources ou électrique) agissant sur les particules de masse $\rho \cdot d$V, les composantes des forces exercées par le champ $\vec{G}$ le long des axes x, y, z sont données par :

$$dF_{Gx} = -\rho dV\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \; dF_{Gy} = -\rho dV\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \; dF_{Gz} = -\rho dV\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

c - Contraintes de pression et contraintes visqueuses. En indiquant (*fig.* 7) par P la contrainte normale de pression, par τ_i la contrainte visqueuse normale agissant dans la direction de l'axe *i* et par τ_{ij} la contrainte visqueuse tangentielle (parallèle à la direction *i* et agissant sur l'élément de surface perpendiculaire à la direction *j*), les composantes de la résultante des contraintes normales et tangentielles qui s'exercent le long des axes *x, y, z* sont exprimées par

$$(8)\quad \begin{aligned} d\mathrm{R}_x &= \left[-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau xx}{\partial x} + \frac{\partial \tau yx}{\partial y} + \frac{\partial \tau zx}{\partial z}\right)\right] d\mathrm{V} \\ d\mathrm{R}_y &= \left[-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau xy}{\partial x} + \frac{\partial \tau yy}{\partial y} + \frac{\partial \tau zy}{\partial z}\right)\right] d\mathrm{V} \\ d\mathrm{R}_z &= \left[-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau xz}{\partial x} + \frac{\partial \tau yz}{\partial y} + \frac{\partial \tau zz}{\partial z}\right)\right] d\mathrm{V} \end{aligned}$$

D'après la loi de Newton, l'égalité :

$$d\mathrm{F}_{\mathrm{I}x} = d\mathrm{F}_{\mathrm{G}x} + d\mathrm{R}_x;\quad d\mathrm{F}_{\mathrm{I}y} = d\mathrm{F}_{\mathrm{G}y} + d\mathrm{R}_y;\quad d\mathrm{F}_{\mathrm{I}z} = d\mathrm{F}_{\mathrm{G}z} + d\mathrm{R}_z$$

doit se vérifier, et, de ce fait :

$$(9)\quad \begin{aligned} \rho\frac{du}{dt} &= -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left[-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau xx}{\partial x} + \frac{\partial \tau yx}{\partial y} + \frac{\partial \tau zx}{\partial z}\right)\right] \\ \rho\frac{dv}{dt} &= -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \left[-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau xy}{\partial x} + \frac{\partial \tau yy}{\partial y} + \frac{\partial \tau zy}{\partial z}\right)\right] \\ \rho\frac{dw}{dt} &= -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \left[-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau xz}{\partial x} + \frac{\partial \tau yz}{\partial y} + \frac{\partial \tau zz}{\partial z}\right)\right] \end{aligned}$$

Dans le système d'équation **(8)**, on peut introduire, grâce aux relations qui relient les contraintes de cisaillement à la viscosité, les composantes *u, v, w* de la vitesse. En effet, de même que l'on a pu écrire dans un cas simple $\tau = \mu\,\frac{\partial u}{\partial y}$, on peut montrer, dans le cas qui nous intéresse, que l'on a :

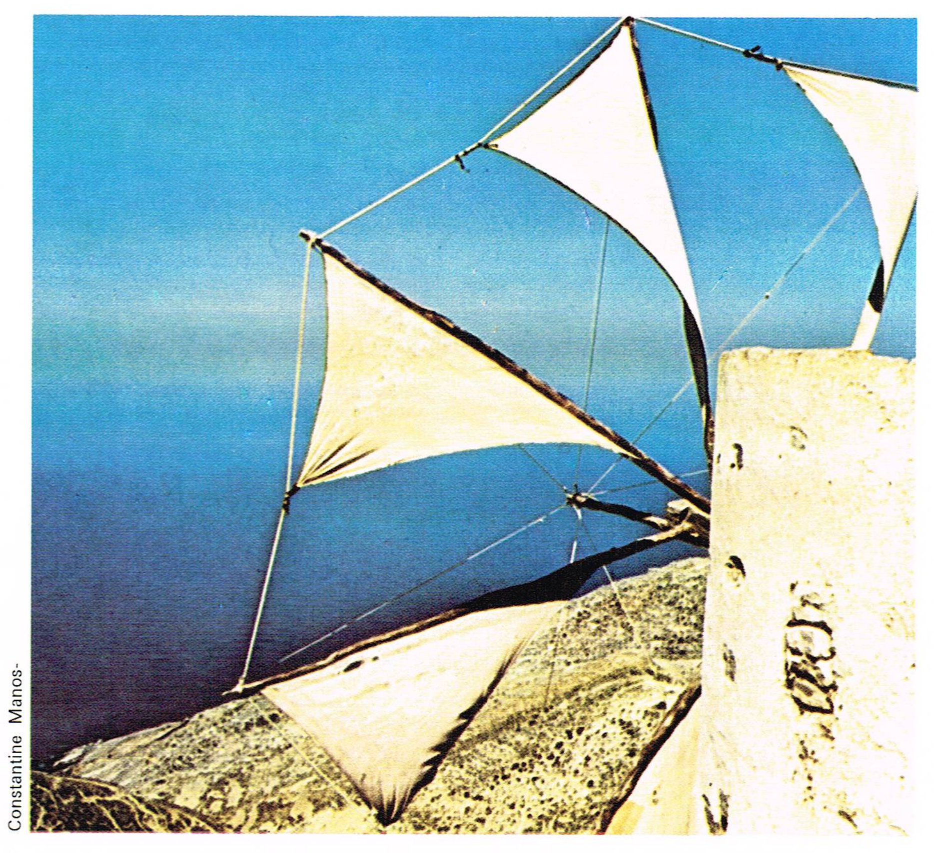
$$(10)\quad \begin{aligned} \tau xx &= 2\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\,\mu\right)\mathrm{div}\,\vec{V}; & \tau xy &= \tau yx = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau yy &= 2\,\mu\,\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\,\mu\right)\mathrm{div}\,\vec{V}; & \tau yz &= \tau zy = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \tau zz &= 2\,\mu\,\frac{\partial w}{\partial z} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\,\mu\right)\mathrm{div}\,\vec{V}; & \tau zx &= \tau xz = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

où intervient un second coefficient de proportionnalité, μ', appelé *second coefficient de viscosité*, qui est relié à des effets de dilatation.

En substituant ces relations dans le système **(9)**, on obtient le système suivant :

$$(11)\quad \begin{aligned} \rho\frac{du}{dt} &= -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\,\mu\right)\mathrm{div}\,\vec{V}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) \\ \rho\frac{dv}{dt} &= -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\,\mu\,\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\,\mu\right)\mathrm{div}\,\vec{V}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) \\ \rho\frac{dw}{dt} &= -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(2\,\mu\,\frac{\partial w}{\partial z} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\,\mu\right)\mathrm{div}\,\vec{V}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) \end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire en notations plus condensées



Constantine Manos-

▲ *L'aérodynamique, c'est aussi la poésie d'un moulin à Mikonos.*

$$(12)\quad \rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\rho\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{P} - \left(\mu' + \frac{1}{3}\,\mu\right)\mathrm{div}\,\vec{V}\right) + \mu\,\nabla^2\vec{V}$$

où le symbole ∇^2 désigne l'opérateur laplacien :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

L'équation **(12)** est appelée **équation de Navier-Stokes,** elle représente la base de la dynamique des fluides. Le problème posé par la recherche de sa solution exacte présente une difficulté mathématique exceptionnelle, due principalement à la non-linéarité du système.

Dans le cas d'un fluide incompressible et d'une viscosité constante (hypothèse valable dans le domaine des petites variations de température), les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$(13)\quad \begin{aligned} \rho\frac{du}{dt} &= -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \rho\frac{dv}{dt} &= -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ \rho\frac{dw}{dt} &= -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{aligned}$$

soit, en utilisant les notations vectorielles,

$$(14)\quad \rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{P} + \rho\varphi) + \mu\nabla^2\vec{V}$$

Si la viscosité du fluide est faible, le terme $\mu\nabla^2\vec{V}$ qui apparaît dans **(14)** peut être négligé, et l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible donne :

$$(15)\quad \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\mathrm{P}}{\rho} + \varphi\right)$$

Si on néglige le champ de force $\vec{\mathrm{G}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\rho\varphi)$, l'équation **(15)** se réduit à :

$$(16)\quad \rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{P}$$

L'équation **(16)** est appelée **équation d'Euler.** Elle peut être également utilisée comme approximation, dans

▼ ***Figure 7 : forces, par unité de surface, agissant sur un cube élémentaire de volume $d\mathrm{V} = dx \cdot dy \cdot dz$:***

1, $P_z + \tau_{zz} + \frac{\partial}{\partial z}(P_z + \tau_{zz})\,dz$

2, $\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,dz$

3, $\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\,dz$

4, $\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\,dx$

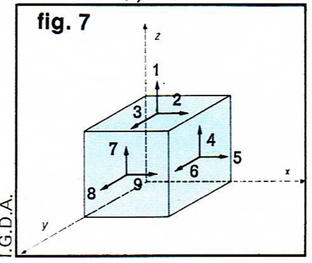
5, $(P_x + \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial x}(P_x + \tau_{xx})\,dx$

6, $\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy}\,dx$

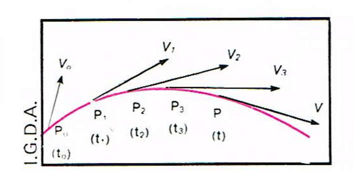
7, $\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\,dy$

8, $(P_y + \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial y}(P_y + \tau_{yy})\,dy$

9, $\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,dy$



I.G.D.A.



▲ ***Figure 8 : définition de la ligne de courant.***

l'étude du mouvement des fluides compressibles, tels que l'air, lorsque les vitesses sont petites devant la vitesse du son et que les termes relatifs à la viscosité sont négligeables.

Cherchons à exprimer maintenant le principe de conservation de la quantité de mouvement. Pour cela, évaluons les variations temporelles de la quantité $\rho\vec{V}$; calculons donc $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})$. Cette quantité peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) = \rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

On a vu que la dérivée lagrangienne d'une grandeur scalaire $f\ (x, y, z, t)$ est définie par $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,f$. La même définition appliquée à une grandeur vectorielle, par exemple le champ de vitesse, permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\ \vec{V},$$

donc, d'après **(16)** :

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = -\ (\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\ \vec{V} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}\ P$$

Puisque l'on a aussi, d'après **(5)** :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\ \text{div}\ (\rho\vec{V}),$$

on peut mettre $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})$ sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) = -\ \overrightarrow{\text{grad}}\ P - \rho\ (\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\ \vec{V} - \vec{V}\ \text{div}\ \rho\vec{V}$$

Si l'on intègre cette expression dans un volume V limité par la surface S, $\vec{n}$ étant le vecteur unitaire porté par la normale sortante à l'élément de surface dS, on peut montrer qu'elle se transforme en l'expression suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho\vec{V})\ d\vec{V} = -\int_S P\vec{n}dS - \int_S \rho\vec{V}\ (\vec{V}\cdot\vec{n})\ dS$$

Dans le cas d'un écoulement permanent, elle se réduit à :

$$\int_S P\vec{n}dS = -\int_S \rho\vec{V}\ (\vec{V}\cdot\vec{n})\ dS \qquad \textbf{(17)}$$

qui exprime la conservation du flux de la quantité de mouvement, en régime permanent, à travers une surface fermée. Cette expression est très utilisée pour calculer les efforts dynamiques d'un fluide sur un obstacle ou des parois.

En appliquant au mouvement du fluide la loi de conservation de l'énergie, on obtient une nouvelle relation entre la vitesse, la pression et la densité. Considérons le travail accompli dans l'unité de temps par toutes les forces appliquées à un volume V. En négligeant le travail accompli par les forces liées à la viscosité et par les forces extérieures volumiques, et en supposant que le système ne reçoit pas de chaleur, le travail accompli dans l'unité de temps par les forces de pression devra être égal à la variation de l'énergie cinétique, proportionnelle à $\frac{\vec{V}^2}{2}$, et à la variation de l'énergie interne E. Compte tenu de ces hypothèses, la loi de conservation de l'énergie est exprimée par :

$$-\int_S P\vec{V}\vec{n}dS = \int_V \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2} + E\right)dV \qquad \textbf{(18)}$$

où l'intégrale $\left(\int_S P\vec{V}\vec{n}dS\right)$ représente le travail accompli dans l'unité de temps par la pression agissant sur la surface S qui délimite le volume V.

En transformant l'intégrale de surface qui apparaît dans l'équation **(17)** en une intégrale de volume, celle-ci peut s'écrire sous la forme :

$$-\int_V \text{div}\ (P\vec{V})\ dV = \int_V \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2} + E\right)dV$$

à partir de laquelle on obtient :

$$-\ \text{div}\ (P\vec{V}) = \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2} + E\right) \qquad \textbf{(19)}$$

Or on a :

$$\text{div}\ (P\vec{V}) = P\ \text{div}\ \vec{V} + \vec{V}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ P$$

$$\text{div}\ \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$$\vec{V}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ P = \frac{dP}{dt} - \frac{\partial P}{\partial t}$$

L'équation **(19)** peut donc s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2} + E + \frac{P}{\rho}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2} + h\right) \qquad \textbf{(20)}$$

dans laquelle h indique l'enthalpie de l'unité de masse, $E + \frac{P}{\rho}$. Si l'écoulement est stationnaire, $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$, et la relation **(20)** intégrée donne :

$$\frac{V^2}{2} + h = \text{Cte}, \qquad \textbf{(21)}$$

le long de la trajectoire d'un élément de volume fluide (puisque la dérivée lagrangienne est associée à la trajectoire). Comme $E = c_V T$ et $h = c_P T$ (c_V = chaleur massique à volume constant; c_P = chaleur massique à pression constante), on peut écrire :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + c_V T = \text{Cte} \qquad \textbf{(22)}$$

et sachant que $c_P = c_V + \frac{R}{\mathcal{M}}$:

$$\frac{V^2}{2} + c_P T = \text{Cte} \qquad \textbf{(23)}$$

Lignes de courant et trajectoires. Équation de Bernoulli. Définition du tube de courant

Considérons la configuration du champ de vitesse $\vec{V}$ au temps t_0 (*fig.* 8) ; la ligne qui admet, en chacun de ses points, la direction de la vitesse comme tangente à ce point, est appelée *ligne de courant*.

Considérons maintenant une particule de fluide et supposons que, au temps t_0, celle-ci soit en $\mathbf{P_0}$; au temps t_1, elle se sera déplacée en $\mathbf{P_1}$, au temps t_2 en $\mathbf{P_2}$, et ainsi de suite. L'ensemble des points successivement occupés par la particule est appelé *trajectoire*.

Dans l'écoulement stationnaire, les vitesses n'étant fonction que des coordonnées spatiales, les particules en un point donné **P** du champ ont toujours la même vitesse et les lignes de courant coïncident avec les trajectoires. Si nous projetons l'équation **(16)** le long de la tangente à la trajectoire, on obtient :

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial S}\vec{V} = -\frac{\partial P}{\partial S}$$

sachant que : $\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$, $\frac{\partial S}{\partial t} = \vec{V}$ et $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = 0$

En intégrant le long de la ligne de courant, on a :

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + P = \text{Cte} \qquad \textbf{(24)}$$

Cette équation est appelée *équation de Bernoulli*. Elle prend une signification particulière si l'on remarque que $\frac{1}{2}\rho V^2$ et P représentent respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle rapportées au volume unitaire de fluide.

Le long d'une même ligne de courant, on doit pouvoir vérifier la relation :

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + P_2$$

Si le fluide est arrêté au point $\mathbf{P_2}$, on aura naturellement $V_2 = 0$, et l'équation **(24)** devient :

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 + P_1 = P_2$$

La pression P_2 est appelée *pression d'arrêt* ou *pression totale*. Le terme $\frac{1}{2}\rho V^2$, qui a la dimension d'une pression, prend le nom de *pression dynamique*. Ainsi, le long d'une ligne de courant, la somme de la pression dynamique

$\frac{1}{2}\rho V^2$ et de la pression P se maintient constante et égale à la valeur de la pression totale.

Considérons maintenant, dans un champ de vitesse d'un écoulement stationnaire, une courbe fermée. Les lignes de courant qui prennent appui sur elle constituent un *tube de courant*.

La masse de fluide qui traverse dans le temps dt une section transversale dS du tube de courant est donnée par :

$$\left(\int_S \rho\vec{V}\vec{n}dS\right) dt$$

$\vec{n}$ étant le vecteur unitaire normal à l'élément de surface dS de la section transversale. Comme, à travers les parois du tube de courant, il n'y a aucun flux de fluide, la vitesse des particules étant tangente aux génératrices du tube de courant lui-même, le flux de masse à travers toute section du tube est constant et indépendant de la section considérée.

Le rotationnel de la vitesse. Théorème de Stokes

Étant donné le champ de vitesse $\vec{V}$, on appelle rotationnel de $\vec{V}$ (ou $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$) le vecteur dont les composantes sont données par :

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V})\,x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V})\,y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

(25) $$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V})\,z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Si le rotationnel de la vitesse est nul en tous les points du champ, le mouvement est dit *irrotationnel*. Le **théorème de Stokes** permet de relier le vecteur $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$ à la circulation Γ de la vitesse. Rappelons que la circulation d'un vecteur le long d'une ligne fermée *l* est définie par :

$$\Gamma = \int_l \vec{V}\,d\vec{l}$$

Le théorème de Stokes établit que la circulation de la vitesse le long d'une ligne fermée *l* est égale au flux du vecteur $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$ à travers n'importe quelle surface S ayant *l* pour contour, c'est-à-dire :

$$\int_l \vec{V}\,d\vec{l} = \int_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS$$

Théorème de Thompson (conservation de la circulation de la vitesse). Soit Γ la circulation de la vitesse calculée sur un contour fermé C. Considérons ce contour entraîné par le fluide, et calculons la variation temporelle de Γ lors du mouvement du contour, c'est-à-dire la quantité $\frac{d}{dt}\int \vec{V}\,d\vec{l}$.

On peut montrer que cette quantité vaut :

$$\frac{d}{dt}\int \vec{V}\,d\vec{l} = \int \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right) d\vec{l} + \int \vec{V}\,d\vec{V}$$

Sur un contour fermé $\int \vec{V}\,d\vec{V} = \int d\,(V)^2$ est nul. Quant à $\frac{d\vec{V}}{dt}$, on sait que, si l'on peut négliger les effets de viscosité et dans le cas de champ de force dérivant d'un potentiel, on peut écrire (voir équation **15** pour un fluide incompressible) :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho} + \varphi\right)$$

Dans ce cas, on peut appliquer la formule de Stokes :

$$\int_l -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho} + \varphi\right) d\vec{l} = \int_S \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho} + \varphi\right)\right)\vec{n}dS = 0$$

puisque le rotationnel d'un gradient est toujours nul.

On obtient donc :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad \text{soit } \Gamma = \text{Cte},$$

qui permet d'établir le théorème de Thompson : la circulation de la vitesse le long d'un circuit fermé, constitué toujours par les mêmes particules de fluide, est constante dans le cas d'un fluide non visqueux et pour un champ de force dérivant d'un potentiel.

Écoulement irrotationnel

Supposons que l'écoulement d'un fluide soit stationnaire, et considérons une ligne de courant qui serait telle que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = 0$ en un de ses points. Soit un contour fermé infinitésimal entourant ce point et la ligne de courant. La circulation de la vitesse est nulle sur ce contour, puisque $\int_l \vec{V}\,d\vec{l} = \int_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}\,dS$ et que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = 0$.

Au cours du temps, ce contour se déplace et la circulation reste nulle puisque Γ = Cte, donc $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = 0$ en tout point de la ligne d'écoulement considérée. En particulier, s'il existe une région de l'espace telle que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = 0$, alors $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = 0$ pour toutes les lignes d'écoulement passant par cette région. Si cette région est une région par laquelle passent toutes les lignes d'écoulement (par exemple en amont où $\vec{V}$ = Cte), alors on a partout $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = 0$: l'écoulement est dit *irrotationnel* ou encore *à potentiel*.

De même, si l'écoulement est à potentiel à un certain instant t_0, alors $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = 0$, et la circulation est nulle partout à cet instant, donc, étant constante, elle demeure nulle et l'écoulement reste à potentiel à tous les instants ultérieurs.

Potentiel de la vitesse

Supposons donc qu'un écoulement soit irrotationnel. On a donc $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = 0$. Or, on peut montrer que, si le champ de vitesse est tel que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = 0$, c'est que nécessairement ce champ est un champ de gradient, c'est-à-dire qu'il existe une fonction Φ (x, y, z) telle que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi.$$

La fonction Φ (x, y, z) prend le nom de *potentiel de la vitesse*. Les surfaces Φ (x, y, z) = Cte sont normales au vecteur $\vec{V}$ et sont appelées *surfaces équipotentielles*. En connaissant le potentiel de la vitesse, il est possible d'obtenir par de simples opérations de dérivations la vitesse en tout point du champ ; on a en effet :

(26) $$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

Équation de Laplace

Dans l'hypothèse où le fluide est incompressible et son mouvement stationnaire, l'équation de continuité s'écrit :

(27) $$\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

En outre, si le mouvement est irrotationnel, il existe un potentiel de la vitesse, tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$, et l'équation **(27)** peut s'écrire sous la forme :

(28) $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

(28) est appelée *équation de Laplace*, et la fonction Φ qui la satisfait est dite fonction harmonique. Une conséquence importante résultant des propriétés des fonctions harmoniques est qu'il y a superposabilité des solutions qui satisfont aux mêmes conditions limites.

Sources, puits et doublets

Considérons un champ de vitesse radial où la vitesse n'est fonction que du rayon : $V_r = f\,(r)$. Le débit volumique à travers une sphère de surface S centrée en **P** est alors simplement donné par

$$Q = \int_S \vec{V}\vec{n}\,dS = 4\,\pi r^2 V_r\,(r) \qquad (\textit{fig. } 9)$$

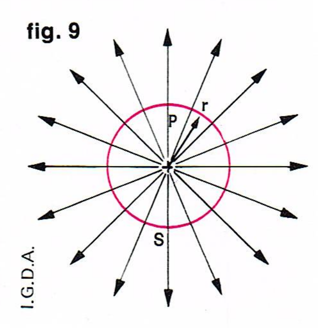
La conservation du débit à travers deux sphères concentriques de rayons différents impose pour la vitesse une relation du type :

(29) $$V_r(r) = \pm\frac{m}{r^2} \qquad m > 0$$

La constante m, qui vaut donc également $\mp\frac{Q}{4\pi}$, est appelée intensité de la singularité ; cette singularité prend le nom de *source* lorsque les lignes de courant en sor-

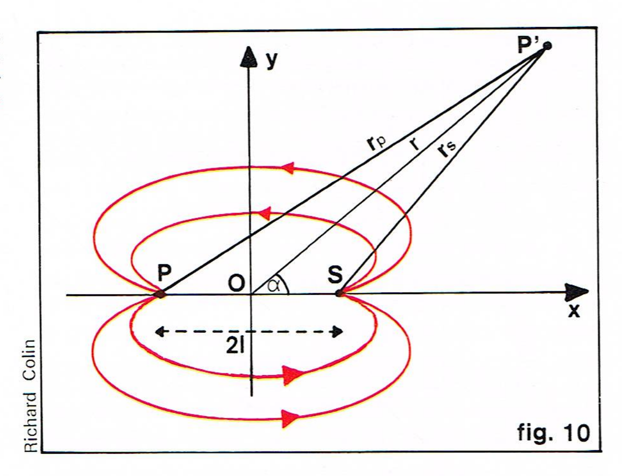
▼ ***Figure 9 : la singularité représentée ici schématise l'émission de fluide en un point du champ et prend le nom de source.***

fig. 9



I.G.D.A.

▶ ***Figure 10 :*** ***représentation schématique des lignes d'écoulement résultant de l'ensemble puits-source (doublet).***



tent (champ de vitesse associé au signe +), et de *puits* lorsqu'elles y convergent (signe —).

Or, on sait que Φ est relié à la vitesse par la relation $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \Phi$ qui se réduit, dans le cas qui nous intéresse, à la relation $V_r = \dfrac{d\Phi}{dr}$.

On peut donc calculer Φ :

$$\Phi = \mp \frac{m}{r}$$

Si l'on considère maintenant le champ résultant de l'ensemble source et puits de même intensité m, le potentiel en un point **P'** sera donné par :

$$\Phi = m\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_s}\right) = m\,\frac{r_s - r_p}{r_s r_p}$$

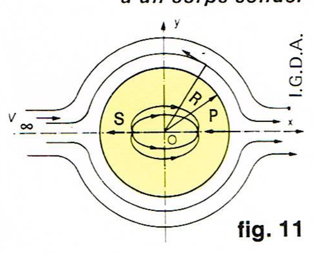
où r_p et r_s indiquent la distance du point **P'** au puits et à la source.

Si l'on se place à grande distance de cet ensemble puits-source, auquel on donne alors le nom de doublet, cette expression se transforme en :

(30)
$$\Phi = \frac{\text{M} \cos \alpha}{r^2}$$

où r est la distance de **P'** au centre O du doublet, $\text{M} = 2\,lm$ ($2\,l$ est la distance entre le puits et la source), et α l'angle de OP' avec l'axe du doublet (*fig.* 10).

▼ ***Figure 11 :*** ***représentation du champ engendré par la superposition d'un écoulement uniforme et d'un doublet. La surface sphérique de rayon R n'est pas traversée par le fluide et peut donc être assimilée à un corps solide.***



Superposition d'un écoulement uniforme et d'un doublet

En superposant un écoulement uniforme (s'écoulant dans le sens source-puits) à celui d'un doublet, on obtient (*fig.* 11) un champ résultant dont le potentiel est donné par :

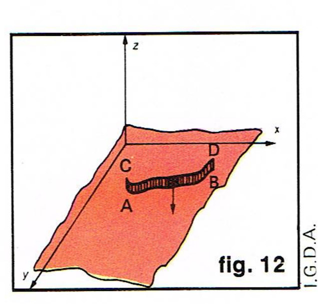
$$\Phi = V_\infty x + \frac{\text{M} \cos \alpha}{r^2} = V_\infty r \cos \alpha + \frac{\text{M} \cos \alpha}{r^2} = \cos \alpha \left(V_\infty r + \frac{\text{M}}{r^2}\right)$$

qui permet de calculer la vitesse, et en particulier la vitesse radiale V_r, puisque $V_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}$:

$$V_r = \cos \alpha \left(V_\infty - \frac{2\,\text{M}}{r^3}\right)$$

Cette relation montre que la composante radiale de la vitesse est nulle en tout point situé sur une sphère de centre O et de rayon $\text{R} = \left(\dfrac{2\,\text{M}}{V_\infty}\right)^{1/3}$. Il n'existe donc sur cette sphère que la composante tangentielle de la vitesse. La surface sphérique n'étant pas traversée par un fluide, elle peut être assimilée à un corps solide. Il s'ensuit que l'étude du champ de vitesse résultant de la superposition d'un écoulement uniforme et d'un doublet équivaut à l'étude du champ de vitesse résultant de la présence d'une sphère dans un écoulement uniforme.

▼ ***Figure 12 :*** ***le débit volumique à travers la surface ABCD dépend uniquement de la valeur de la fonction de courant aux points A et B. Si les points A et B appartiennent à la même ligne de courant, le débit volumique à travers la surface est nul.***





Paradoxe de D'Alembert

Dans l'écoulement qui vient d'être étudié, changer le sens de l'écoulement uniforme revient seulement à changer partout, à l'extérieur de la sphère, le sens de la vitesse. Cela signifie en particulier que, sur la sphère, la vitesse a la même valeur absolue quand on change x en $-x$ (et évidemment y en $-y$).

Une fois connue la valeur de la pression à l'infini, l'équation de Bernoulli permet d'obtenir la valeur des pressions agissant sur la sphère. Ces pressions sont donc également symétriques, ce qui signifie que la résultante des forces de pression agissant sur la sphère est nulle : le fluide n'exerce aucune force sur la sphère. Ce résultat, connu sous le nom de *paradoxe de D'Alembert*, est valable en l'absence d'éléments susceptibles de perturber la symétrie du champ aérodynamique. Par exemple, la viscosité détruit la symétrie des pressions par rapport à l'axe y et engendre une force qui s'oppose au mouvement du fluide.

Mouvements irrotationnels. Fonction courant

Lorsque les vitesses sont parallèles à un plan de référence fixe et que, en outre, toutes les grandeurs demeurent constantes le long de la direction normale à celui-ci, l'écoulement est dit *plan* ou *bidimensionnel*. Ces champs jouissent de propriétés particulières qui en permettent l'étude non seulement à l'aide du potentiel, mais aussi à l'aide de la fonction courant que l'on va définir.

Comme nous l'avons déjà vu, les composantes de la vitesse en un point sont définies par :

(31)
$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}$$

qui permet d'écrire pour un écoulement plan :

(32)
$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

dx et dy étant les composantes d'un élément de la ligne de courant, **(32)** représente l'équation différentielle de cette ligne de courant.

En négligeant les variations de masse volumique, l'équation de continuité ($\text{div}\ \vec{V} = 0$) s'écrit, dans ce cas :

(33)
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Or, cette relation est la condition nécessaire pour qu'il existe une fonction ψ telle que :

(33')
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

En écrivant l'équation de la ligne de courant en fonction de ψ, on obtient donc :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy = d\psi = 0$$

ce qui signifie que ψ est constant sur une ligne de courant.

La fonction $\psi\ (x, y)$ prend le nom de *fonction courant.*

La fonction ψ permet de calculer simplement le débit volumique à travers une surface cylindrique de hauteur unitaire et normale au plan du mouvement reposant sur une courbe quelconque du plan joignant deux points A et B, arbitrairement choisis. Pour le démontrer, calculons le flux à travers la surface ABCD (*fig.* 12). Celui-ci est donné par la valeur de l'intégrale $\int_S \vec{V}\vec{n}\,d\text{S}$ étendue à toute la surface considérée. Puisque le vecteur $\vec{n}\,d\text{S}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{n}\,d\text{S} = -\vec{i}\,dy + \vec{j}\,dx,$$

le flux élémentaire $\vec{V}\vec{n}\,d\text{S}$ est donné par :

$$\vec{V}\vec{n}\,d\text{S} = (\vec{i}\,u + \vec{j}\,v)\,(-\vec{i}\,dy + \vec{j}\,dx).$$

En effectuant l'intégration, on obtient pour le débit volumique Q à travers la surface ABCD :

$$\text{Q} = \psi\ (\text{B}) - \psi\ (\text{A})$$

Les lignes à $\psi\ (x, y) = \text{Cte}$ et $\Phi\ (x, y) = \text{Cte}$ constituent deux familles de courbes orthogonales ; en outre, les quadrilatères curvilignes compris entre deux éléments ds des lignes de courant et dn des lignes équipotentielles (*fig.* 13) sont semblables dans tout le champ. En particulier, si l'un d'eux est un carré, tout le réseau est formé de mailles quadrangulaires.

Potentiel complexe des vitesses

On a vu que l'on pouvait écrire :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{et} \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

par conséquent :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Ces conditions ne sont autres que les conditions de Cauchy-Riemann exprimant le fait que l'expression :

(34) $$W = \Phi + i\psi$$

est une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$. W est appelé potentiel complexe des vitesses.

On peut considérer W comme fonction de x et de y par l'intermédiaire de z : $W\left((z\ (x, y)\right)$, et on peut écrire :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dW}{dz}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{dW}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{dW}{dz}$$

il vient donc :

(35) $$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv.$$

Cette dérivée représente la vitesse complexe dont le module et l'argument sont respectivement le module de la vitesse et l'angle $(\vec{V}, \vec{Ox}) = -\theta$:

(36) $$\frac{dW}{dz} = u - iv = |\vec{V}| \exp(-i\theta)$$

Expressions en coordonnées polaires

Un changement de système de coordonnées permet de relier les composantes V_r et V_θ aux fonctions courant et au potentiel. On obtient :

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Écoulements singuliers à potentiel

Les fonctions analytiques reçoivent en aérodynamique des applications importantes. Elles permettent en effet de décrire simplement un certain nombre d'écoulements, par la recherche, en particulier, du potentiel des vitesses associé. Ainsi, un *écoulement uniforme* est décrit en cartésiennes par :

$$u = U, \quad v = 0,$$

d'où l'on déduit par intégration, puisque

$$u = U = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} :$$

(37) $$\Phi = Ux, \quad \psi = Uy, \quad W = Uz$$

Une source ponctuelle (linéaire, perpendiculaire au plan xOy) crée un écoulement où, par raison de symétrie, $V_\theta = 0$ et V_r n'est fonction que de r. Soit Q le débit volumique par unité de hauteur. On définit l'intensité de la source par la quantité $a = \frac{Q}{2\pi}$. En calculant le débit traversant un cercle de rayon r, il vient :

$$Q = \int_0^{2\pi} V_r\, r d\theta = 2\pi r V_r.$$

La conservation du débit imposant que cette quantité soit constante, on obtient :

$$2\pi r V_r = 2\pi a.$$

Par conséquent, $V_r = \frac{a}{r} = \frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d\psi}{d\theta}$ et par intégration :

(38) $$\Phi = a \operatorname{Log} r \quad \psi = a\theta$$

(38) permet de déduire le potentiel des vitesses :

(39) $$W = Q + i\psi = a \operatorname{Log}(r \exp i\theta) = a \operatorname{Log} z$$

en changeant a en $-a$, on change le sens de l'écoulement, et l'on parle alors de puits.

Doublet

Si on considère à présent un ensemble source-puits de même intensité en valeur absolue, il suffit, pour trouver le potentiel des vitesses associé, de superposer le potentiel relatif à la source au potentiel relatif au puits. Si α est l'angle que fait l'ensemble source-puits avec l'axe des x, l'affixe de la source est $z_0 = \gamma \exp(i\alpha)$ et celle du puits $-z_0$. Le potentiel des vitesses associé à la source vaut donc $a \operatorname{Log}(z - z_0)$ et celui associé au puits $-a \operatorname{Log}(z + z_0)$. Le potentiel de l'ensemble s'écrit donc :

(40) $$W = a \operatorname{Log}\left(\frac{z - z_0}{z + z_0}\right)$$

Si l'on se place à grande distance de cet ensemble puits-source, qui, comme on l'a vu, prend alors le nom de doublet, cette expression s'écrit :

$$W = -2a\frac{z_0}{z}$$

soit, en posant $2a\gamma = \mu$,

(41) $$W = \frac{-\mu}{z}\exp(i\alpha)$$

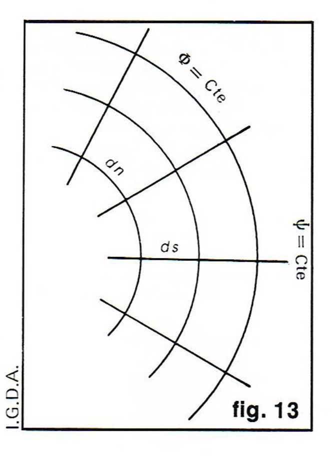
Tourbillon

C'est par définition un écoulement du type :

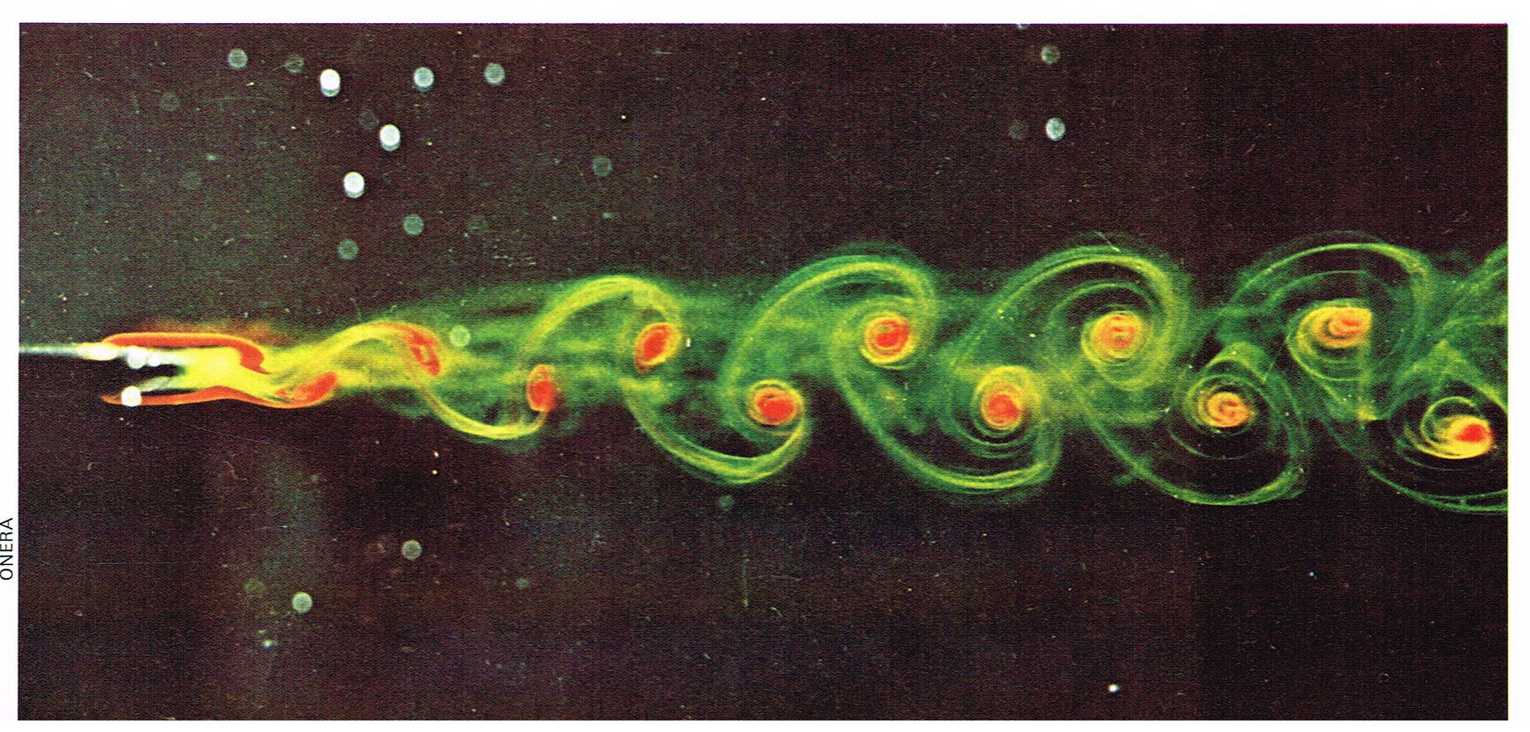
$$V_r = 0, \quad V_\theta = V_\theta(r),$$

Il existe donc une symétrie de révolution. Dans le cas d'un écoulement irrotationnel, il est nécessaire de poser :

$$|\vec{rot}\ \vec{V}| = \left|\frac{V_\theta}{r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right| = 0,$$



▲ ***Figure 13 :*** ***les lignes à Ψ et Φ constants peuvent être représentées par deux familles de courbes point par point orthogonales. Cette propriété est utilisée pour tracer les lignes de courant dès que la fonction potentielle est connue et vice versa.***



▼ ***Écoulement à relativement basse vitesse : tourbillons alternés du sillage derrière une plaque mince sans incidence.***

▶ *Figure 15 : répartition des contraintes exercées par le fluide sur un cylindre indéfini. Les zones en + indiquent une surpression ($P > P_\infty$) et les zones en — une dépression ($P < P_\infty$).*

qui implique que

$$\frac{dV_\theta}{V_\theta} = -\frac{dr}{r} \quad \text{et que} \quad V_\theta = \frac{A}{r}$$

L'écoulement est alors irrotationnel partout, sauf à l'origine. De ce fait $\oint \vec{V}\,\vec{dl} = 0$ si C (contour de la circulation) n'entoure pas l'origine. Si C entoure l'origine :

$$\Gamma = \int_C \vec{V}\,\vec{dl} = \int_0^{2\pi} V_\theta r d\theta = 2\pi A$$

On peut alors déterminer le potentiel complexe associé :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = V_r = 0 \quad \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{d\theta} = V_\theta = \frac{A}{r} \quad \text{donc} \quad \Phi = A\theta$$

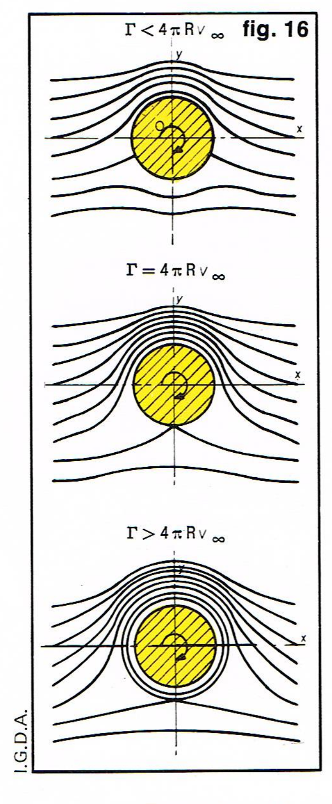
$$\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_r = 0 \quad -\frac{d\psi}{dr} = V_\theta = \frac{A}{r} \quad \text{donc} \quad \psi = -A \operatorname{Log} r$$

qui permet d'écrire :

$$W = A\theta - iA \operatorname{Log} r$$

soit :

(42) $$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \operatorname{Log} z.$$



▲ *Figure 16 : allure du champ engendré par la superposition du champ uniforme, d'un tourbillon d'intensité Γ et d'un doublet.*

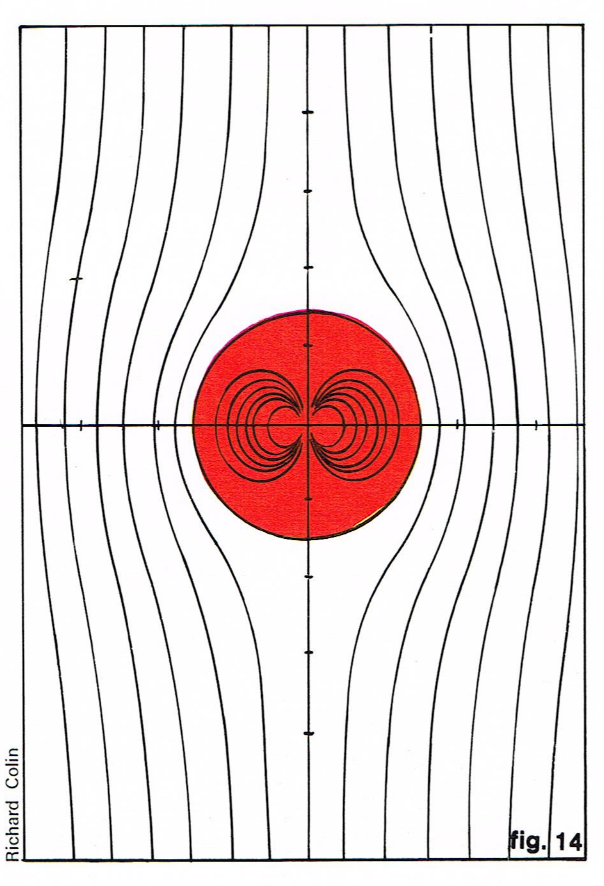
Doublet et écoulement uniforme

Si la source et le puits ont une intensité a et sont placés cette fois sur l'axe Ox, à la distance γ de l'origine ($\alpha = \pi$ et $z_0 = \gamma$), le potentiel complexe cherché est la somme du potentiel relatif à l'écoulement uniforme, W = Uz, et du potentiel source-puits :

$$W = a \operatorname{Log}\left(\frac{z+\gamma}{z-\gamma}\right)$$

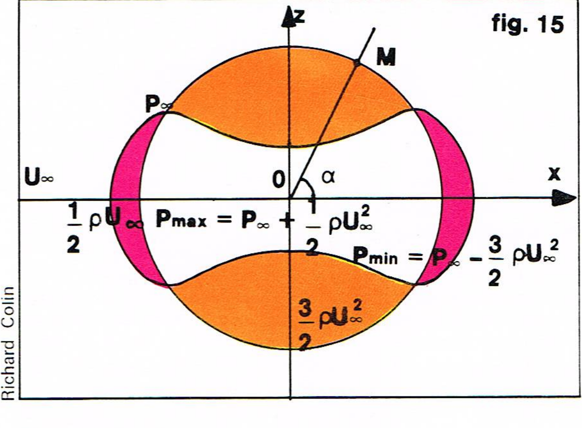
On peut alors montrer qu'il existe une ligne d'écoulement fermée qui sépare le plan en deux régions, l'une ne contenant que le fluide provenant de l'écoulement principal, l'autre le fluide s'écoulant de la source vers le puits. Si les dimensions caractéristiques de cette dernière zone sont grandes devant γ, l'ensemble source-puits peut être considéré comme un doublet. Le potentiel complexe s'écrit alors, d'après **(37)** et **(41)** :

(43) $$W = U_\infty z + \frac{\mu}{z}$$



▶ *Figure 14 : lignes d'écoulement associées au champ créé par la superposition d'un écoulement uniforme bidimensionnel à l'écoulement du doublet (influence d'un cylindre).*

▶ *Page ci-contre, en bas, figure 21 : schéma du champ de vitesse à la surface d'un corps placé dans un écoulement : a, couche limite turbulente ; b, couche limite laminaire ; c, couche adhérente.*



On obtient donc :

$$W(x, y) = U_\infty (x + iy) + \mu \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \Phi + i\psi.$$

Comme l'équation des lignes de courant est donnée par $\psi = k$, il vient, après identification des parties imaginaires :

$$U_\infty y - \frac{\mu y}{x^2 + y^2} = k,$$

qui permet d'obtenir les lignes d'écoulement représentées (*fig.* 14). Remarquons que pour $k = 0$ on obtient $y = 0$ (axe Ox), et le cercle $x^2 + y^2 = \frac{\mu}{U}$ qui sépare l'écoulement principal de l'écoulement créé par le doublet. Sur ce cercle, la composante radiale de la vitesse est nulle. La composante tangente au cercle en un point M peut être donnée à partir de l'expression de Φ : on obtient $V_t = 2\,U_\infty \sin\alpha$ (où $\alpha = \widehat{\vec{Ox}, \vec{OM}}$).

En appliquant l'équation de Bernoulli, on obtient la répartition des pressions exercées par le courant fluide sur le cylindre :

$$P = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 (1 - 4\sin^2\alpha) \quad (\textit{fig. } 15).$$

Du fait de la symétrie des vitesses et des pressions, le champ de vitesse n'exerce aucune action sur le cylindre (paradoxe de D'Alembert). En particulier, la traînée (force agissant dans la direction de l'axe Ox) et la portance (force agissant dans la direction de l'axe Oz) sont nulles.

Doublet, écoulement uniforme et tourbillon

Si l'on ajoute à l'écoulement précédent un tourbillon centré à l'origine, le potentiel complexe s'écrit (voir **42** et **43**) :

(44) $$W = U_\infty z + \frac{\mu}{z} - i\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Log}(z)$$

soit encore, en utilisant les coordonnées polaires :

$$W = U_\infty \rho (\cos\theta + i \sin\theta) + \frac{\mu}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta) + \frac{\Gamma\theta}{2\pi} - \frac{i\Gamma}{2\pi}\operatorname{Log}\rho$$

qui permet de déterminer :

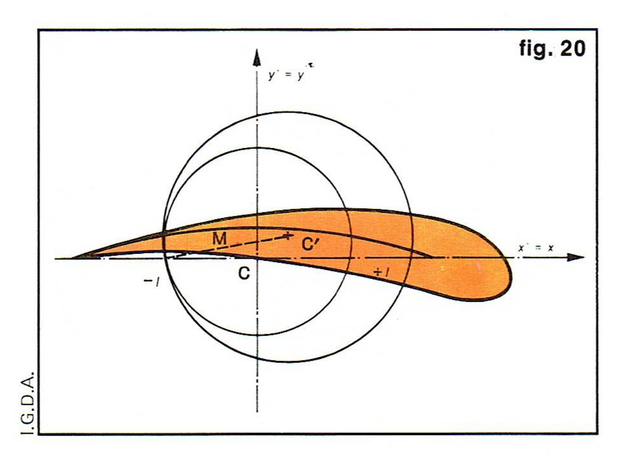
$$\psi = U_\infty \rho \sin\theta - \frac{\mu \sin\theta}{\rho} - \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{Log}\rho$$

et l'équation des lignes de courant est donnée par :

(45) $$U\rho\sin\theta - \frac{\mu\sin\theta}{\rho} - \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{Log}\rho = k$$

Pour la valeur de $k = \frac{-\Gamma}{4\pi}\operatorname{Log}\frac{\mu}{\rho}$ on obtient $\rho^2 = \frac{\mu}{U}$ comme solution valable pour tout θ. Le cercle de rayon $\left(\frac{\mu}{U}\right)^{1/2}$ sépare encore l'écoulement en deux régions, mais la circulation de la vitesse autour du cercle n'est plus nulle.

On a représenté (*fig.* 16) la configuration des lignes de champ pour différentes valeurs de Γ. Il est à remarquer que, si la symétrie par rapport à Oy est conservée (pas de traînée), par contre la symétrie par rapport à Ox est détruite, et la portance n'est plus nécessairement nulle. Plus précisément, on peut, comme précédemment, calculer la répartition de pression, à savoir :



$$P = P_\infty + \frac{1}{2}\rho$$

(46) $$\left[V_\infty^2 \, (1 - 4 \sin^2 \alpha) - \frac{1}{4} \frac{\Gamma^2}{\pi^2 R^2} + \frac{2\,\Gamma V_\infty}{\pi R} \sin \alpha\right]$$

et l'on peut vérifier facilement que la force verticale résultante est donnée par

$$F_y = - \rho \Gamma V_\infty.$$

Si le sens de rotation du tourbillon est opposé, Γ change de signe, et F_y devient positif. La déviation de projectiles tournants (balles de tennis par exemple) dans l'air (effet Magnus) est une confirmation de ce théorème.

Représentation conforme

Contentons-nous ici de préciser quelques notions importantes : une transformation conforme fait correspondre à un point (x, y) du plan complexe d'affixe Z un autre point (x', y') d'affixe Z' par la relation $Z' = f(Z)$. Toute transformation analytique de la variable Z est telle que la transformation $Z' = f(Z)$ est conforme. Il en résulte un certain nombre de conséquences directement applicables à un écoulement plan irrotationnel : soit le potentiel complexe W (Z'), où W (Z') est une fonction analytique. La transformation $Z' = f(Z)$ conduit au potentiel complexe W (f (Z)) qui est toujours une fonction analytique de Z et qui correspond donc à un écoulement irrotationnel. Comme, d'autre part, la transformation conforme conserve les angles, les conditions limites sont respectées (dans le plan initial, $\vec{V}$ doit être parallèle aux obstacles au niveau de l'obstacle ; dans le plan transformé, $\vec{V'}$ sera parallèle à l'obstacle transformé). Les transformées d'équipotentielles et de lignes de courant seront encore des équipotentielles et des lignes de courant associées à la même constante.

Enfin, la circulation le long d'un contour C du plan complexe est égale à la circulation le long du contour transformé C' dans le plan transformé.

Les applications sont particulièrement importantes ; en effet certaines formes d'obstacles peuvent par transformation conforme être ramenées à des formes simples, pour lesquelles on sait calculer les lignes d'écoulement. On peut, en particulier par la transformation de Joukowski, définie par

(47) $$Z' = f(Z) = Z + \frac{l^2}{Z^2}$$

transformer un cercle centré à l'origine de rayon $r = r_0$ en une ellipse de foyers $-2l$ et $2l$. Si $r_0 = l$, l'ellipse dégénère en le segment $-2l$, $+2l$. Le cercle de rayon l est appelé fondamental de la transformation (*fig.* 17). De même, la circonférence C_1 de centre C et passant par le point d'affixe $-l$ se transforme en la courbe C'_1 (*fig.* 18). En effet, C_1 est tangent aux cercles C_0, cercle principal, et C_2, qui se transforment respectivement en le segment $-2l$, $+2l$ et l'ellipse C'_2. L'allure de la courbe C'_1 est déduite du fait qu'elle doit rester tangente aux courbes transformées C'_0 et C'_2.

Dans le cas de courbes correspondant à des cercles centrés sur l'axe imaginaire et passant par les points $\pm l$, on obtient un arc de cercle (*fig.* 19) passant par les points $\pm 2l$, qui correspond à un profil de courbure constante et d'épaisseur nulle.

Enfin, si l'on transforme ce cercle de centre C' situé en dehors des axes et passant par le point $-l$, on obtient un profil d'épaisseur directement proportionnelle à la distance CC' (*fig.* 20).

Les exemples de transformation précédemment discutés montrent que tous les profils peuvent être obtenus comme des transformations de cercles. Les profils de Joukowski, toutefois, présentent deux inconvénients : un squelette à courbure constante et un bord de fuite en flèche. On peut porter remède à ces inconvénients en faisant varier l'exposant de la transformation. Un exemple nous est fourni par les profils de Karman et Trefftz qui éliminent les formes en flèche du bord de fuite et des profils de von Mises qui ont un squelette à courbure variable.

Action aérodynamique sur un profil

Nous avons vu que, grâce aux transformations conformes, on peut obtenir, à partir du cercle, des profils aérodynamiques, et que, connaissant les vitesses et le potentiel complexe autour d'un cylindre plongé dans un courant uniforme, on peut, par les transformations conformes, analyser le champ de vitesse autour du profil.

Dans l'étude du champ de vitesse, on se sert très utilement des deux **formules de Blasius** — données ici sans démonstration — qui permettent de déterminer, connaissant le potentiel complexe W (z), l'action aérodynamique exercée par le courant sur le profil :

(48) $$F = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \int_C \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz$$

(49) $$\mathcal{M}/Oz = -\frac{\rho}{2} \mathcal{R}e \int_C z \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz$$

où $\mathcal{R}e \int_C z \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz$ désigne la partie réelle de

$$\int_C z \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz.$$

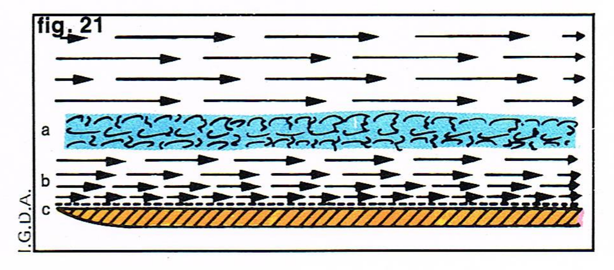
La première formule de Blasius **(48)** fournit un nombre complexe dont le conjugué représente vectoriellement la force aérodynamique agissant sur le profil, tandis que la seconde formule de Blasius **(49)** donne le moment $\mathcal{M}$, par rapport à l'axe Oz exercé par la force aérodynamique.

La résistance aérodynamique. Résistance induite. Ailes de longueur finie.

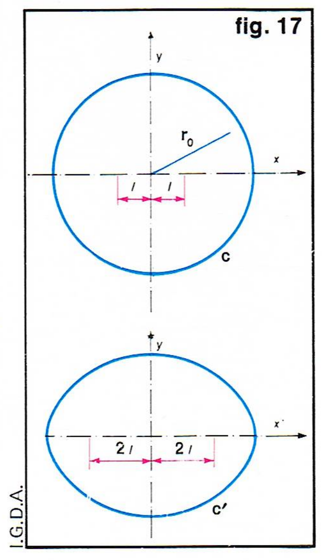
La théorie de Joukowski explique l'origine de la portance, mais non celle de la résistance. Pour comprendre comment celle-ci est engendrée et comment il est possible de déterminer les lois qui la régissent, il faut considérer le champ des vitesses et des pressions sur la surface d'un corps placé dans un écoulement (*fig.* 21).

La couche de fluide qui se trouve immédiatement au contact de la surface du corps, contrairement à ce que l'on suppose lorsqu'on fait l'hypothèse des fluides parfaits, a une vitesse nulle *(condition de non-glissement)*. En dehors de cette couche, la vitesse du fluide croît rapidement, tout en se maintenant sensiblement parallèle à la surface du corps *(couche limite laminaire)*. Dans cette couche laminaire (qui est de très faible épaisseur), le mouvement du fluide est entièrement dominé par les effets de la viscosité.

Si on s'éloigne davantage de la surface du corps, le mouvement du fluide devient turbulent avec apparition de fluctuations de vitesses. A une distance encore plus grande, le mouvement du fluide prend un caractère régulier : on peut considérer que le fluide est parfait et que son mouvement n'est pas influencé par l'action des forces visqueuses. La zone de fluide intéressée par les phénomènes que nous venons de décrire prend le nom de *couche limite turbulente*.

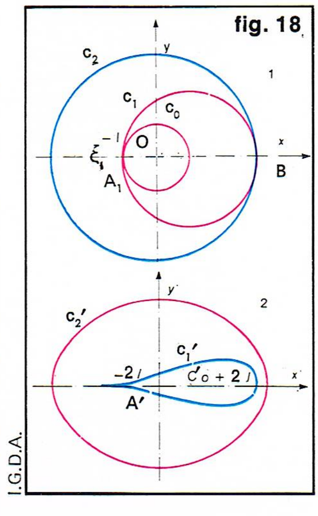


◄ ***Figure 20 : transformations de cercles non centrés sur les axes et passant par le point — l.***

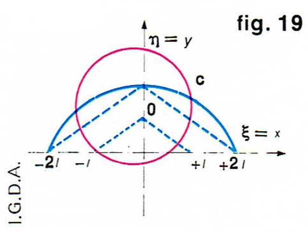


▲ ***Figure 17 : transformation de Joukowski d'une circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon r_0.***

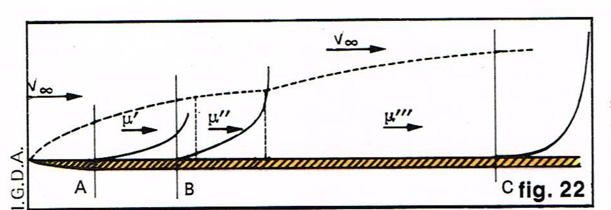
▼ ***Figure 18 : transformation de Joukowski de la circonférence C_1 ayant son centre sur l'axe réel passant par le point $\xi_1 = -l$.***

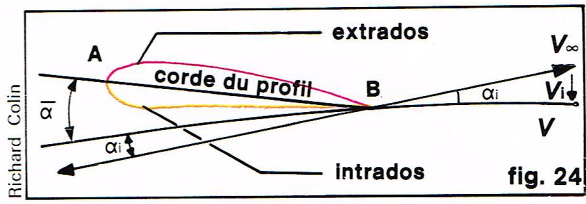


▼ ***Figure 19 : transformations de cercles centrés sur l'axe imaginaire et passant par les points + l et — l.***



▶ *A gauche, figure 22 : développement de la couche limite sur une surface plane placée dans un écoulement parallèle à la surface. Sur la figure, on a montré schématiquement l'allure des profils de la vitesse en quelques points de la surface ; au-dessus de la ligne pointillée, l'écoulement est uniforme (vitesse V_∞ qu'il possédait avant de rencontrer la surface). A droite, figure 24 : illustration schématique de la relation existant entre l'angle d'incidence géométrique et l'angle d'incidence effectif pour une aile d'allongement fini.*





On connaîtra mieux la structure de la couche limite en étudiant l'écoulement du fluide sur une surface plane parallèle à la direction de l'écoulement (*fig.* 22). La couche limite commence à se développer à partir du bord de la plaque, l'écoulement étant laminaire dans la zone immédiatement en aval de ce même bord. Au fur et à mesure que le fluide s'écoule, le long de la plaque, on commence à voir apparaître des oscillations dans la vitesse (zone de transition de la couche limite : AB). En aval de cette zone, les oscillations dégénèrent rapidement en une série de tourbillons, et la couche limite s'épaissit fortement en devenant turbulente. Expérimentalement, on a observé que la couche limite laminaire devient turbulente lorsque le nombre de Reynolds : $\mathcal{R}e = \rho \frac{VL}{\mu}$ (où L est la longueur de la plaque au point examiné) dépasse la valeur de $5 \cdot 10^5$.

La présence d'un gradient de pression agissant dans le sens opposé à la direction d'écoulement du fluide peut gêner le développement de la couche limite laminaire, engendrant le phénomène appelé *décollement de la couche limite*. En effet, cette augmentation de pression ralentit davantage l'écoulement au voisinage de la surface, allant jusqu'à inverser le sens de cet écoulement et provoquer le décollement de cette couche. La *figure* 23, représentant les profils des vitesses dans la couche limite dans le cas d'une surface plane, illustre ce que nous venons de dire.

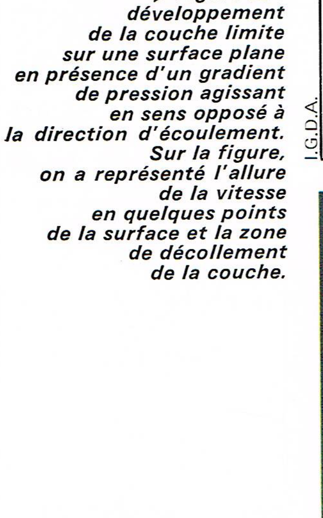
Nous avons précédemment considéré le fluide comme un fluide parfait (voir par exemple le cas du cylindre dans un écoulement uniforme), et nous avons négligé l'action de la viscosité. Cependant, dans un fluide réel, la viscosité ralentit le fluide qui contourne le corps. Il se forme, en aval de ce dernier, un décollement de la veine fluide qui, instable, engendre un sillage tourbillonnaire.

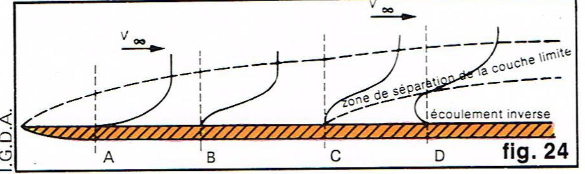
Les ailes, en plus de la résistance engendrée par le frottement et de celle engendrée par la diminution de la pression amont-aval (résistance de forme), provoquée par le décollement des filets fluides, rencontrent un troisième type de résistance, appelée *résistance induite*, qui naît du fait que l'aile a une ouverture finie. Dans une aile portante, il se crée une différence de pression entre le ventre et le dos : puisque l'aile est finie, l'air passe de la partie inférieure à la partie supérieure en contournant les extrémités et en donnant naissance à des tourbillons marginaux. En outre, la pression atteint une valeur minimale dans la partie centrale du dos de l'aile et une valeur maximale dans la partie centrale du ventre ; cela provoque des courants transversaux qui, se rejoignant en aval de l'aile, engendrent également un système de tourbillons.

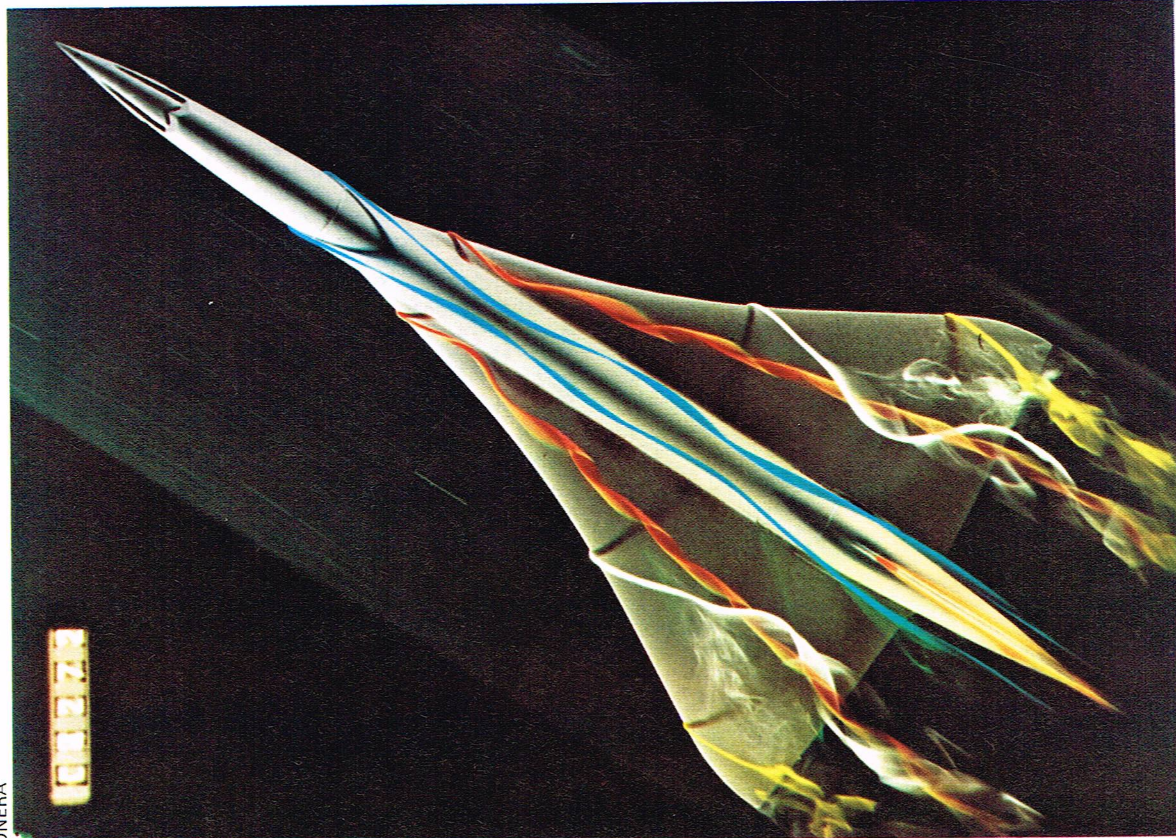
Si l'on tient compte de ces effets, on peut montrer, en s'appuyant sur une théorie développée essentiellement par Lanchester et Prandtl, que l'aile finie se comporte (en ce qui concerne les effets de portance) comme une aile infinie qui serait placée dans un écoulement sous un angle incident $\bar{\alpha}$ au lieu de α (*fig.* 24) avec

(50) $$\bar{\alpha} = \alpha - \text{Arctg}\,\frac{V_i}{V_\infty}$$

(où V_i représente la vitesse induite par les tourbillons marginaux).


▶ *Figure 23 : développement de la couche limite sur une surface plane en présence d'un gradient de pression agissant en sens opposé à la direction d'écoulement. Sur la figure, on a représenté l'allure de la vitesse en quelques points de la surface et la zone de décollement de la couche.*





▶ *Visualisation, au tunnel hydrodynamique de l'ONERA, de l'écoulement à basse vitesse autour d'une maquette de Concorde en configuration d'atterrissage (vue d'extrados).*

Effet de la compressibilité

Dans les différents écoulements considérés jusqu'ici ou dans les théories développées, nous avons supposé que la masse volumique du fluide demeure constante en tout point de l'écoulement. Pour les gaz, cette hypothèse n'est valable que sous certaines conditions. Pour illustrer de quelle manière les effets de la compressibilité influencent le mouvement du fluide, considérons un tube de courant de section variable. Si nous indiquons par A_1 et A_2 deux sections transversales de celui-ci, l'équation de continuité : $\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$ appliquée entre les deux sections examinées montre qu'à une variation de surface correspond une variation, en sens opposé, du produit ρV. En particulier, si le fluide est incompressible, à une diminution de surface correspond une augmentation de vitesse, et *vice versa*. Pour un gaz, il peut arriver, à cause des variations importantes de masse volumique, qu'à une augmentation de section corresponde une augmentation de vitesse.

Pour établir un critère nous permettant de calculer jusqu'à quel point le fluide peut être considéré comme incompressible, comparons l'équation de Bernoulli **(24)**, que nous avons calculée dans le cas des fluides incompressibles, avec l'équation de l'énergie écrite sous la forme **(22)**.

On note tout de suite que les deux équations sont identiques si le terme $c_V T$ est constant ou varie de manière négligeable le long de la ligne de courant. Supposons maintenant qu'il existe un point d'arrêt ($V = 0$). L'équation de l'énergie, appliquée entre une section quelconque du tube de flux et la section d'arrêt du fluide, donne :

$$\frac{V^2}{2} + c_P T = 0 + c_P T_0$$

c'est-à-dire :

$$\Delta T = T_0 - T = \frac{V^2}{2\,c_P} \quad \text{et}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{V^2}{2\,c_P T} \qquad (51)$$

Puisque, comme nous l'apprend la thermodynamique, $\frac{R}{\mathcal{M}} = c_P - c_V$ et $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$, **(51)** peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{V^2}{2\,T}\,\frac{(\gamma - 1)\,\mathcal{M}}{\gamma R} \qquad (52)$$

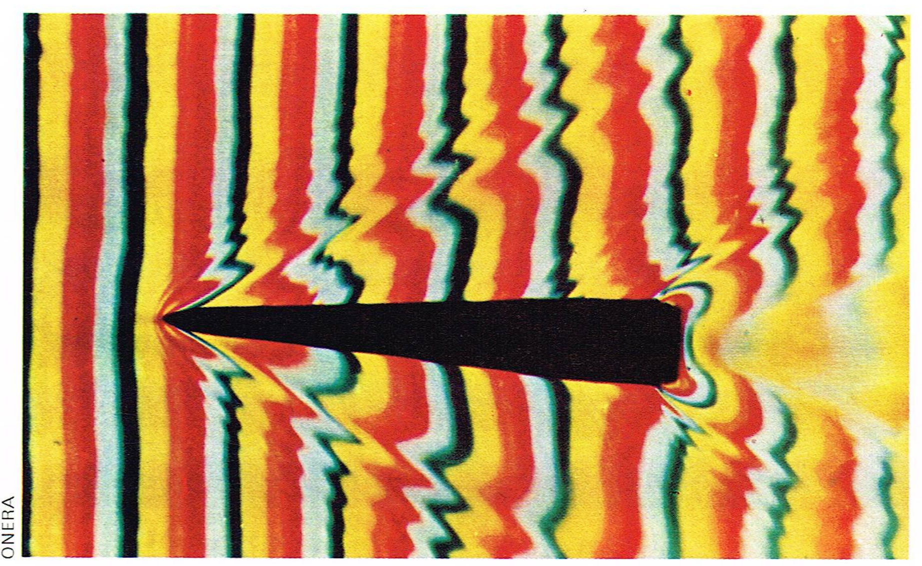
En posant $M^2 = \frac{V^2 \mathcal{M}}{\gamma R T}$, **(52)** devient :

$$\frac{\Delta T}{T} = M^2 \cdot \frac{\gamma - 1}{2} \qquad (53)$$

D'après **(53)**, les variations de température sont de l'ordre de 5 % pour M = 0,5 et descendent à moins de 1 ‰ pour M = 0,2. Donc, tant que le paramètre M demeure inférieur ou égal à 0,2, les gaz peuvent être considérés comme incompressibles, les variations de densité pouvant être négligées. Mais au fur et à mesure que M augmente, les variations de température et de pression ne peuvent plus être négligées puisqu'elles changent les caractéristiques du mouvement du fluide. Dans des conditions normales (T = 288 °K), la vitesse correspondant à M = 0,2 est d'environ 68 m/s.

Le paramètre M, qui est un nombre adimensionnel, prend le nom de *nombre de Mach*. Sa signification physique devient évidente si l'on remarque que le terme $\left(\frac{\gamma R T}{\mathcal{M}}\right)^{1/2}$ est égal à la vitesse **c** à laquelle se propage une faible variation de pression, ou onde sonore, au sein de la masse fluide : le nombre de Mach représente donc le rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse du son.

Illustrons le comportement de l'écoulement dans le cas où $V <$ **c** *(écoulement subsonique)* et $V >$ **c** *(écoulement supersonique)*. Considérons, à l'instant t_0, un corps se déplaçant à la vitesse uniforme V au sein d'une masse fluide. Le corps engendre dans le fluide des perturbations de pression qui se propagent au sein du fluide par l'intermédiaire d'ondes sphériques (*fig.* 25), dont le rayon croît dans le temps avec la vitesse **c** et dont le centre se déplace à la vitesse V (vitesse relative du corps par rapport au fluide). Lorsque l'onde s'éloigne du corps, les masses de fluide mises en mouvement sont de plus en plus grandes, et la variation de pression qui se propage devient de plus en plus faible.



▲ *Écoulement à Mach 2 ; ondes de choc et de détente attachées à un dièdre sans incidence.*

Si le fluide s'écoule à une vitesse supersonique (M > 1), donc supérieure à celle à laquelle avance la perturbation de pression, il arrive sur l'obstacle sans subir de perturbation. Le champ est ainsi divisé en deux régions : une antérieure au corps, dans laquelle la perturbation ne se fait pas sentir, et une postérieure au corps, où se propage la perturbation. On vérifie facilement que les deux régions sont séparées par une surface conique, enveloppe des surfaces d'ondes, ayant une semi-ouverture donnée par l'expression :

$$\sin \mu = \frac{c}{V} = \frac{1}{M} \qquad (54)$$

L'angle μ prend le nom d'*angle de Mach*, et les génératrices du cône celui de *lignes de Mach*. Lorsque les effets de la compressibilité ne peuvent plus être négligés, l'équation de Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$ perd son caractère linéaire : on a toujours une équation différentielle du second ordre, mais beaucoup plus complexe. Prandtl et Glauert, dans le cas de petites perturbations, ont linéarisé l'équation du mouvement et abouti à l'expression suivante (mouvement bidimensionnel) :

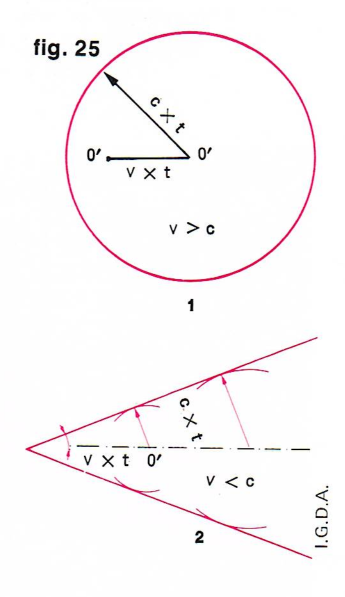
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\,(1 - M^2) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (55)$$

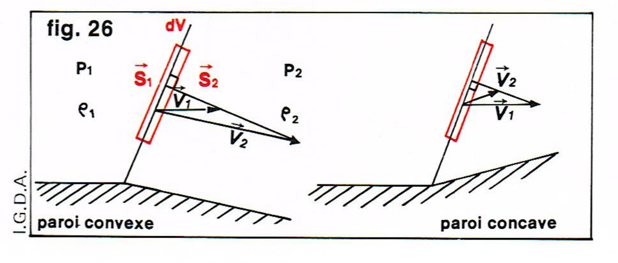
où la fonction Φ représente le potentiel associé à la perturbation.

L'équation de Prandtl et Glauert est valable tant pour l'écoulement subsonique que pour l'écoulement supersonique : entre ces deux cas, il existe cependant une différence considérable. En effet, si nous appliquons **(55)** à un mouvement subsonique, le terme $1 - M^2$ est positif, et les deux dérivées sont de même signe ; par contre, si le régime est supersonique, $1 - M^2$ sera négatif, et les dérivées de signe opposé. L'équation résultante est, dans ce dernier cas, de type hyperbolique et coïncide avec l'équation de propagation d'ondes. La résolution de cette équation montre que les lignes le long desquelles se propage la perturbation sont inclinées d'un angle égal à l'angle de Mach ; elles sont donc parallèles aux lignes de Mach.

Considérons le champ de vitesse le long d'une paroi (*fig.* 26) comportant un angle de faible valeur. L'arête de la

▼ *Figure 25 : perturbations créées par une particule se déplaçant à la vitesse V respectivement inférieure (1) et supérieure (2) à la vitesse du son.*





◀ *Figure 26 : variation de vitesse associée à une perturbation de pression. Ces perturbations sont supposées provoquées par une très petite inclinaison de la paroi sur laquelle s'écoule le fluide.*

▶ *A gauche,*
le **Premier Voyage de l'Ariel** *(musée Carnavalet).*
A droite,
le bombardier supersonique
Convair B-58,
à ailes delta.

paroi produit une perturbation qui se propage en aval (à partir de l'arête), le long des lignes de Mach, et le fluide, rencontrant ces lignes, est dévié et se maintient ensuite parallèle à la nouvelle direction de la paroi, avec une vitesse, une pression et une densité différentes de celles qu'il avait en amont.

Considérons le volume élémentaire parallélépipédique dV, délimité par la surface fermée constituée par les deux surfaces parallèles et infiniment voisines, S_1 (dans la zone amont de la surface de discontinuité) et S_2 (dans la zone aval).

Soit $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ les normales sortantes associées à ces deux surfaces, et $P_1\vec{V}_1$, $P_2\vec{V}_2$ les valeurs de la pression et de la vitesse dans les zones amont et aval. On notera par V_n et V_t les composantes normales et tangentielles de la vitesse.

Si l'on écrit le principe de conservation de la masse, on aura à exprimer que le flux de masse à travers la surface délimitant dV est nul, c'est-à-dire :

$$(\rho_1\vec{V}_1)\,\vec{n}_1S_1 + (\rho_2\vec{V}_2)\,\vec{n}_2S_2 = 0$$

Soit, puisque $S_1 = S_2$: $\rho_1V_{1n} = \rho_2V_{2n}$

En exprimant maintenant la conservation du flux de la quantité de mouvement, il vient, d'après **(17)** :

$$P_1\vec{n}_1S_1 + P_2\vec{n}_2S_2 = -\rho\vec{V}_1\,V_{1n}\,S_1 - \rho\vec{V}_2\,V_{2n}\,S_2$$

et, en projetant sur la surface de discontinuité :

$$\rho_1V_{1t}\,V_{1n} = \rho_2V_{2t}\,V_{2n}$$

qui se réduit, puisque

$$\rho_1V_{1n} = \rho_2V_{2n},\ \text{à}\ V_{1t} = V_{2t},$$

et qui exprime la continuité des composantes de la vitesse parallèles à la surface de discontinuité.

De ce fait, si la paroi est concave, la vitesse en aval de la ligne de Mach est inférieure à la vitesse en amont, et le fluide, en la traversant, est ralenti et comprimé. Si, en revanche, la paroi est convexe, le fluide est accéléré et dilaté. Entre les deux cas, il existe des différences considérables que nous allons bientôt illustrer.

Notons que le comportement de l'écoulement supersonique diffère fondamentalement de l'écoulement subsonique. En effet, dans ce dernier cas, la perturbation introduite par l'arête se propagerait aussi en amont, de telle sorte que les lignes de courant s'incurveraient progressivement et, en cas d'expansion, se décolleraient de la paroi. Pour l'écoulement supersonique, et si d'autres déviations existent en aval de la première, les perturbations ne pouvant se propager en amont, le courant ne sera dévié qu'au niveau des lignes de Mach passant par les différentes arêtes, et, puisque le nombre de Mach varie en traversant chaque ligne, les lignes de courant seront diversement inclinées à chaque arête successive, leur inclinaison dépendant des nombres de Mach en aval de chacune des lignes précédentes. En particulier, pour un profil polygonal convexe, les lignes de Mach divergeront, tandis qu'elles convergeront si le profil polygonal est concave.

La théorie de Prandtl et Glauert s'applique pour de petites perturbations. Si elles sont importantes, comme cela peut arriver, par exemple dans le cas où le bord d'attaque d'une aile est placé dans un écoulement supersonique, l'expansion et la compression ne se font plus progressivement. Mais, tandis que, dans le cas de l'expansion, la brusque déviation entraîne seulement l'incurvation des filets de courant, dans le cas de la compression, puisque les lignes de Mach sont convergentes, on a une accumulation des effets et une compression brusque équivalant à une discontinuité *(onde de choc)*. On doit alors développer une théorie, basée sur l'application des équations fondamentales de la dynamique des fluides, qui permet d'obtenir, pour des conditions initiales données, les caractéristiques de l'écoulement et en particulier les relations entre les grandeurs amont et aval de l'onde de choc (indices respectifs 1 et 2) [*fig.* 27].

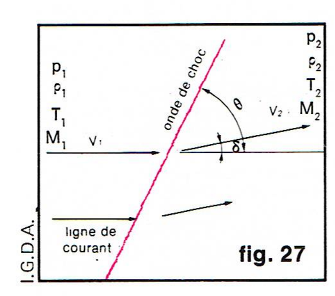
$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2\sin^2\theta - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)\,(M_1^2\sin^2\theta)}{(\gamma-1)\,M_1^2\sin^2\theta + 2}$$

$$\frac{V_2^2}{V_1^2} = 1 - 4\,\frac{(M_1^2\sin^2\theta - 1)\,(\gamma M_1^2\sin^2\theta + 1)}{(\gamma+1)^2\,M_1^4\sin^4\theta}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\delta} = \operatorname{tg}\theta\left(\frac{\gamma+1}{2}\,\frac{M_1^2}{(M_1^2\sin^2\theta - 1)} - 1\right)$$

▼ *Figure 27 : notations indiquant les grandeurs en amont et en aval d'une onde de choc oblique.*



Bulloz

On peut déduire de ces équations trois conclusions importantes :

a - Le choc est d'autant plus intense que l'angle θ est important, l'intensité maximale étant obtenue quand $\theta = \frac{\pi}{2}$ (on parle alors de choc normal). Dans ce cas, les lignes d'écoulement ne sont pas déviées, la vitesse de l'écoulement est normale à l'onde de choc, et la vitesse passe d'une valeur supersonique à une valeur subsonique lors de la traversée de l'onde.

b - L'angle de déviation δ admet une valeur maximale au-delà de laquelle l'onde de choc se décolle de l'obstacle (onde de choc détachée), c'est-à-dire qu'elle prend naissance en un point situé légèrement en amont du sommet de l'angle. Elle s'incurve alors avec une courbure d'autant plus importante que le nombre de Mach M_1 est faible.

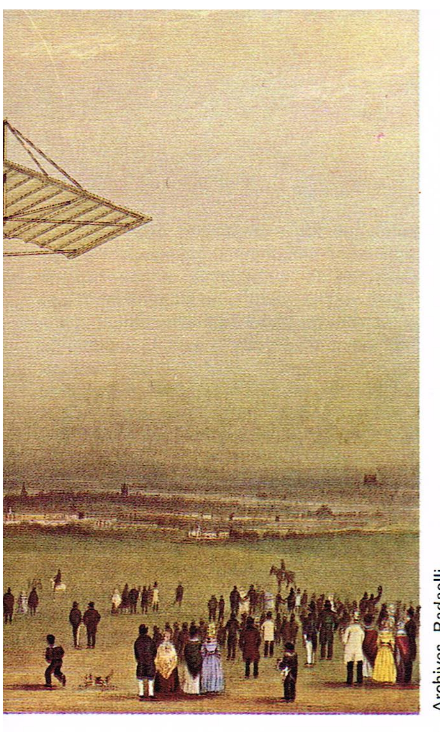
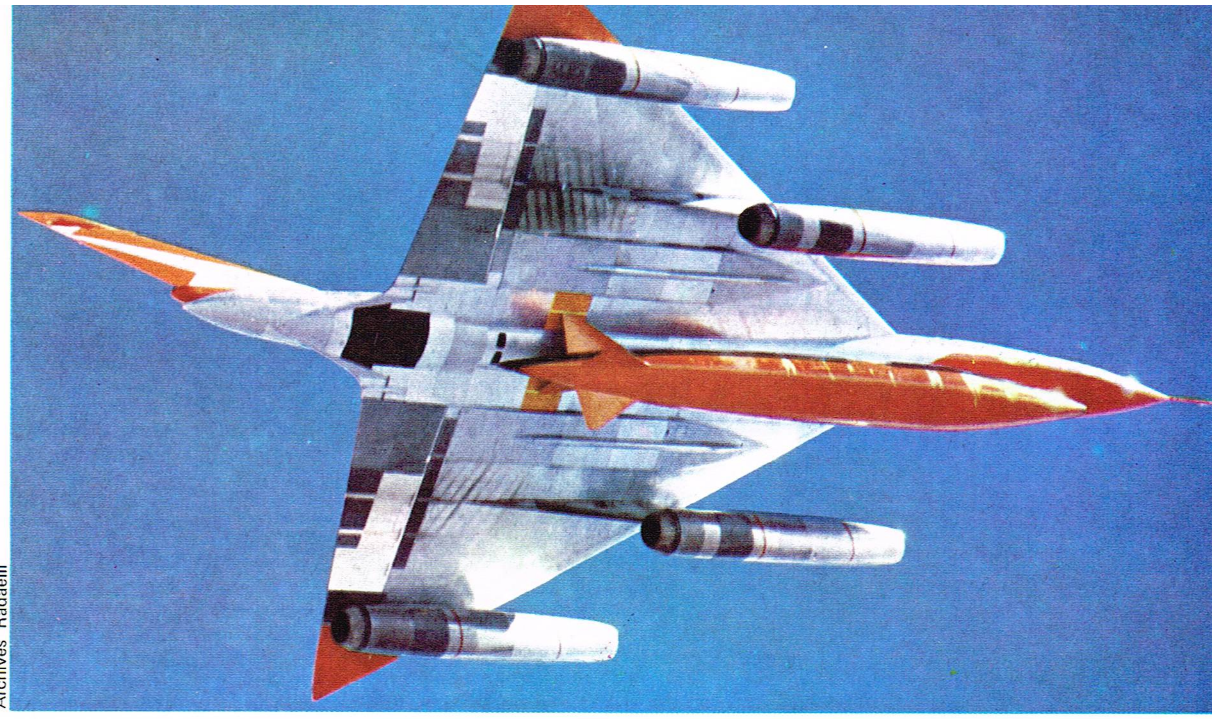
c - A la traversée de l'onde de choc, la pression augmente brutalement et la vitesse diminue. Dans le cas d'un choc très intense, la vitesse devient subsonique (onde de choc forte). La forte compression, indépendamment de la viscosité, engendre une forme supplémentaire de résistance, qui prend le nom de *résistance d'onde*. Si la vitesse reste supersonique, l'intensité du choc est moindre, et l'on parle d'onde de choc faible.

Influence de la forme des ailes

Que l'on se trouve dans une situation subsonique ou supersonique, la forme de l'aile a une grande influence



Archives I.G.D.A.

Archives Radaelli

sur ses caractéristiques aérodynamiques. Une aile en flèche, par exemple, présente une résistance d'onde moindre qu'une aile rectangulaire, parce que les forces qui agissent sur elle dépendent de la composante de la vitesse normale au bord d'attaque. Si l'angle de flèche est suffisamment grand, la composante normale devient subsonique, et la résistance d'onde disparaît. Cependant, pour les faibles nombres de Mach (vitesses de décollage et d'atterrissage), l'aile en flèche possède une valeur relativement basse de sa portance maximale ainsi que de mauvaises qualités du point de vue de la manœuvrabilité.

Une solution originale a été apportée par l'emploi de l'aile à flèche variable : chaque demi-voilure est articulée autour d'un pivot situé près de l'emplanture. En configuration aile déployée, la portance est augmentée, ce qui permet des vitesses de décollage et d'atterrissage plus faibles, donc des longueurs de piste très courtes. A vitesse élevée, les ailes sont repliées et la réduction de la traînée améliore les performances.

Le premier appareil de ce type a été le *Bell X*5, puis on a vu apparaître le *General Dynamics F III*, opérationnel depuis 1970. En France, les avions Dassault ont créé le *Mirage G*8 (flèche variant de 20 à 70°).

Une autre possibilité *(Convair 7002)* fait appel à une forme d'aile nouvelle, l'aile delta. Dans ce type d'aile, trois facteurs interviennent : la présence de la flèche, l'allongement et l'épaisseur relative, qui reculent le nombre de Mach critique (nombre de Mach de l'écoulement aval à partir duquel la vitesse atteint la vitesse du son en un point du profil) et diminuent la traînée *(Mirage III, IV, Convair F 107, North American B 70...)*.

Il existe une forme d'aile proche de l'aile delta : c'est l'aile gothique dont le *Concorde* est équipé. La flèche en est très fortement augmentée aux extrémités. L'aile delta et l'aile gothique ont l'inconvénient d'avoir de faibles portances aux basses vitesses, c'est pour cette raison que l'atterrissage des avions équipés de ces ailes doit être très cabré et effectué à vitesse relativement importante. En revanche, la stabilité est très intéressante, et le déplacement du centre de poussée au cours du franchissement de la zone transsonique est faible.

Il faut remarquer que pour étudier les caractéristiques de telles ailes, les calculs théoriques sont toujours fondés sur un certain nombre d'approximations, et, de ce fait, les résultats obtenus ne sont pas en parfait accord avec les données expérimentales. Il est donc toujours nécessaire d'effectuer en soufflerie l'étude expérimentale des modèles à l'échelle soit de l'aile, soit de l'avion tout entier, afin de pouvoir déterminer lequel des nombreux types de projets est le plus efficace du point de vue aérodynamique.

Applications de l'aérodynamique

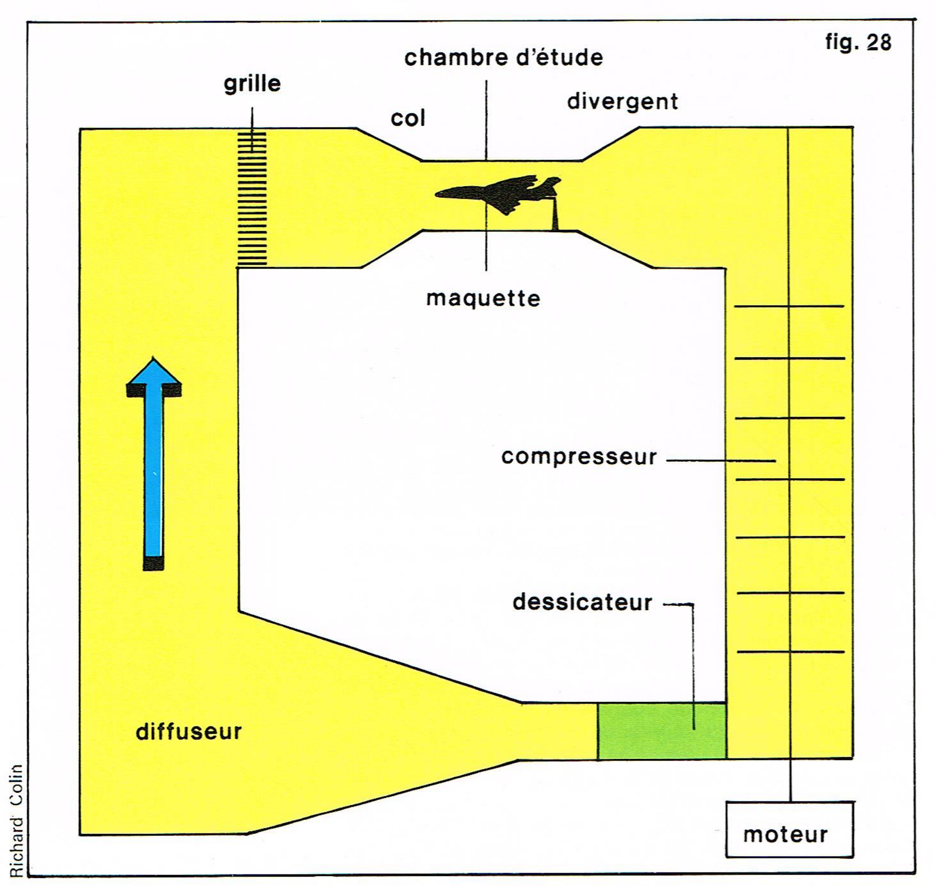
Souffleries aérodynamiques

Pour étudier les forces qui s'exercent sur un corps en mouvement dans l'air, un bon moyen d'investigation consiste à placer une maquette immobile dans une veine d'air en mouvement, dans une soufflerie aérodynamique.

▼ *A gauche, le* **General Dynamics F 111,** ***avion de chasse caractérisé par des*** **ailes à flèche variable.** ***A droite,*** **l'aile gothique** ***du*** **Concorde.**



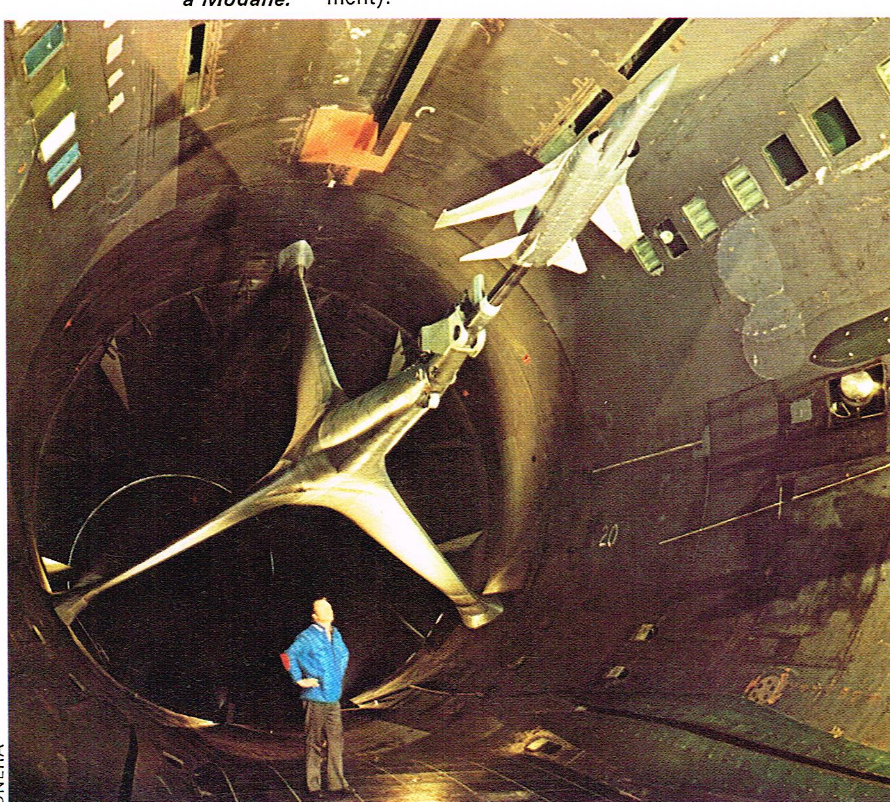

Rémy Poinot - TOP



▲ *Figure 28 : soufflerie à fonctionnement en continu en cycle fermé.*

▼ *Essai d'une maquette au 1/8,6 du* **Mirage G8.02** *dans la soufflerie S1 du centre de l'ONERA à Modane.*

Le principe général d'une soufflerie est le suivant : on réalise une veine d'air dans laquelle, tant en direction que dans le temps, la vitesse est constante. Dans cette veine, on place, si les dimensions le permettent, l'objet à étudier (cas de voitures, petits avions aux vitesses inférieures à celle du son, têtes de fusées...), ou sinon une maquette à échelle réduite, en respectant certaines règles de similitude (même nombre de Reynolds, etc., pour l'écoulement).



Les premières souffleries sont apparues peu avant la Première Guerre mondiale, et se sont principalement développées sous l'influence de l'industrie aéronautique. Entre 1920 et 1940, cette méthode d'étude s'est généralisée chez les constructeurs d'avions, et les souffleries subsoniques (vitesse de la veine d'air inférieure à la vitesse du son) ont eu un essor important. Depuis 1950, le développement d'avions de plus en plus rapides, et ensuite les grands programmes spatiaux, ont entraîné la construction de souffleries de plus en plus puissantes, possédant une vitesse transsonique (nombre de Mach variant de 0,9 à 1,2 environ). Dans la décennie suivante, les souffleries, fonctionnant alors sur un autre principe, ont été construites pour obtenir des nombres de Mach variant de 5 à 25 environ.

Selon leur principe de fonctionnement et les vitesses atteintes, on peut distinguer plusieurs types de souffleries :

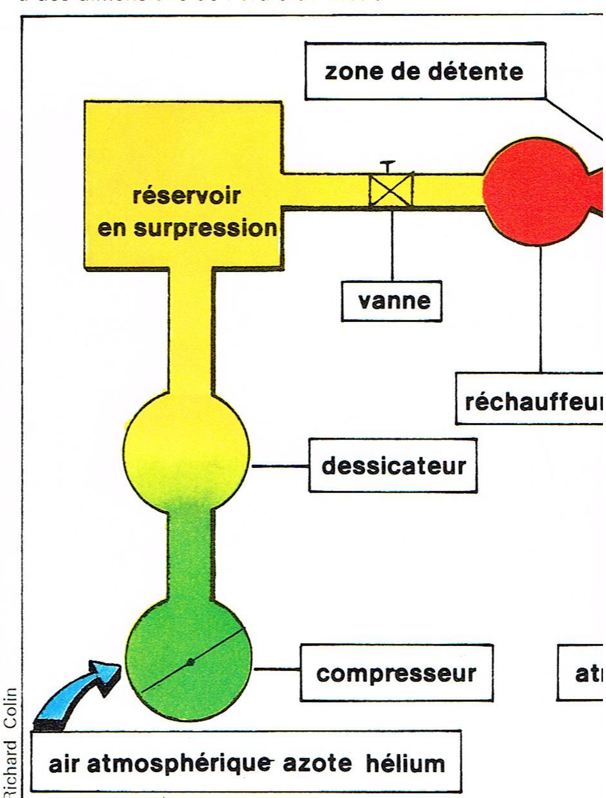
les *souffleries continues* où la vitesse de l'air est constante pendant un temps important (minutes, heures) ;

les *souffleries par rafales* où l'air est envoyé pendant quelques secondes, voire quelques dizaines de millisecondes.

— Dans les souffleries continues (*fig.* 28), l'air est mis en mouvement par un moteur auquel l'énergie est fournie soit par voie électrique (ONERA à Chalais-Meudon, par exemple) soit par voie hydraulique (ONERA à Modane-Avrieux), et il est accéléré au niveau du col par effet Venturi. Dans ce cas, la vitesse de l'air est approximativement proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur, et elle ne dépasse pas, en général, la vitesse du son.

Ces souffleries peuvent fonctionner selon deux techniques : ou bien l'air est emprunté à l'atmosphère, accéléré et restitué à l'atmosphère à la sortie de la chambre d'étude, ou bien on utilise en circuit fermé soit de l'air atmosphérique desséché, pour éviter la condensation de la vapeur d'eau lors de la détente, soit de l'azote, soit même, dans de plus petites souffleries, de l'hélium. Les puissances mises en jeu sont de 10 à 200 mégawatts et les chambres d'études peuvent atteindre 8 m de diamètre.

Sur ce principe des souffleries continues, on peut atteindre des vitesses de l'ordre de Mach 3 (régime supersonique) si la géométrie de la chambre de détente et du col est particulièrement bien étudiée ou si l'on utilise des parois perméables : la perte d'air à travers ces dernières réduit les réflexions des ondes de chocs qui prennent naissance sur la maquette et qui pourraient modifier l'écoulement. Dans de telles souffleries, la chambre de mesure a des dimensions de l'ordre du mètre.



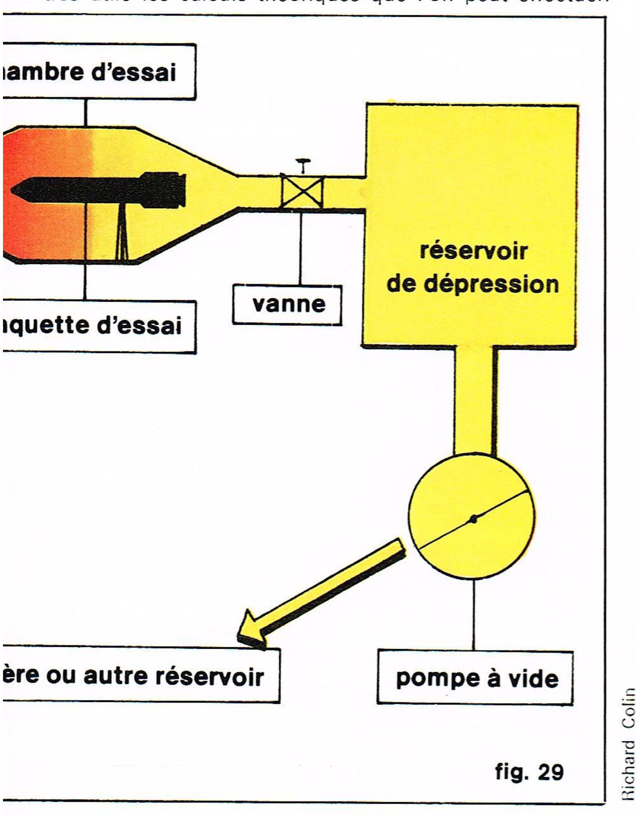
— Pour passer au régime hypersonique, correspondant à des vitesses dont le nombre de Mach est supérieur à 5, on utilise des souffleries à rafales (*fig.* 29) : l'énergie y est fournie par la détente d'un gaz comprimé accumulé dans un réservoir; ce gaz est brutalement libéré, traverse la chambre de mesure, et est aspiré à l'autre extrémité par un « réservoir » maintenu en dépression par des pompes à grand débit. Au-delà de Mach 5, l'abaissement de la température dû à la détente, qui se fait de manière isentropique, est tel qu'une liquéfaction de l'air peut se produire. Pour éviter cet inconvénient, un réchauffage préalable est nécessaire; à titre d'exemple, l'air est porté à 1 000 °K pour des vitesses correspondant à Mach 10, et à 2 500 °K pour Mach 25. Ce réchauffage se fait à l'aide de tôles ou de billes métalliques chaudes sur lesquelles l'air passe avant la détente. Les rafales obtenues ont une durée de 0,1 à 10 secondes, et les énergies mises en jeu sont de 10 à 50 mégajoules.

En soufflerie, les mesures qui sont faites sont des mesures de forces ou de moments qui s'exercent soit sur la maquette complète (portance, traînée à des incidences variables dans le cas d'un avion...), soit sur des parties de la maquette (ailes, empennage). Les autres mesures sont des mesures de pression et de température et sont effectuées au moyen soit de jauges, soit, par exemple, de peintures dont la couleur varie avec la température.

Les techniques de visualisation sont également très utilisées : émission, par une série de trous percés dans la maquette, de filets de fumée colorée; méthodes interférométriques visualisant les lignes d'égal chemin optique; observation en lumière blanche polarisée permettant la visualisation des zones d'égale biréfringence.

Les principales difficultés rencontrées sont les suivantes : d'une part, les dimensions limitées de la veine utile induisent sur les parois de la soufflerie des effets de couche limite modifiant l'écoulement, et obligent à utiliser des maquettes à échelle réduite; d'autre part, on ne peut réaliser certaines conditions d'écoulement, par exemple celles que peut rencontrer un avion en vol ou un étage de fusée (température et pression), ce qui impose l'utilisation de similitudes généralement très imparfaites; enfin, il est difficile d'obtenir entre la maquette étudiée et la paroi de la soufflerie une vitesse relative qui mette en évidence l'effet de sol (avion au décollage ou à l'atterrissage, voiture roulant sur une route, soumise ou non à un vent latéral).

Néanmoins, ce moyen d'investigation complète de façon très utile les calculs théoriques que l'on peut effectuer.



Fluidique

La fluidique est une technique récente d'automatismes et d'asservissements utilisant, dans des composants, l'action, entre eux ou avec des parois fixes ou mobiles, de jets fluides (gaz, ou plus rarement liquides). Parmi les fonctions qui sont actuellement commercialisées, on rencontre certaines fonctions logiques (et, ou ...) ainsi que des fonctions analogiques d'amplification.

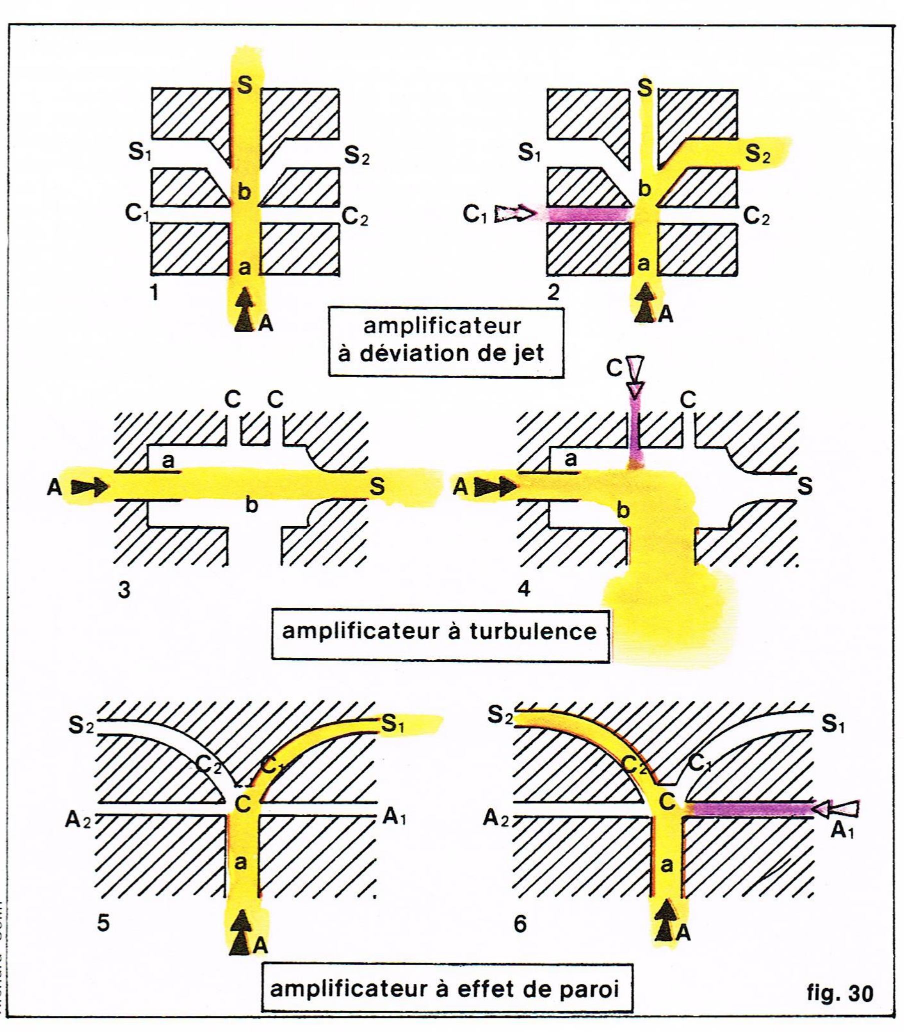
Les principaux effets utilisés dans des composants fluidiques sont les transitions d'écoulements du régime laminaire au régime turbulent, l'effet de paroi ou effet Coanda, le décollement et le recollement de couches limites dans des géométries perturbées par des jets d'air secondaires, les déviations d'un jet par un autre jet.

Nous allons prendre comme exemple l'*amplificateur proportionnel à déviation de jet*, l'*amplificateur à turbulence* et l'*amplificateur bistable à effet de paroi*.

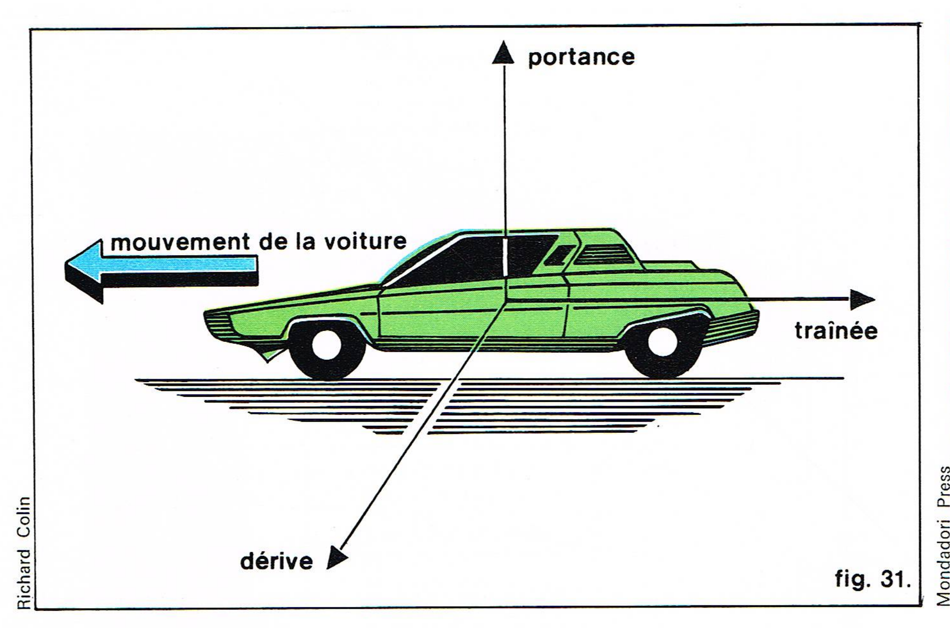
— L'amplificateur à déviation de jet est présenté sommairement sur la *figure 30-1;* il se compose d'un jet principal *A*, traversant la tuyère d'alimentation *a* qui débouche dans la chambre *b*; le jet obtenu est un jet turbulent. Ce jet peut être dévié par les deux jets de commande C_1 et C_2. Si la pression est la même dans le jet C_1 et dans le jet C_2, le jet *A* n'est pas dévié, et il est reçu par la sortie *S*. Si la pression dans C_1 est supérieure à la pression dans C_2 (*fig.* 30-2), le jet va être dévié vers la sortie S_2, et le rapport des débits qui s'échappent de *S* et de S_2 est une fonction de la différence de pression entre C_1 et C_2. L'effet s'inverse quand la différence de pression entre C_1 et C_2 s'inverse. La pression et le débit des jets C_1 et C_2 peuvent être plus faibles que la pression et le débit du jet principal *A*. On réalise ainsi des amplificateurs proportionnels différentiels, ayant un gain de 10 à 30 environ, entre le jet de commande et le jet principal.

— Dans l'amplificateur à turbulence représenté sur les *figures 30-3 et 30-4* le jet principal d'alimentation *A*, amené par la tuyère *a*, pénètre dans la chambre *b*; en l'absence de perturbation, ce jet reste laminaire et il est

▼ Au centre, figure 29 : représentation schématique d'une soufflerie à rafales. Ci-dessous, figure 30 : représentation schématique de quelques amplificateurs.



Richard Colin





▲ *A gauche, figure 31 : les trois forces induites par l'écoulement résultant de l'action du vent sur le véhicule. A droite, maquette d'une* **Fiat 850** *testée dans une veine d'air à la soufflerie de l'École polytechnique de Turin.*

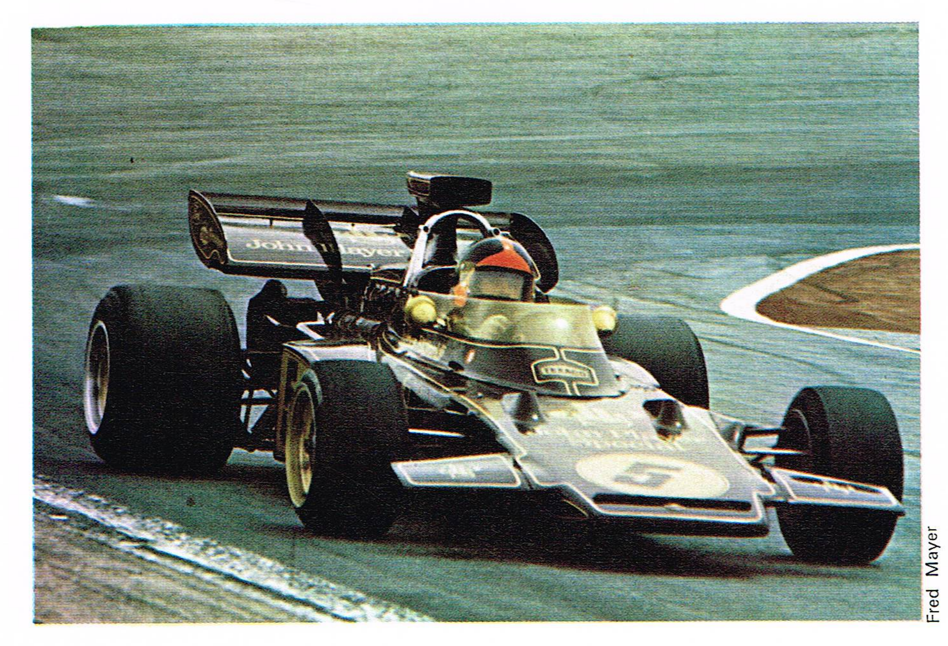
reçu par la sortie *S*. Si un autre jet de faible puissance, passant par une des tuyères *C*, vient frapper le jet principal *A*, celui-ci devient turbulent et la pression en *S* devient pratiquement nulle. La fonction réalisée par ce composant est la fonction logique OU.

— Dans l'amplificateur à effet de paroi représenté sur la *figure* 30-5, le jet principal *A* pénètre par une tuyère *a* dans la chambre d'interaction *C* et, par effet de paroi, s'attache soit à la paroi C_1, soit à la paroi C_2 et est dirigé vers les sorties S_1 ou S_2. Supposons que le jet se soit attaché à la paroi C_1. Si (*fig.* 30-6) nous envoyons ensuite par l'entrée A_1 un jet transversal de commande, il va dévier le jet *A*, qui s'attache à la paroi C_2 et qui sort en S_2. Le jet A_1 est maintenant sans aucune action sur le jet *A* et seul un jet A_2 pourra changer l'état du système. Nous avons ainsi réalisé un élément bistable à mémoire.

Les quelques exemples cités ne sont absolument pas limitatifs, et pratiquement tous les composants nécessaires aux asservissements de machines-outils conventionnelles à commande pneumatique ont pu être réalisés.

On rencontre encore la fluidique dans les éléments de commande de turboréacteur, dans des systèmes de stabilisation de plates-formes en mouvement, dans des chaînes de comptage et d'automatismes industriels. Pour tous ces problèmes, la fluidique, utilisée seule ou avec des composants électroniques ou électromécaniques, se révèle être un organe très souple et très fiable dans beaucoup de problèmes de commande et d'asservissements.

▼ *La* **portance** *négative, souvent recherchée sur les véhicules de compétition, est destinée à « plaquer » la voiture au sol et à augmenter l'adhérence des roues motrices.*



Aérodynamique de l'automobile

Les souffleries, dont nous avons parlé précédemment et dont l'usage le plus important est fait par l'industrie aérospatiale, sont également utilisées pour effectuer des mesures sur des maquettes de projets architecturaux (répartition des vents au sol en présence d'immeubles, efforts sur une structure...), sur des maquettes de chemins de fer (importance de la forme de la locomotive et des wagons) et d'automobiles. Dans ces deux derniers cas, ce que l'on recherche est la plus importante diminution possible de la résistance à l'avancement du véhicule, ou traînée, tout en conservant une stabilité maximale, en particulier à un vent de travers.

Étudions maintenant les problèmes spécifiques posés par l'aérodynamique de l'automobile.

L'écoulement résultant de l'action du vent sur le véhicule induit des forces qui peuvent se décomposer en *portance* (axe vertical), *traînée* (axe parallèle au mouvement) et *dérive* (axe complétant le trièdre trirectangle) [*fig.* 31].

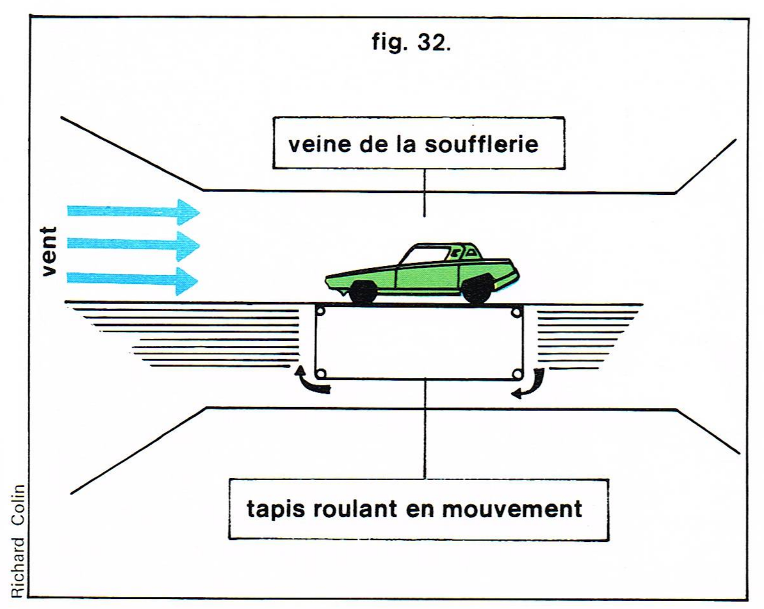
La portance doit toujours être très inférieure au poids du véhicule, pour éviter toute tendance au décollage. Un effet contraire (portance négative, dirigée vers le sol) est souvent même recherché, principalement sur les véhicules de compétition, la portance négative étant destinée à « plaquer » le véhicule au sol et à augmenter l'adhérence des roues motrices.

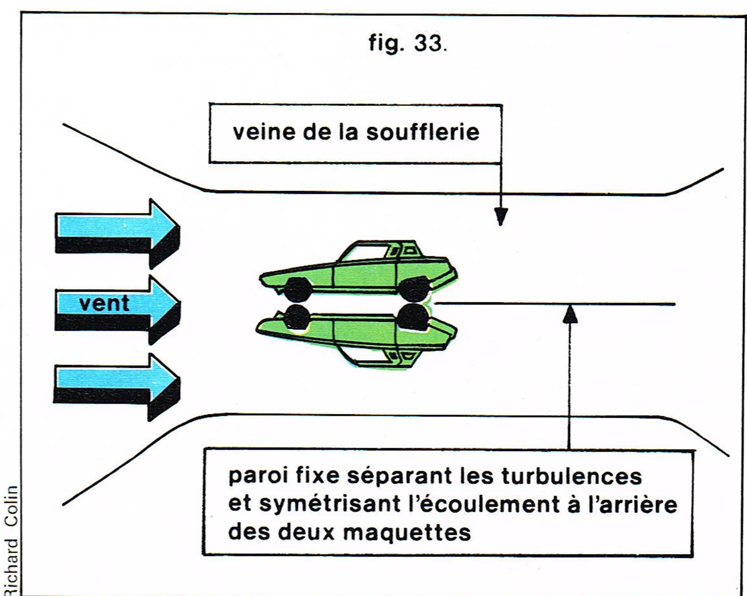
La dérive, quant à elle, est pratiquement toujours négligeable, sauf en cas d'un vent de travers violent. En tout état de cause, les impératifs d'habitabilité de la voiture sont tels qu'il n'est pas possible de la profiler parfaitement.

La force sur laquelle on peut agir le plus facilement est la traînée, en jouant sur la forme générale du véhicule pour éviter au maximum les décollements de la couche limite. Le profil le plus approprié, quoique peu réalisable, semble être une forme en « goutte d'eau ». Or ce profil est modifié par les roues, les phares, les entrées d'air nécessaires au refroidissement du moteur, les accessoires divers qu'il est donc souhaitable d'intégrer le plus possible à la ligne générale du véhicule pour éviter toute arête vive ou toute protubérance favorisant le décollement de la couche limite ou l'apparition de turbulences.

Un autre effet augmentant énormément la traînée est l'écoulement de l'air entre le plancher de la voiture et le sol; pour qu'il puisse s'effectuer avec le maximum de rendement, il faut que le plancher de la voiture soit le plus lisse possible et forme avec le sol une tuyère lentement convergente, puis divergente.

Pour faire les études en soufflerie, deux techniques peuvent être utilisées. Dans la *technique du « tapis roulant »*, la voiture est posée sur un tapis se déplaçant avec une vitesse égale à la vitesse relative du vent (*fig.* 32). La réalisation de ce dispositif posant quelques difficultés, on lui préfère généralement la *technique des images :* une seconde maquette, identique, est disposée, roue contre roue, sous la maquette d'étude (*fig.* 33) ; l'écoulement





▲ *A gauche, figure 32 : représentation schématique de la* technique du « tapis roulant ». *A droite, figure 33 : représentation schématique de la* technique des images.

étant alors symétrique, aucun filet d'air ne peut traverser le plan imaginaire figurant la route. Le problème réel est toutefois rendu plus complexe par l'apparition de turbulences.

Aéroglisseur

Une autre application importante de l'aérodynamique réside en la recherche de la sustentation des mobiles en utilisant le phénomène appelé *effet de sol*.

Il est bien connu, en aérodynamique, qu'un avion voit sa portance modifiée lors de l'atterrissage du fait de la proximité du sol : le système ne peut plus être considéré comme étant placé dans un milieu infini. La proximité du sol introduit des conditions aux limites supplémentaires, qui modifient la géométrie des lignes d'écoulement et augmentent la portance.

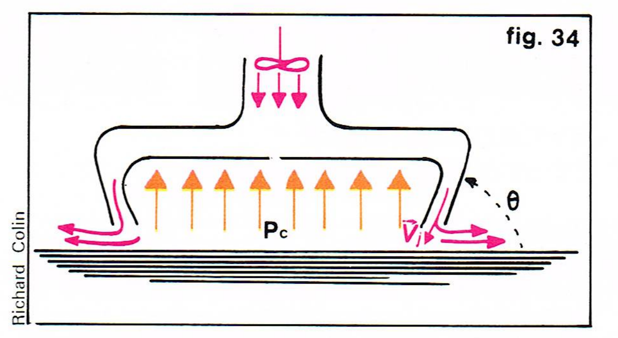
On a pensé très tôt à utiliser cet effet pour sustenter des systèmes mobiles ou immobiles. Dans ce cas, l'écoulement fluide est engendré par le système lui-même, et la présence du sol crée des répartitions de pressions suffisantes pour maintenir le système en équilibre.

Dès 1854, un hydraulicien, le Français L. Girard, pensait à utiliser ce principe pour sustenter un train, et un modèle était présenté à l'exposition de 1889 d'un train glissant sur l'eau. Vers 1956, l'Anglais Cockerell mettait au point un dispositif (*fig.* 34) dit à cloche, où l'écoulement du fluide se fait de telle sorte qu'une masse d'air (coussin d'air) est maintenue sous le système à une pression P_C suffisante pour équilibrer le poids du système. Cette pression peut être reliée aux paramètres fixant la géométrie du système par l'équation :

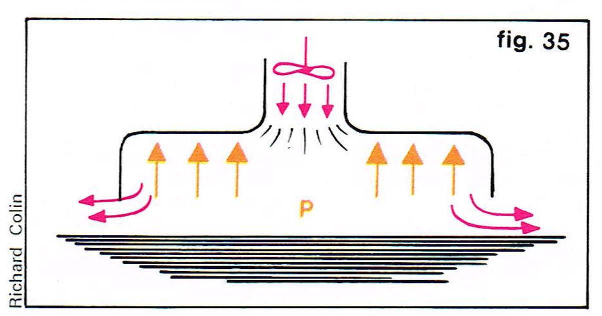
$$P_C = K \left(\frac{\rho V_j^2}{2g}\right)\left(\frac{t}{n}\right)(1 + \sin\theta)$$

où V_j représente la vitesse d'éjection du fluide à la sortie de la cloche. La première maquette réalisée en France par Bertin reposait sur le principe de la fente périphérique (*fig.* 35), sans chambre intermédiaire, d'une simplicité plus grande, mais ne permettant pas une hauteur de sustentation très importante. Le problème du franchissement d'obstacle devenait donc critique. La solution devait être apportée par l'adjonction d'une jupe souple qui continuait la chambre et qui pouvait se déformer lors du passage de l'obstacle. Quant à la stabilité, elle était assurée par la présence de chambres multiples.

De tels systèmes sont actuellement couramment utilisés : il suffit de penser au naviplane, au terraplane, et, pour des systèmes guidés, à l'aérotrain. Leur propulsion peut se faire à l'aide d'hélice, de réacteur, de moteur électrique linéaire (cas des systèmes guidés). Leurs principaux avantages sont les suivants : d'une part, du fait de la faible résistance aux déplacements, de grandes vitesses peuvent être atteintes, d'autre part, la pression exercée sur le sol est faible, de l'ordre de 0,1 à 0,5 atmosphère (à comparer avec 2 à 8 atmosphères pour des voitures ou des camions), enfin on peut réaliser ainsi des appareils amphibies tout terrain.



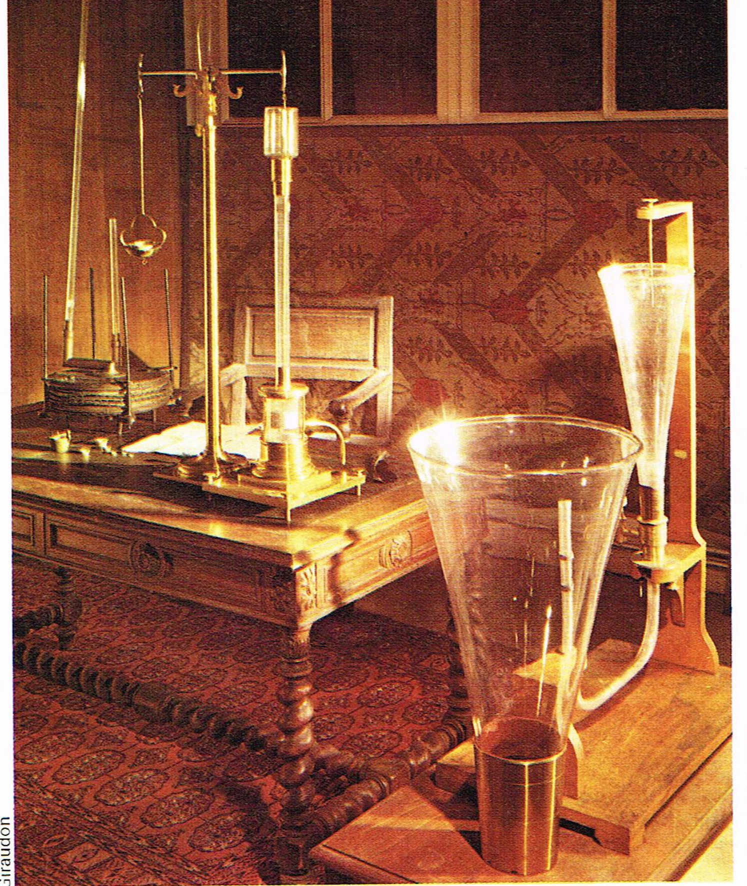
◀ *Figure 34 : représentation* du dispositif à cloche *mis au point par Cockerell et permettant de sustenter un mobile en utilisant le phénomène* d'effet de sol.



◀ *Figure 35 : représentation schématique de la première maquette d'aéroglisseur réalisée en France par Bertin.*



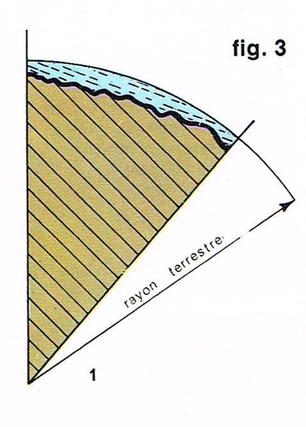
▼ *Un véhicule à coussin d'air : l'hovercraft.*

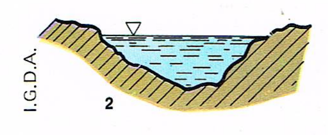




▲ *A gauche, reconstitution du bureau de travail de Pascal (à droite) réunissant quelques instruments utilisés pour ses expériences d'hydrostatique.*

▼ *Figure 3 : surfaces isobares de grande (1) et de petite (2) extension.*





▶ *Figure 1 : la pression P dans un liquide au repos varie linéairement avec la cote entre les deux plans séparés par la distance h : on a : $P_2 - P_1 = \rho gh$. Figure 2 : développement de la pression dans un récipient contenant des liquides de masses volumiques différentes et non miscibles entre eux.*

HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE

Hydrostatique

Comme nous l'avons fait pour l'aérostatique et l'aérodynamique, nous pouvons distinguer l'hydrostatique et l'hydrodynamique, qui étudient, respectivement, le comportement des liquides au repos et en mouvement. En ce qui concerne la plupart des théorèmes et des lois dont nous allons maintenant parler, nous pourrons faire l'approximation de fluides incompressibles, sauf mention contraire.

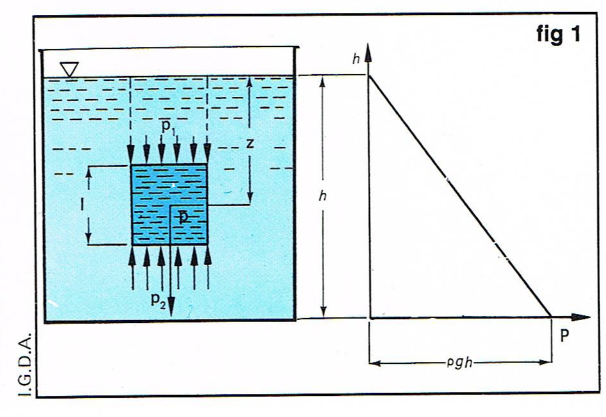
L'état d'un liquide au repos peut être parfaitement déterminé si l'on connaît la pression en tout point du volume qu'il occupe. En utilisant les mêmes raisonnements qu'en aérostatique, il est possible de retrouver, pour un liquide, la loi de Stévino donnant la répartition de la pression P en fonction de la distance h à la surface libre, pour un liquide de masse volumique ρ, soumis à la seule accélération de la pesanteur. En effet, pour une variation élémentaire dh d'altitude, la variation de pression dP correspondante est :

$$dP = \rho g dh$$

et, si l'on suppose que la masse volumique et l'accélération de la pesanteur sont des constantes dans tout le milieu, on obtient, par intégration :

$$P - P_0 = \rho g\ (h - h_0)$$

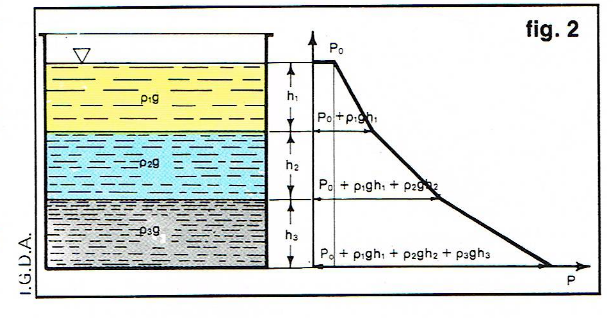
P_0 étant la pression de référence à l'altitude h_0. De cette loi, on peut déduire la loi de Pascal (la pression est une constante en tout point d'une même surface horizontale dans un liquide au repos) dont un corollaire affirme que toute surface libre d'un liquide ou toute surface de séparation entre deux liquides est horizontale (*fig.* 1 et 2).



Cela n'est toutefois vrai que pour des surfaces de faible étendue.

Pour de grandes surfaces (mers, lacs), la surface libre est en tout point normale au vecteur accélération du champ de pesanteur terrestre, donc, en première approximation, une sphère de rayon égal au rayon terrestre (*fig.* 3-1 et 3-2).

La presse hydraulique, d'un usage courant dans l'industrie, est un exemple d'application de ces lois. Dans le schéma de la *figure* 4, le piston S_1 est actionné par le levier ayant son pivot en O ; la force F′, conformément au principe bien connu du levier, est donnée par :



$$F' = F\frac{l}{a}$$

Cette dernière déplace le piston S_1 de surface A_1 d'une certaine hauteur z_1, obligeant un volume de liquide A_1z_1 à passer à travers la soupape V_{1-2} qui s'ouvre automatiquement. La soupape V_{1-2} reste ouverte tant que les pressions en (1) et (2) ne sont pas devenues égales [ce qui se produit lorsque le piston (1) est arrivé à fond de course]. Le liquide étant supposé incompressible, le cylindre S_2 de section A_2 doit s'élever d'une hauteur z_2, telle que le volume du liquide déplacé en (2) soit :

$$z_2A_2 = z_1A_1$$

La pression en (1) est donnée par :

$$P = \frac{F'}{A_1}$$

La force agissant sur le cylindre S_2 est donc donnée par :

$$F_2 = PA_2 = F' \cdot \frac{A_2}{A_1}.$$

Au cours de son ascension, il peut soulever un poids $P = F' \frac{A_2}{A_1}$ qui peut donc être très grand devant F′.

Partant des lois de Stévino et de Pascal, nous pouvons retrouver également le principe d'Archimède : « Tout corps plongé dans un liquide reçoit de la part de celui-ci une force égale au poids du volume de liquide déplacé et appliquée au centre de gravité de ce dernier. » Les principales applications de ce principe ont trait à l'équilibre des corps immergés et des corps flottants (*fig.* 5).

Considérons un corps immergé de volume V, de masse M, en équilibre dans un liquide de masse volumique ρ_l. L'application du principe d'Archimède permet d'écrire :

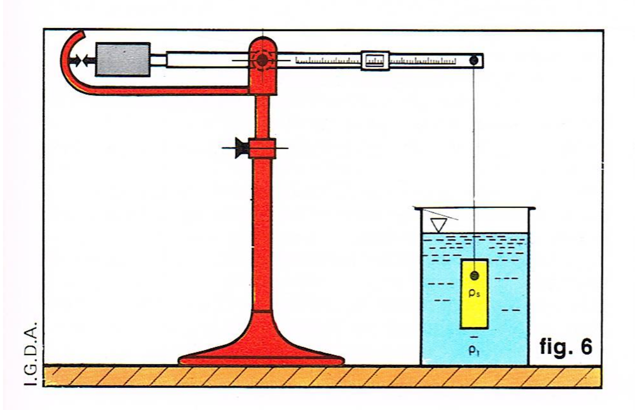
$$Mg = \rho_l g V$$

Cette relation est utilisée dans la balance hydrostatique (*fig.* 6) qui sert à déterminer la masse volumique de solides homogènes plus denses que l'eau. La balance hydrostatique permet de déterminer, tout d'abord, le poids $P = \rho_s g V$ du solide seul, puis le poids apparent :

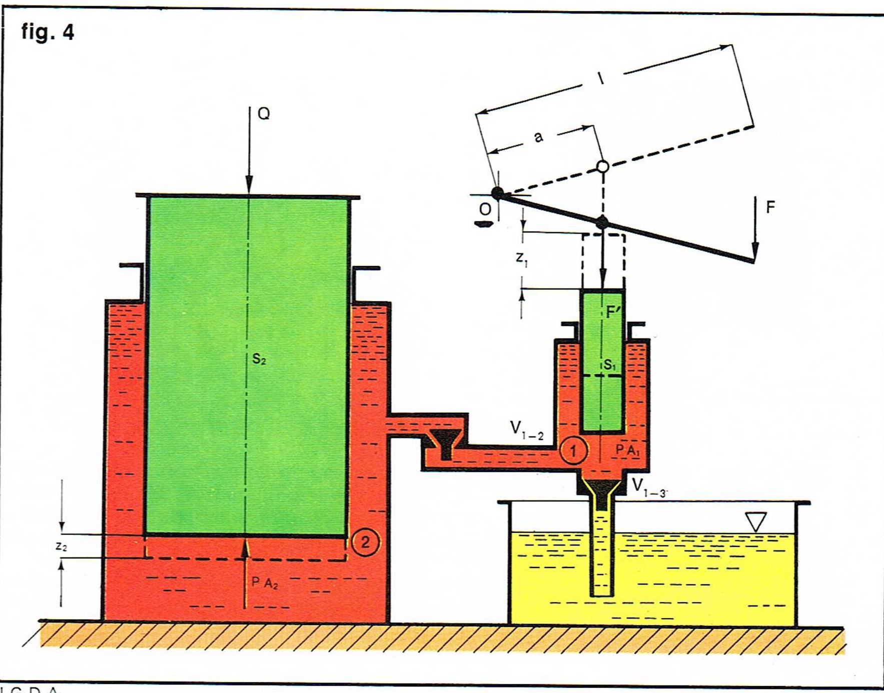
$$P' = (\rho_s - \rho_l)\, gV$$

quand il est plongé dans le liquide. On en déduit alors la masse volumique cherchée :

$$\rho_s = \frac{P}{P - P'}\rho_l$$



◀ *Figure 6 : représentation schématique de la balance d'Archimède.*



▲ *Figure 4 : représentation schématique du fonctionnement de la presse hydraulique.*

Dans le cas d'un corps homogène flottant, de volume V, de masse volumique ρ_s, il y aura équilibre quand le volume immergé V′ sera tel que l'on ait :

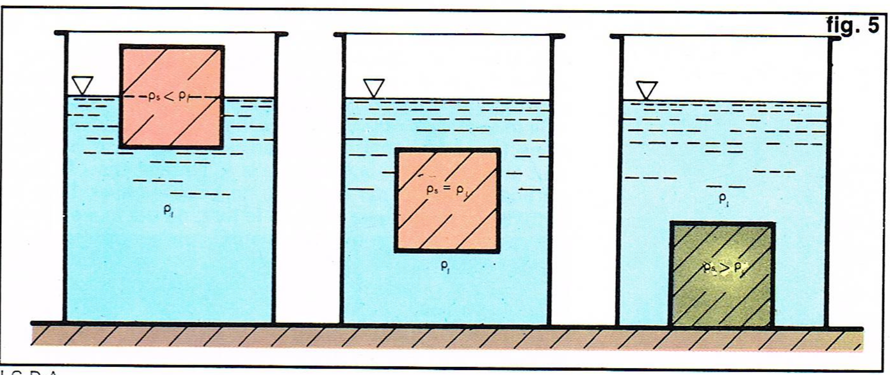
$$\rho_s g V = \rho_l g V'$$

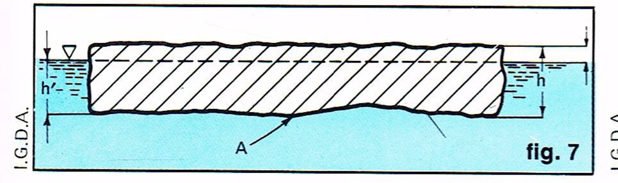
Ainsi, pour une plaque de glace, de masse volumique ρ_s = 900 kg/m³, flottant sur de l'eau ($\rho_l = 10^3$ kg/m³), le volume qui émerge est le dixième du volume total (*fig.* 7).

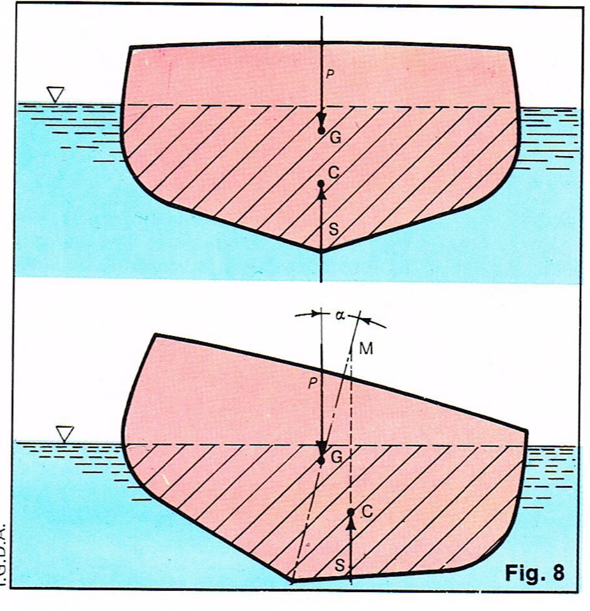
Un autre exemple, intéressant à étudier en détail, est celui d'un flotteur qu'une force extérieure déplace de sa position d'équilibre. Dans ce déplacement, apparaissent des forces qui, lorsque l'action perturbatrice cesse, peuvent ramener le flotteur dans la position primitive ou l'en éloigner encore davantage. Dans le premier cas, on dit que l'équilibre est stable, dans le second instable. La réalisation de la première condition intéresse particulièrement la technique navale ; c'est pourquoi il est important d'étudier quelles sont les conditions qui assurent la stabilité de l'équilibre d'un bateau.

En nous reportant à la *figure* 8 qui montre une section transversale d'un bateau, considérons, pour simplifier, le problème de la stabilité de l'équilibre au mouvement de roulis. Dans la position d'équilibre, le poids *P* appliqué au centre de gravité G du bateau et la poussée hydrostatique S appliquée au centre de poussée C s'équilibrent, c'est-à-

▼ *Figure 5 : équilibre d'un corps solide immergé dans un liquide de masse volumique ρ_l pour diverses valeurs de sa masse volumique ρ_s.*

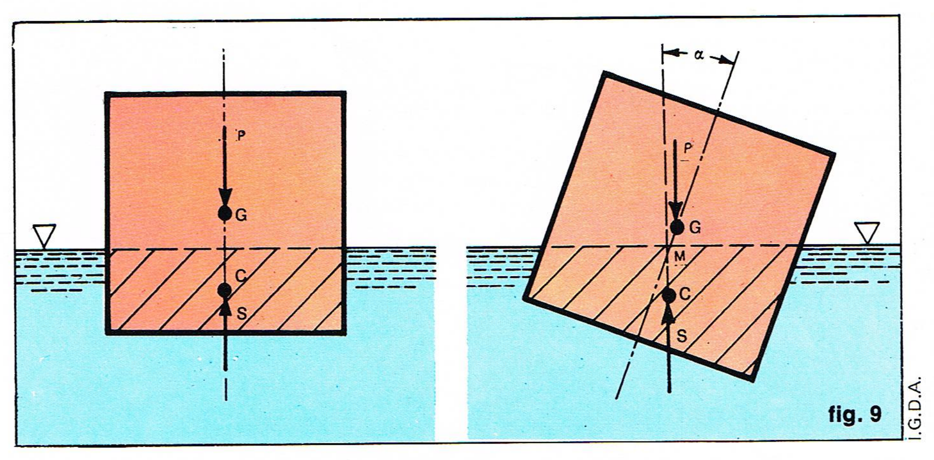


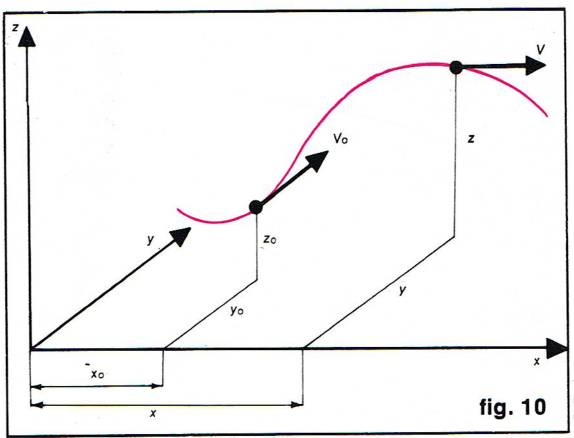




◀ *Figure 8 : en haut, le bateau est en position d'équilibre : le poids P et la poussée d'Archimède S s'équilibrent, et agissent sur la même droite avec des intensités égales et opposées ; en bas, le bateau s'éloigne de sa position d'équilibre : la poussée S et le poids P génèrent un couple dont le moment tend à ramener le bateau dans sa position d'équilibre.*

◀ *Figure 7 : une plaque de glace immergée dans l'eau émerge d'un volume égal au 1/10 de son volume.*





▲ *A gauche, figure 9; un corps flottant en équilibre instable (à gauche) : le couple généré par S et P entraîne une augmentation de l'angle de roulis jusqu'au chavirement de l'objet (à droite). A droite, figure 10; interprétation graphique de la* **méthode de Lagrange** : *la vitesse et les coordonnées d'une particule de fluide sont fonction de la vitesse et des coordonnées à l'instant initial.*

dire agissent sur la même droite d'action avec des intensités égales et opposées (principe d'Archimède). L'intersection de la coque par la surface libre du liquide prend le nom de ligne de flottaison, et la partie immergée celui de carène.

Si l'on modifie l'équilibre du bateau en le faisant tourner autour de son axe longitudinal d'un angle α, la rotation n'entraîne qu'un changement de forme du volume immergé, le poids du bateau étant constant. En revanche, la position du centre de poussée auquel est appliquée la poussée hydrostatique S varie, tandis que le point d'application du poids est toujours le centre de gravité G du bateau. Il s'ensuit que les deux forces S et *P*, tout en demeurant égales et opposées, n'ont plus la même droite d'action et constituent un couple de moment $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = S\ (GM) \sin \alpha$$

Si $\mathcal{M}$ est tel qu'il tend à ramener le bateau dans la position primitive, l'équilibre est stable, et le moment est dit moment de rappel; dans le cas contraire, ce moment a pour effet d'éloigner le bateau de la position d'équilibre, et l'équilibre est instable. Le moment de rappel dépend de la valeur de l'angle α et, en général, augmente avec celui-ci.

En faisant toujours l'hypothèse simplificatrice supposant que le centre de poussée et le centre de gravité demeurent dans la même section transversale du navire quelle que soit la valeur de l'angle de roulis α, l'intersection M de la verticale passant par le centre de poussée avec l'axe de symétrie du bateau se déplace le long de cet axe en fonction des variables de α, et sa distance au centre de gravité diminue lorsque α augmente. La position limite prise par M, correspondant à sa distance maximale de G, est atteinte lorsque α est égal à 0; elle prend le nom de *métacentre*. Dans les bateaux ordinaires, M ne s'éloigne pas sensiblement du métacentre si l'angle de roulis ne dépasse pas 14-15°, et on peut démontrer que sa position dépend uniquement des caractéristiques géométriques du bateau. Pour en augmenter la stabilité, il faut le construire de sorte que GM soit maximal. De plus, il est évident que le métacentre doit toujours se trouver à une cote supérieure à celle du centre de gravité, faute de quoi le moment $\mathcal{M}$ (*fig.* 9) deviendrait tel qu'il entraînerait une augmentation de l'angle de roulis jusqu'au chavirement du bateau.

Hydrodynamique

A l'inverse de l'hydrostatique, l'hydrodynamique ne peut ignorer la distinction entre liquides réels et liquides parfaits, puisque les phénomènes liés à la viscosité, ou frottement entre les « particules » de fluide, ne se manifestent justement que lorsque ces particules sont animées d'un mouvement relatif.

De ce fait, les études théoriques des phénomènes de l'hydrodynamique, menées en supposant les liquides parfaits, conduisent à des résultats qui, dans la plupart des cas, sont sensiblement éloignés des observations expérimentales (faites, naturellement, à l'aide de liquides réels). Si, d'un côté, l'étude théorique est indispensable pour cerner les différents phénomènes, de l'autre, la partie appliquée de l'hydrodynamique est d'une très grande importance.

Une autre distinction importante tient compte du type de mouvement auquel le liquide est soumis; en effet, d'après les observations expérimentales, on a établi qu'il existe un *seuil* de vitesse au-delà duquel le mouvement des particules de liquide présente des composantes fluctuantes. En fait, ce seuil de vitesse détermine une limite au-delà de laquelle les effets d'inertie ne sont plus négligeables vis-à-vis des effets de viscosité. On dit qu'au-dessous de la valeur seuil (ou valeur critique), le mouvement du liquide est *laminaire* (régime laminaire), tandis qu'au-dessus de ce seuil, il est *turbulent* (régime turbulent). Naturellement, il existe un petit domaine de vitesses, autour de la valeur critique, dans lequel il n'est pas possible d'établir une distinction nette entre les deux régimes : on l'appelle *régime de transition*.

Aussi bien l'écoulement laminaire que l'écoulement turbulent sont dits *écoulements stationnaires* lorsque la vitesse moyenne du fluide, en tout point, demeure constante dans le temps, en grandeur, sens et direction; si, en revanche, elle varie dans le temps selon une loi quelconque, on dit que l'écoulement est *instationnaire*.

Pour décrire un système hydrodynamique, deux représentations sont possibles.

La première, appelée représentation *lagrangienne*, consiste à déterminer comment varie dans le temps la position d'une particule de fluide, une fois connue la position qu'elle occupe à un moment donné (en général à l'instant initial) [*fig.* 10]. Les coordonnées *x, y, z* de la particule, dans l'espace à trois dimensions et à un instant quelconque, seront données en fonction du temps *t*, par trois relations du type :

$$x = f\ (x_0, y_0, z_0, t)$$
$$y = g\ (x_0, y_0, z_0, t)$$
$$z = h\ (x_0, y_0, z_0, t)$$

$\vec{r}$ désignant le vecteur position de la particule, la trajectoire pourra encore être définie par : $\vec{r} = \vec{r}\ (\vec{r_0}, t)$.

La deuxième représentation, dite *eulérienne*, décrit dans le temps l'évolution de scalaires ou de vecteurs [pression P (x, y, z, t), masse volumique $\rho\ (x, y, z, t)$, vitesse $\vec{V}\ (x, y, z, t)$...].

Nous allons maintenant montrer l'équivalence de ces deux descriptions.

Si l'on dispose de la description lagrangienne, c'est-à-dire de la donnée de $\vec{r}\ (\vec{r_0}, t)$, on peut obtenir la vitesse de l'élément fluide considéré, par simple dérivation par rapport au temps :

$$\vec{V}\ (\vec{r_0}, t) = \frac{d}{dt}\ \vec{r}\ (\vec{r_0}, t)$$

Par élimination de $\vec{r_0}$ entre $\vec{V}\ (\vec{r_0}, t)$ et $\vec{r}\ (\vec{r_0}, t)$, on obtient la donnée de

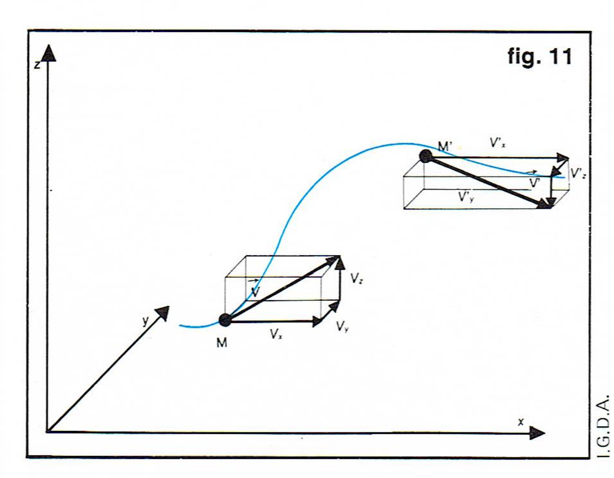
$$v_x\ (x, y, z, t), \quad v_y\ (x, y, z, t), \quad v_z\ (x, y, z, t)$$

c'est-à-dire le champ de vitesse $\vec{V}\ (\vec{r}, t)$ de la description eulérienne (*fig.* 11). Réciproquement, si l'on connaît ce champ de vitesse, on peut écrire :

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

et en déduire par intégration (sachant que $\vec{r} = \vec{r_0}$ à $t = t_0$)

$$x\ (\vec{r_0}, t)\ ; \quad y\ (\vec{r_0}, t)\ ; \quad z\ (\vec{r_0}, t)$$



◀ ***Figure 11 :** interprétation graphique de la **méthode d'Euler :** les composants de la vitesse d'une particule sont fonction des coordonnées de l'espace et du temps.*

Remarquons que, dans la représentation eulérienne, $\vec{V}$ est fonction de x, y, z et de t. La variation $d\vec{V}$ pourra donc être considérée comme la somme de deux variations : une variation spatiale et une variation temporelle

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

et l'on peut écrire :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

soit encore : $$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\ (\overrightarrow{\text{grad}} \cdot \vec{V})$$

On note souvent $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ au lieu de $\frac{d\vec{V}}{dt}$ (notation de Stokes) ; cette dérivée s'appelle dérivée en suivant le mouvement, parce qu'elle est associée, non pas à la variation dans le temps d'un champ de vitesse, mais à la variation de vitesse d'un élément de volume fluide, pendant son mouvement.

Fluides parfaits

C'est en général à l'aide de la représentation eulérienne que l'on cherchera à obtenir les équations fondamentales de la dynamique des fluides. On assimilera donc le fluide à un milieu continu, et l'on raisonnera sur un élément de volume dV, de dimensions très inférieures à celles du système considéré et très supérieures à la distance entre les molécules. Le liquide considéré est supposé parfait, c'est-à-dire que l'on considère un milieu pour lequel les processus de thermoconduction et de viscosité sont négligeables.

Introduisons quelques notions relatives à un écoulement.

— *Ligne de courant :* ce sont les lignes du champ de vitesse à l'instant $t = t_0$. On parle encore de ligne d'écoulement ; leur équation est définie par :

$$\frac{dx}{v_x\ (x, y, z, t_0)} = \frac{dy}{v_y\ (x, y, z, t_0)} = \frac{dz}{v_z\ (x, y, z, t_0)}$$

— *Trajectoires :* elles sont relatives à un élément de volume fluide, et l'on a vu comment, à partir de la description eulérienne, on pouvait obtenir la description lagrangienne et, par conséquent, l'équation de ces trajectoires.

— *Ligne d'émission* ou *filet fluide :* il est constitué, à l'instant $t = t_0$, par l'ensemble des éléments de volume fluide qui sont passés en un point donné aux instants antérieurs à t_0.

Les trois dernières notions sont identiques pour un écoulement permanent. Elles ne le sont pas, en général, pour un écoulement non stationnaire.

Nous allons maintenant établir les conditions aux limites et les équations fondamentales du mouvement valables pour un fluide parfait, et voir ensuite quelles sont les modifications à y apporter pour rendre compte du comportement des fluides réels.

Conditions aux limites

A la limite entre un liquide et une paroi solide imperméable, les vitesses normales sont égales.

A la limite entre deux fluides, les vitesses normales à la surface de séparation sont égales (conservation du flux).

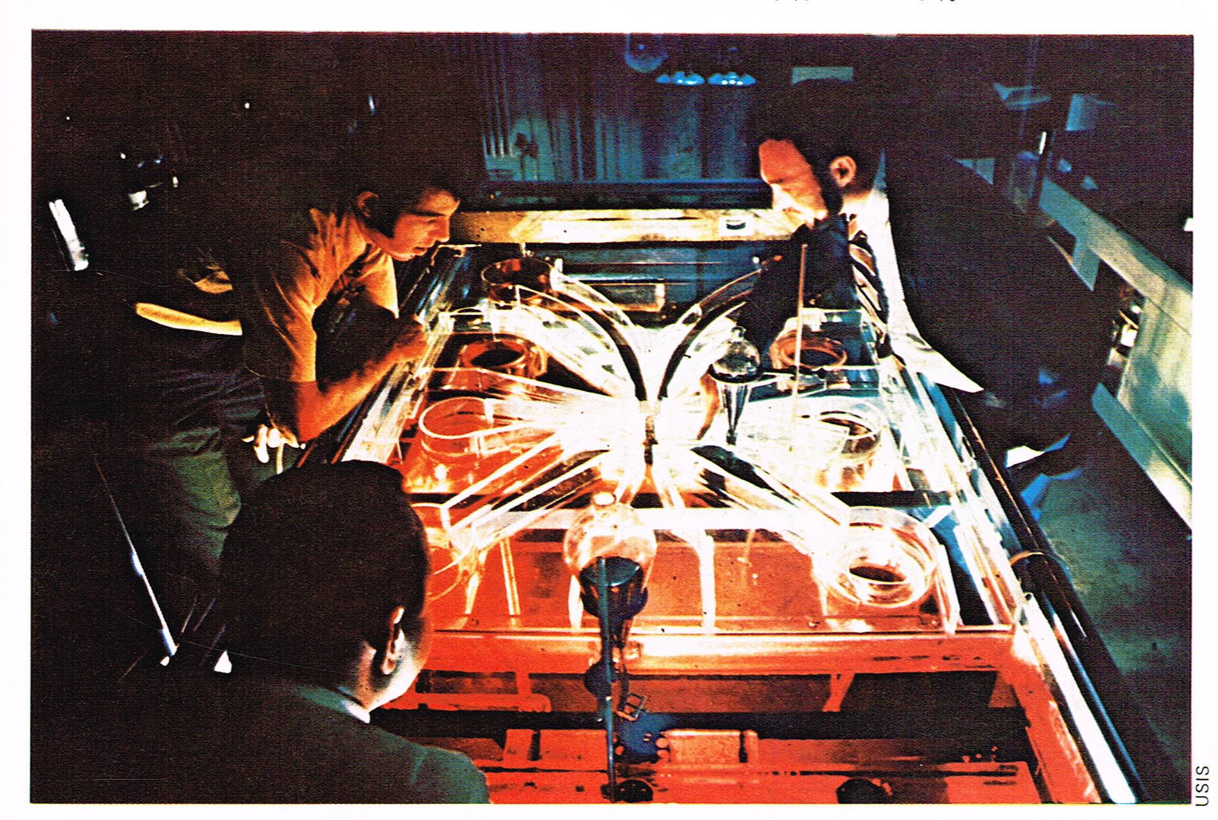
Équation de continuité

Soit un volume V_0 fixé dans le fluide. Le flux de masse par unité de temps à travers la surface S délimitant ce volume s'écrit (flux rentrant), d'après le théorème de Green :

$$-\int_S \rho\vec{V} \cdot \vec{n}\, dS = -\int_{V0} \text{div}\ (\rho\vec{V})\ d\tau$$

La conservation de la masse impose que ce flux soit égal à la variation de masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V0} \rho d\tau = -\int_{V0} \text{div}\ (\rho\vec{V})\ d\tau$$



◀ *Expérimentation sur une table à eau : les chercheurs, en introduisant des teintures au travers de ce dispositif, cherchent à obtenir de nouvelles données sur les phénomènes d'écoulement des fluides.*

ONERA

▲ *Écoulement à basse vitesse : sillage derrière des cylindres régulièrement disposés.*

quel que soit le volume V_0 choisi. Par conséquent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\, \rho \vec{V} = 0$$

soit encore :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\, \text{div}\, \vec{V} + \vec{V}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, \rho = 0$$

C'est l'équation de continuité.

Pour un fluide incompressible, la masse volumique est constante en suivant le mouvement $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, \rho = 0\right)$, la divergence de la vitesse est donc nulle : div $\vec{V} = 0$.

Équation d'Euler

Soit un volume de fluide, quelconque, V_1. La force totale qui s'exerce sur ce volume, du fait de la pression, s'écrit :

$$\vec{F} = -\iint_S P\vec{n}\, dS$$

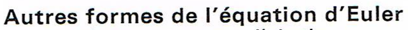
or :
$$-\iint_S P\vec{n}\, dS = -\iiint_{V1} \overrightarrow{\text{grad}}\, P d\tau$$

cela signifie que, sur l'élément de volume $d\tau$, s'exerce la force $\overrightarrow{\text{grad}}\, P d\tau$. S'il existe un champ de force extérieur, on définira la force par unité de volume $\vec{F}$, et l'on pourra écrire, pour l'élément de volume de fluide $d\tau$, l'équation fondamentale de *la dynamique sous la forme* :

$$\vec{F}\, d\tau - \overrightarrow{\text{grad}}\, P d\tau = dm \frac{d\vec{V}}{dt}$$

avec $\rho = \frac{dm}{d\tau}$, il vient donc $\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \vec{F}$

C'est l'équation d'Euler.



▼ **Daniel Bernoulli** *(1700-1782) : il étudia l'écoulement de l'eau dans les conduites et publia en 1738 un* Traité d'hydrodynamique.



Palais de la Découverte, Paris

Autres formes de l'équation d'Euler

— *Cas du mouvement adiabatique*

En l'absence de phénomènes de conduction thermique, la définition du fluide parfait inclut l'absence d'échanges de chaleur. L'entropie d'un élément de volume $d\tau$ qui se déplace reste donc constante. L'entropie par unité de masse S l'est donc également, et l'on peut écrire :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\, S = 0;$$

or, div $(\rho \vec{V} S) = S\, \text{div}\, (\rho \vec{V}) + \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, S$

Comme $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\, (\partial \vec{V}) = 0$, il vient :

$$\frac{\partial\, (\rho S)}{\partial t} + \text{div}\, (\rho S \vec{V}) = 0$$

— *Cas du mouvement isentropique*

Si, à un instant t_0, l'entropie est la même en tout point, elle restera la même en tout point quel que soit le temps. L'entropie est donc constante, et le mouvement est isentropique. On se limitera désormais à cette hypothèse. Or, la variation de l'enthalpie H par unité de masse est reliée aux variations dP et dS par l'équation :

$$dH = T dS + \frac{dP}{\rho}$$

Pour le mouvement isentropique, il reste $dH = \frac{dP}{\rho}$, soit encore $\overrightarrow{\text{grad}}\, H = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, P}{\rho}$, et l'on peut écrire l'équation d'Euler sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\, \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, H + \frac{\vec{F}}{\rho}$$

— *Forces extérieures dérivant d'un potentiel*

S'il existe une fonction potentiel, Φ, dont dérivent les forces extérieures par unité de masse, c'est-à-dire si l'on peut poser $\frac{\vec{F}}{\rho} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, \Phi$, on obtient alors l'équation :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\, \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, (H + \Phi)$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \wedge (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V}) = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(H + \Phi + \frac{1}{2} V^2\right)$$

En introduisant le vecteur $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V}$, et en prenant le rotationnel de l'équation précédente, il vient :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{rot}}\, (\vec{V} \wedge \vec{\omega}) = 0$$

Équation de Bernoulli

A partir de l'équation d'Euler mise sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \wedge (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V}) = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{H} + \Phi + \frac{V^2}{2} \right)$$

et appliquée au cas d'un écoulement stationnaire $\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \right)$,

il vient $\vec{V} \wedge (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{H} + \Phi + \frac{V^2}{2} \right)$.

Soit $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent à une ligne d'écoulement (donc ici à la trajectoire). En effectuant le produit scalaire de l'équation précédente par $\vec{\tau}$, il vient [$\vec{V} \wedge (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V})$ étant perpendiculaire à $\vec{\tau}$] :

$$\vec{\tau} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{H} + \Phi + \frac{V^2}{2} \right) = 0$$

Or le gradient projeté sur une direction donne la dérivée selon cette direction, notée $\frac{\partial}{\partial l}$. De ce fait,

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{V^2}{2} + \text{H} + \Phi \right) = 0$$

ce qui permet de conclure (équation de Bernoulli) que :

$$\frac{V^2}{2} + \text{H} + \Phi = \text{constante}$$

le long d'une ligne d'écoulement.

- Si les seules forces extérieures appliquées sont les forces de pesanteur, on obtient $\Phi = gz$, c'est-à-dire :

$$\frac{V^2}{2} + \text{H} + gz = \text{constante}$$

- Dans le cas du fluide incompressible, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, \text{H} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, \text{P}}{\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}\, \frac{\text{P}}{\rho}$$

et l'équation de Bernoulli se met sous la forme :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\text{P}}{\rho} + gz = \text{constante}$$

(la valeur de la constante dépendant de la ligne de courant considérée). Cette équation exprime en fait la conservation de l'énergie mécanique totale d'un élément de volume quelconque le long de la ligne de courant.

Applications du théorème de Bernoulli

— *Tube de Venturi*

Le tube de Venturi est essentiellement constitué d'un tube qui présente un resserrement progressif suivi d'un élargissement progressif le ramenant à sa section initiale (*fig.* 12). Appliquons le théorème de Bernoulli entre la section amont 1 d'aire A_1 et la section rétrécie 2 d'aire A_2. Si le tube est horizontal, c'est-à-dire si $z_1 = z_2 = z$, le théorème de Bernoulli donne :

$$z + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

c'est-à-dire : $P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2)$.

En reprenant l'équation de la continuité : $V_2 A_2 = V_1 A_1$ et en substituant, on obtient :

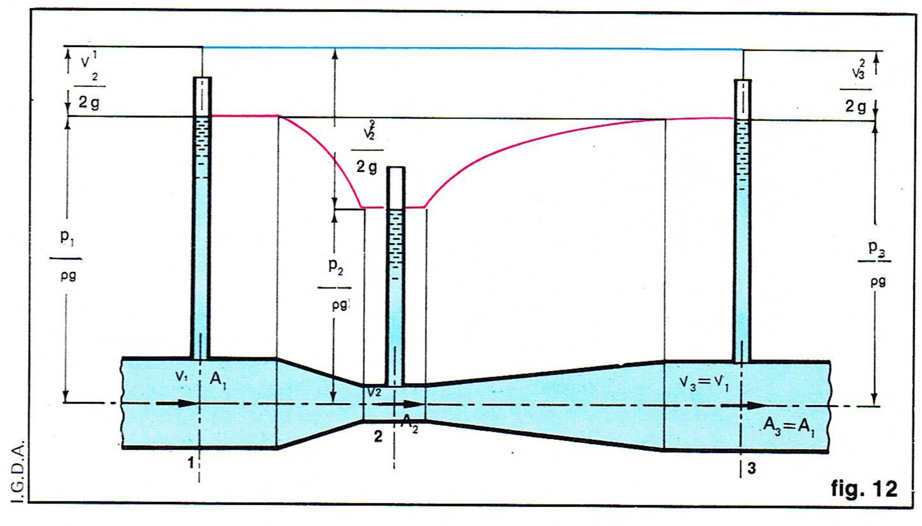
$$P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2} V_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$$

Le tube de Venturi est normalement utilisé comme moyen de mesure indirecte du débit. En effet, en déterminant la différence de pression ($P_1 - P_2$) et en reportant sa valeur dans la relation précédente, résolue par rapport à V_1, on a :

$$V_1 = \left[\frac{2}{\rho} \cdot \frac{P_1 - P_2}{\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1} \right]^{1/2}$$

Le débit volumétrique Q sera donc égal à :

$$Q = A_1 V_1 = A_1 \left[\frac{2}{\rho} \frac{P_1 - P_2}{\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1} \right]^{1/2}$$



▲ ***Figure 12 : représentation schématique du tube de Venturi.***

— *Écoulement d'un liquide à partir d'un réservoir*

En supposant que le réservoir soit suffisamment grand pour que son niveau ne varie pas durant l'écoulement (*fig.* 13), ce qui revient à admettre que la section du trou d'écoulement est petite et négligeable par rapport à l'aire de la surface libre, le théorème de Bernoulli permet d'écrire

$$z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

puisque la pression, aussi bien sur le niveau libre que dans le jet d'écoulement, coïncide avec la pression atmosphérique et que la conservation du débit impose que V_1 soit négligeable devant V_2. En résolvant par rapport à V_2, on obtient l'expression :

$$V_2 = \sqrt{2g\,(z_1 - z_2)}$$

appelée formule de Torricelli. Elle pourrait être obtenue intuitivement, en observant qu'une particule de liquide sur la surface libre possède uniquement une énergie potentielle dans le champ de gravitation ($E = \rho g z_1$), tandis qu'une particule sortant par l'ouverture, en prenant la cote de l'ouverture comme plan de référence, possède uniquement une énergie cinétique $\left(E = \frac{1}{2} \rho V_2^2 \right)$. Le fluide qui s'écoule du récipient a donc un débit donné par :

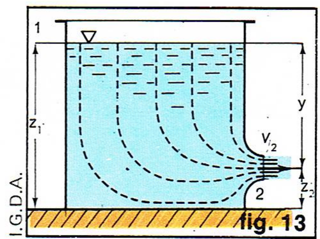
$$Q_2 = A_2 V_2 = A_2 \sqrt{2g\,(z_1 - z_2)}$$

— *Tube de Pitot*

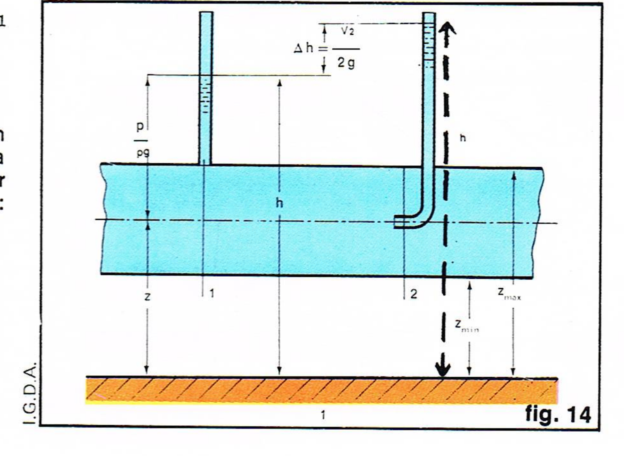
La relation :

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z = \text{constante}$$

peut être interprétée comme une condition d'invariabilité de la somme de trois termes qui ont tous les dimensions d'une pression. Le premier, qui n'est autre que la pression, prend souvent le nom de *pression statique* et peut être obtenu à partir des indications des piézomètres disposés perpendiculairement à la direction du mouvement dans la section 1 de la *figure* 14. En effet, le piézomètre mesure la



▲ ***Figure 13 : écoulement d'un liquide à partir d'un réservoir de grande capacité. Les lignes en pointillé indiquent les trajectoires des diverses particules.***



◀ ***Figure 14 : mesure de la cote piézométrique et de la densité volumique d'énergie cinétique du courant à partir de laquelle il est possible de déduire la pression totale.***

quantité $h = z + \frac{P}{\rho g}$ qui permet de déduire la valeur de la pression : $P = \rho g\ (h - z)$. La quantité h représente la cote piézométrique, c'est-à-dire la cote de la surface libre du piézomètre par rapport au plan de référence.

Le terme $\frac{1}{2}\rho V^2$ prend le nom de *pression dynamique* et représente la densité volumique d'énergie cinétique de l'écoulement.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre une section quelconque du conduit de la *figure* 14 et l'entrée du tube installé dans la section 2, on écrit $P^* = P_1 + \frac{1}{2}\rho V^2$, puisque la vitesse à l'intérieur du tube est nulle. La hauteur de fluide h dans ce tube permet de calculer la vitesse du fluide :

$$V = \sqrt{2\ g\ (h^* - h)} = \sqrt{2\ g\Delta h}$$

La pression P^*, somme de la *pression statique p* et de la *pression dynamique* $\frac{1}{2}\rho V^2$, prend le nom de *pression totale*.

En examinant cette même figure, on pourrait objecter que les deux quantités ρgh^* et $\rho gh + \frac{1}{2}\rho V^2$ ne sont pas comparables, qu'elles n'ont pas été mesurées sur la même trajectoire (axe du conduit). Mais on peut démontrer que, dans un écoulement où les filets fluides qui le constituent sont parallèles et rectilignes, la pression dans un plan normal à la direction de la vitesse varie selon la loi bien connue en hydrostatique :

$$P = (h - z)\ \rho g$$

la quantité h mesurée par le piézomètre placé dans la section 1 est donc indépendante de la cote de sa section d'entrée.

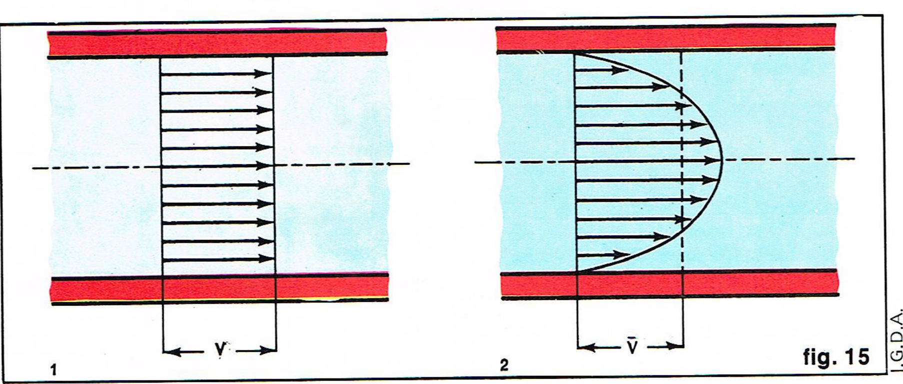
Fluides réels newtoniens

Les fluides réels se caractérisent par l'existence de frottements internes et par des transferts de chaleur. Les frottements internes conduisent à une dissipation d'énergie, effet dont on peut tenir compte à l'échelon microscopique par des frottements entre diverses couches de fluide. Les forces qui entrent en jeu traduisent un effet dit de viscosité. Lorsqu'elles sont proportionnelles aux gradients de vitesse, le coefficient de proportionnalité est appelé coefficient de viscosité. Cet effet de viscosité traduit en fait des interactions moléculaires.

Les phénomènes de transfert de chaleur se divisent en deux catégories : les phénomènes de conduction (ou diffusion), par exemple le transfert de chaleur dans une barre de métal, et les phénomènes de convection (transfert de chaleur dû au moment du fluide). Nous nous contenterons de remarquer que l'hypothèse d'adiabaticité faite pour l'étude du fluide parfait n'est plus valable.

Dans cette étude des fluides réels newtoniens (à viscosité indépendante du gradient de vitesse), nous nous attacherons tout d'abord à déterminer les équations générales qui régissent l'écoulement du fluide, c'est-à-dire, notamment, l'équation de Navier Stokes, puis, après avoir introduit la notion de nombre de Reynolds, nous aborderons un problème fondamental en hydrodynamique, celui de la similitude des écoulements stationnaires de fluide visqueux. Nous terminerons enfin par l'étude de la turbulence.

▼ Figure 15 : profil de vitesse : dans le cas d'un liquide parfait (1), toutes les particules ont la même vitesse ; dans le cas d'un liquide réel (2), la vitesse est nulle au contact des parois et maximale sur l'axe.



Écoulement laminaire

Conditions aux limites sur un obstacle

Au voisinage d'une paroi solide, il existe toujours des molécules de fluide qui sont maintenues sur cette paroi du fait des forces d'attraction dues aux molécules ou aux atomes du solide : c'est la couche adsorbée, où la vitesse du fluide est égale à la vitesse de la paroi. En s'éloignant de la paroi, cet effet se fera de moins en moins sentir, et la vitesse atteindra progressivement la valeur qu'elle aurait eue en l'absence de l'obstacle.

La couche de transition où la vitesse atteint progressivement sa valeur limite (ou du moins un pourcentage déterminé de celle-ci, par exemple 99 %) est appelée *couche limite*. Il reste à retenir qu'au voisinage d'un obstacle se déplaçant à la vitesse $\vec{u}$, la condition à respecter est $\vec{V} = \vec{u}$ sur l'obstacle, alors que l'on avait seulement, dans le cas d'un fluide parfait, la condition d'égalité des vitesses normales. Pour un obstacle au repos, il vient évidemment $\vec{V} = \vec{0}$ sur l'obstacle.

Profil de vitesse

Si l'on prend l'exemple d'un conduit à l'intérieur duquel s'écoule un fluide parfait, on observe que toutes les particules qui traversent une section A à un instant donné ont la même vitesse V (*fig.* 15/1) et que le débit volumique est égal à : $Q = \pi R^2 V$, où R est le rayon de la conduite. Si l'on considère, maintenant, le même conduit dans lequel un fluide réel s'écoule avec le même débit, les conditions aux limites impliquent que la vitesse des couches de fluide soit pratiquement nulle au voisinage immédiat de la paroi et croissante au fur et à mesure que l'on considère les couches plus proches de l'axe du conduit (*fig.* 15/2). L'ensemble des extrémités des vecteurs de vitesse des différentes particules qui traversent une section est une surface plane, dans le cas d'un fluide parfait, et courbe, dans le cas d'un fluide réel. L'intersection de ces surfaces avec un plan parallèle à la direction des vitesses prend le nom de *profil de vitesse ;* dans le cas, assez fréquent, où ces surfaces présentent un plan ou un axe de symétrie, ces profils sont eux aussi symétriques. Puisque, par hypothèse, les débits sont les mêmes dans les deux cas, on peut écrire (pour un écoulement à symétrie axiale) :

$$Q = \int_0^R 2\ \pi r V\ (r)\ dr = \pi R^2 V.$$

En définissant la vitesse moyenne d'un écoulement de débit Q comme la vitesse qui assurerait le même débit si elle était constante sur la section considérée, on voit que, dans le cas du fluide réel, cette vitesse moyenne $\overline{V}$ s'exprime simplement par :

$$\overline{V} = V = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\ \pi r V\ (r)\ dr.$$

où $V\ (r)$ est la vitesse à la distance r de l'axe.

Coefficient de viscosité et loi de Newton

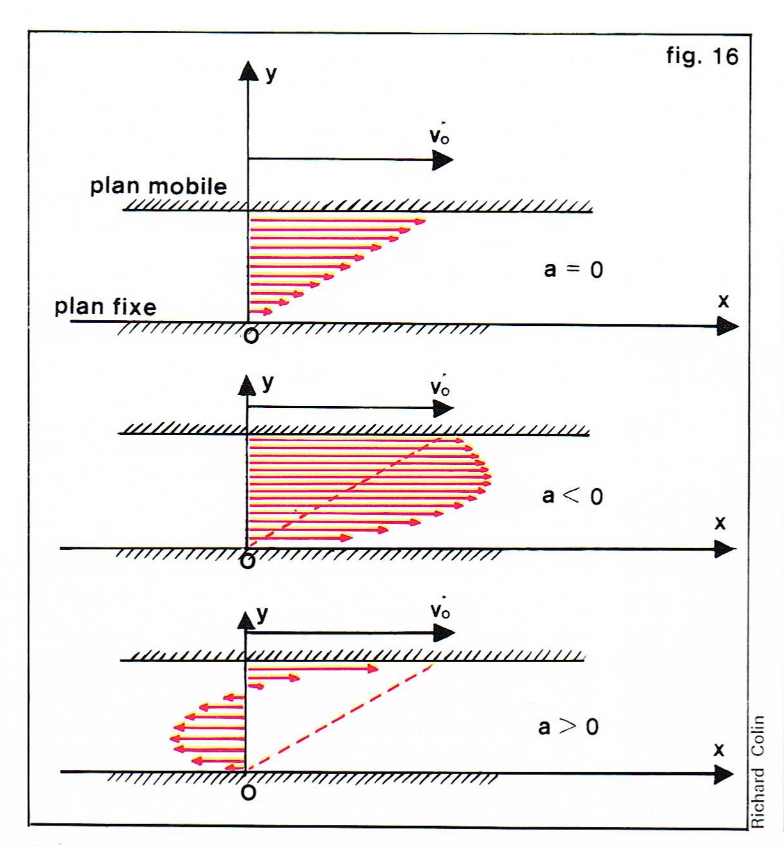
Des considérations identiques à celles qui sont utilisées en aérodynamique permettent de définir, dans un écoulement bidimensionnel, la relation entre la force dF qui s'exerce sur l'élément de surface élémentaire $dxdz$ en fonction du gradient de vitesse dans la direction y :

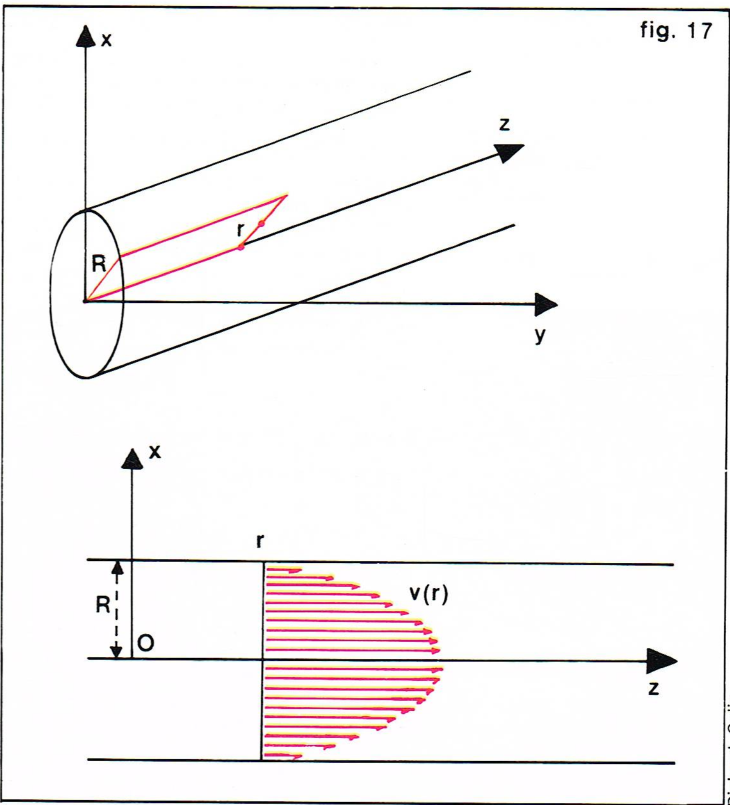
$$dF = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dxdz$$

Cette relation est appelée loi de Newton, et le coefficient de proportionnalité μ est appelé *coefficient de viscosité*. Les fluides newtoniens (où la viscosité est indépendante du gradient de vitesse) sont courants (air, eau, mercure, miel, huile...). Mais il en existe pour lesquels la dépendance de dF en fonction du gradient de vitesse n'est pas linéaire ; c'est le cas, par exemple, des plastiques, des suspensions, du sang, et de nombreux corps organiques.

En système M. K. S., la viscosité s'exprime en newtons-secondes/m^2 ; et en système C. G. S. (le plus utilisé à ce sujet), il s'exprime en poises (dynes-secondes/cm^2) : 1 newton-seconde/m^2 = 10 poises ; un sous-multiple très utilisé est le cp (centipoise = 10^{-2} poise) ; dans les conditions normales, nous avons :

$$\mu\ (\text{eau}) = 10^{-3}\ \text{N.s/m}^2$$
$$\mu\ (\text{huile}) = 1\ \text{N.s/m}^2$$
$$\mu\ (\text{air}) = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{N.s/m}^2$$





▲ *A gauche, figure 16 : écoulement de Couette entre un plan fixe et un plan mobile. A droite, figure 17 : écoulement de Poiseuille.*

Équation de continuité

La présence des forces de frottement ne modifie en rien l'établissement de l'équation de continuité ; on peut donc écrire, comme pour le fluide parfait :

$$\mathrm{div} \cdot (\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Dans le cas de l'écoulement d'un liquide incompressible, seul cas étudié par la suite, cette équation se réduit à :

$$\mathrm{div}\ (\vec{V}) = 0$$

Équation de Navier-Stokes

Pour décrire le mouvement de la masse d'un volume élémentaire $d\tau$, il est possible d'appliquer comme cela a été fait en aérodynamique le principe fondamental de la dynamique. Les forces en présence sont d'une part les forces d'inertie $\rho d\tau \frac{d\vec{V}}{dt}$, d'autre part les forces extérieures dérivant d'un potentiel Φ (champ de gravitation, électrique...) : $-\rho d\tau\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \Phi$, et enfin les contraintes de pression et les contraintes visqueuses tangentielles dont on peut montrer qu'elles sont égales à $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P}d\tau + \mu\Delta\vec{V}d\tau$.

Si l'on effectue le bilan de toutes ces forces, l'équation obtenue est celle de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ (\mathrm{P} + \rho\Phi) + \mu\Delta\vec{V}$$

Nous pouvons remarquer que, faisant $\mu = 0$ dans cette équation, on obtient simplement l'équation d'Euler, valable pour les fluides parfaits : $\frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\mathrm{P}}{\rho} + \Phi\right)$. La masse volumique ρ étant constante, il est courant d'introduire la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ et l'on récrit alors l'équation de Navier-Stokes sous la forme :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\mathrm{P}}{\rho} + \Phi\right) + \nu\Delta\vec{V}$$

Ce nouveau coefficient de viscosité ν est appelé viscosité cinématique. En système légal, ν s'exprime en m^2/s, et en système C. G. S. en cm^2/s, souvent et abusivement appelés poises par analogie avec la viscosité de l'eau, pour laquelle on a $\rho = 1\ g/cm^3$, ce qui entraîne $\nu = \mu$ en valeur numérique.

A titre indicatif, voici quelques valeurs de la viscosité cinématique exprimées en cm^2/s, dans des conditions normales : glycérine : 6,8 ; huile : 4,0 ; alcool : 0,022 ; eau : 0,010 ; mercure : 0,001 2 ; air : 0,150.

Applications de l'équation de Navier-Stokes

— *Écoulement de Couette* (*figure* 16).

Un fluide visqueux reposant sur un plan fixe horizontal est entraîné par un second plan animé d'une vitesse $\vec{V}_0$. Le mouvement est bidimensionnel, et la vitesse du fluide, qui n'a qu'une seule composante v_x, est fonction de la variable y. L'équation de Navier-Stokes se réduit alors à $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = -\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = 0$; de la seconde de ces équations, on déduit que $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x)$, ce qui impose que les deux membres de la 1re équation, l'un fonction de x, l'autre de y, ne peuvent qu'être égaux à une constante a. Il vient alors :

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_0 + ax$$

si P_0 est la pression en $x = 0$,
et de même :

$$V = V_0 \frac{y}{h} - \frac{h^2}{2\mu} a \frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Les profils de vitesse ont été tracés dans les trois cas où l'on a :

— $a = 0$, c'est-à-dire une pression constante dans tout le fluide ;

— $a > 0$, pression qui augmente vers les x positifs ;

— $a < 0$, pression qui augmente vers les x négatifs.

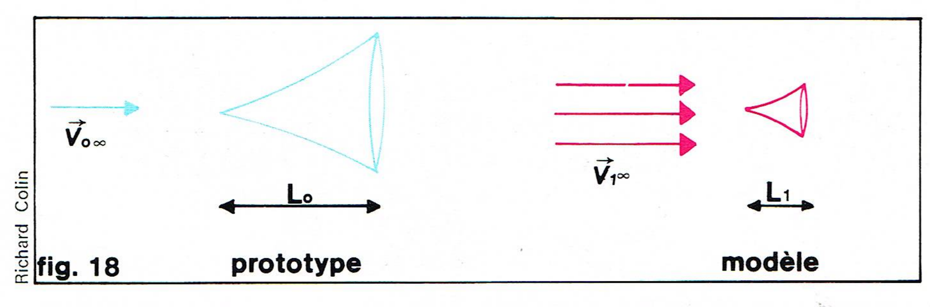
— *Écoulement de Poiseuille; perte de charge.*

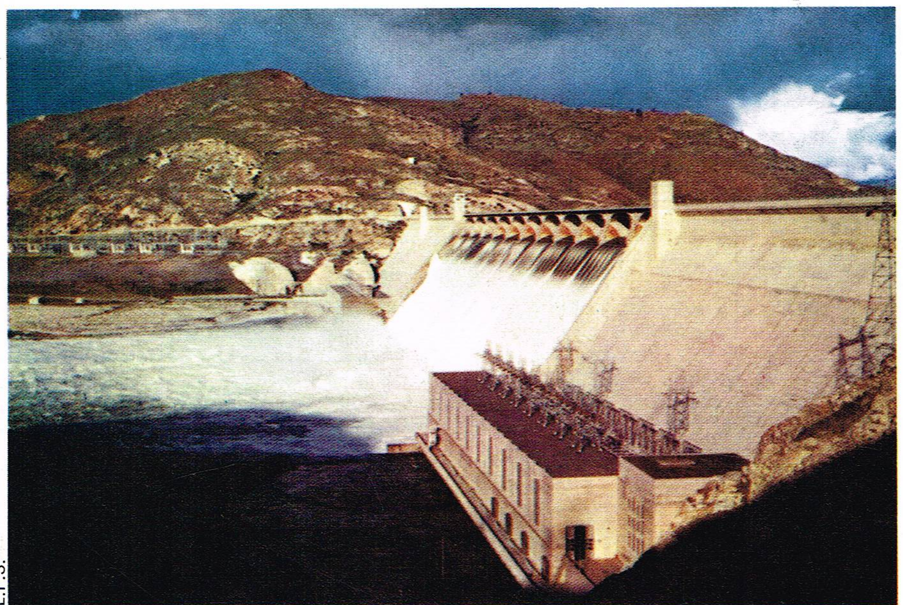
Considérons l'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite de rayon R (*fig.* 17) ; si nous appliquons l'équation de Navier-Stokes à cet écoulement, il vient, compte tenu de l'incompressibilité du fluide et des symétries (translation, rotation) : $v_x = v_y = 0$ et $v_z = v_z(r)$, ainsi que : $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = 0$,

on obtient finalement :

$$\frac{d\mathrm{P}}{dz} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}\right) = \mu \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = \text{constante.}$$

Par intégration, si a est le gradient de pression, il vient : $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0 - az$ qui permet de calculer la différence de pression entre deux sections séparées par la distance z,





▲ En haut, figure 18 : écoulement permanent d'un fluide sur un obstacle. Ci-dessus : l'un des plus grands barrages du monde, le Grand Coulee sur le fleuve Columbia (Washington). C'est à partir de l'étude de maquette que l'on déduit le comportement hydrodynamique d'un tel système et, partant, sa réalisation.

$\Delta P = -az$, et $V = \frac{a}{4\mu}(R^2 - r^2)$. Le profil des vitesses est donc un profil parabolique dont l'axe est confondu avec celui du tube. Pour calculer le débit, il faut intégrer la vitesse sur une section droite du tube, et l'on obtient :

$$Q = \int \rho \vec{V} d\vec{S} = 2\pi\rho \int_0^R V r dr, \text{ soit finalement : } Q = \frac{\pi}{8\nu} a R^4$$

que l'on peut relier à la perte de charge ΔP : $Q = \frac{\pi}{8\nu} \frac{\Delta \rho R^4}{z}$.

D'une mesure de perte de charge, on peut donc déduire le débit, connaissant la viscosité et la géométrie du système.

Similitude en écoulement permanent

On a vu que l'écriture la plus générale de l'équation gouvernant l'écoulement d'un fluide newtonien est l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(P + \rho\Phi) + \mu\Delta\vec{V}$$

Pour en obtenir les solutions, il s'agit de préciser les conditions aux limites : conditions aux limites dans l'espace qui font appel à la géométrie du système (conditions de non-glissement au niveau des obstacles...) et conditions aux limites dans le temps (conditions initiales...).

Il peut être intéressant de travailler sur une équation réduite, dont les variables sont des variables sans dimensions, obtenues en définissant des longueurs réduites, des vitesses réduites...

Deux systèmes hydrodynamiques pourront alors être caractérisés par la même équation réduite de Navier-Stokes. Si les variables réduites ont été convenablement choisies, et à condition de respecter certaines conditions sur la géométrie du système, les conditions aux limites seront identiques.

Les solutions seront les mêmes, et l'on voit que, de l'étude d'un système, on pourra déduire le comportement hydrodynamique d'un autre système : les deux systèmes sont dits semblables. C'est ce principe qui est appliqué lorsque l'on effectue des études sur maquettes (étude des profils aérodynamiques, en soufflerie, sur modèles réduits, étude de barrages...).

Cependant, l'étude sur modèle reste relativement onéreuse et ne peut se justifier que dans le cas où l'approche analytique est impossible.

Proposons-nous, par exemple, d'étudier l'écoulement permanent d'un fluide sur un obstacle (*fig.* 18).

Supposons la vitesse uniforme à l'infini (V_∞) ; soit L_0 une des dimensions caractéristiques de l'obstacle, et introduisons les variables sans dimensions :

$$V' = \frac{V}{V_\infty} \qquad \vec{r}' = \frac{\vec{r}}{L_0} \qquad P' = \frac{P}{\rho V_\infty^2}$$

Avec ces nouvelles variables, l'équation de Navier-Stokes :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{V} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} + \mu\Delta\vec{V}$$

devient

$$\frac{V_\infty^2}{L_0}(\vec{V}' \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{V}' = -\frac{V_\infty^2}{L_0}\overrightarrow{\text{grad}}\,P' + \frac{\nu V_\infty^2}{L_0^2}\Delta'\vec{V}'$$

soit $\quad (\vec{V}' \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{V}' = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \left(\frac{\nu}{V_\infty L_0}\right)\Delta'\vec{V}'$

Le groupement $\frac{V_\infty L_0}{\nu}$ est appelé nombre de Reynolds, et l'on voit que deux systèmes qui auront les mêmes conditions aux limites réduites auront les mêmes solutions si le nombre de Reynolds qui intervient dans l'équation réduite de Navier-Stokes est le même. Si, dans l'exemple qui nous intéresse, le modèle et le prototype sont homothétiques (longueur caractéristique L_1), on aura à écrire que $V_1' = 0$ pour les mêmes valeurs des variables réduites d'espace : $\vec{r}_1' = \vec{r}_1/L_1$.

Si l'on prend pour vitesse caractéristique la vitesse à l'infini, on voit que la condition à l'infini est $V' = 1$. Il suffit donc maintenant d'avoir le même nombre de Reynolds, ce qui peut s'obtenir en modifiant la vitesse à l'infini, ou la viscosité du fluide.

Nombre de Reynolds, nombre de Froude, nombre de Strouhal

En fait, le groupement $\frac{V_\infty L_0}{\nu}$ qui est intervenu ici a été introduit historiquement pour étudier la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent. Il avait été établi que, pour un écoulement dans un tuyau, ce groupement caractéristique a une valeur critique ($\sim$ 2 000) en dessous de laquelle le régime est toujours laminaire, et au-dessus de laquelle il devient turbulent (voir plus loin *Turbulence*).

Si l'on doit tenir compte des forces extérieures (en particulier des forces de pesanteur), on doit écrire :

$$(\vec{V}\,\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{P}{\rho} + \vec{g} + \nu\Delta\vec{V}$$

soit :

$$\frac{V_\infty^2}{L_0}(\vec{V}'\,\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{V}' = \frac{V_\infty^2}{L_0}\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho' + \vec{g} + \frac{\nu V_\infty}{L_0^2}\Delta'\vec{V}'$$

Il apparaît donc un second nombre caractéristique $\frac{V_\infty^2}{gL_0}$ qui est appelé nombre de Froude.

Enfin, pour des mouvements non stationnaires, il vient :

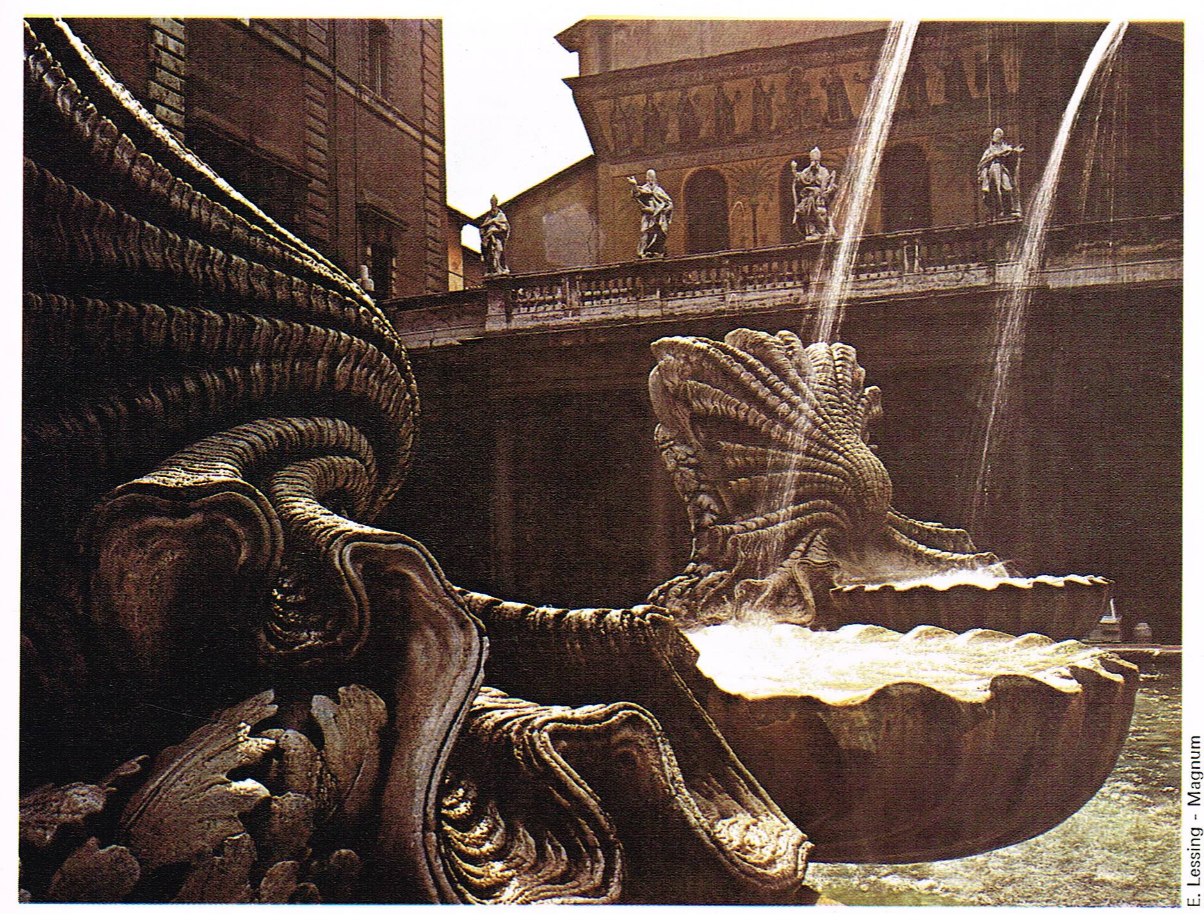
$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\,\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{P}{\rho} + \nu\Delta\vec{V}$$

τ étant l'échelle caractéristique de variation dans le temps du phénomène, et t' le rapport $\frac{t}{\tau}$, on peut écrire :

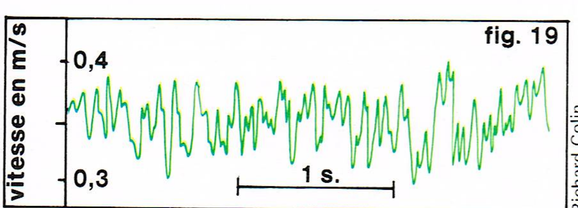
$$\frac{V_\infty}{\tau}\frac{\partial\vec{V}'}{\partial t'} + \frac{V_\infty^2}{L_0}(\vec{V}'\,\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{V}' = -\frac{V_\infty^2}{L_0}\overrightarrow{\text{grad}}\,P' + \frac{\nu V_\infty}{L_0}\Delta'\vec{V}'$$

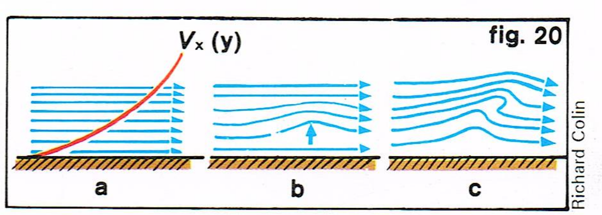
qui fait apparaître le nombre caractéristique $\frac{\tau V_\infty}{L_0}$, appelé nombre de Strouhal.

Dans le cas où interviennent, non seulement le nombre de Reynolds, mais aussi le nombre de Froude et de Strouhal, la similitude a lieu quand il y a égalité de ces nombres pour les deux systèmes. Une telle condition reste donc toujours à vérifier.


E. Lessing - Magnum

◀ *La fontaine de Sainte-Marie-du-Transtévère (Rome), un chef-d'œuvre baroque (1692) de l'architecte italien Carlo Fontana ; il est également l'auteur d'un* **Traité des eaux courantes.**





◀ *A gauche, figure 19 ; fluctuations des vitesses dans un écoulement d'eau en tube cylindrique, mesurées directement par vélocimétrie laser à effet Doppler (diamètre de l'écoulement 22,1 mm ; nombre de Reynolds $\mathcal{R}e$ = 6 500). A droite, figure 20 ; effet d'une perturbation sur un écoulement laminaire :* a, *l'écoulement est laminaire avec un profil parabolique $V_x(y)$;* b, *si une petite perturbation est créée au sein du fluide, elle tend à diffuser dans le sens de la flèche ;* c, *à plus grande vitesse, si une plus grande quantité de mouvement passe dans la perturbation, celle-ci tend à former un tourbillon.*

• ***Écoulement turbulent***

Nombre de Reynolds critique

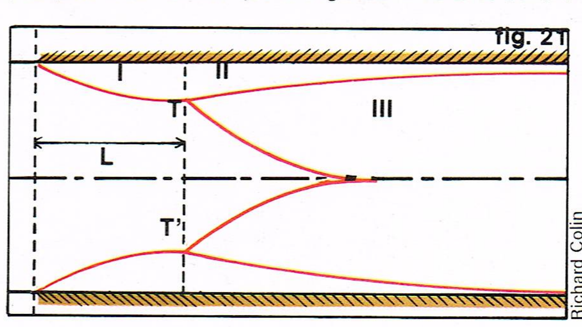
Si le débit volumique est augmenté considérablement, la structure de l'écoulement laminaire (dont les différentes couches « glissent » les unes sur les autres) n'est plus maintenue : l'écoulement devient fluctuant, le mouvement des particules de liquide étant désordonné. Ce mouvement s'effectue généralement à faible vitesse par rapport au mouvement d'ensemble du liquide, comme on peut le remarquer sur l'enregistrement des vitesses donné sur la *figure* 19. De tels déplacements d'une quelconque partie du fluide sont très complexes et ne peuvent être décrits qu'en terme de grandeurs moyennes. Ce type d'écoulement caractérise l'état d'écoulement turbulent.

Dans ces conditions, les transferts de quantité de mouvement entre domaines voisins du liquide sont très importants. Cela implique que le produit de la masse volumique ρ par la vitesse locale u joue un rôle fondamental. Plus précisément, lorsque le transfert de cette quantité de mouvement, caractérisé par le terme ρu^2, est important devant les effets visqueux représentés par le terme $\mu \frac{u}{l}$ (où μ est la viscosité dynamique et l une grandeur caractéristique de l'écoulement qui, en géométrie cylindrique, est généralement prise égale au diamètre D), le régime turbulent est atteint. Ce changement de régime est donc caractérisé par le rapport des effets d'inertie et de viscosité qui, en fonction des grandeurs moyennes, est appelé nombre de Reynolds de l'écoulement

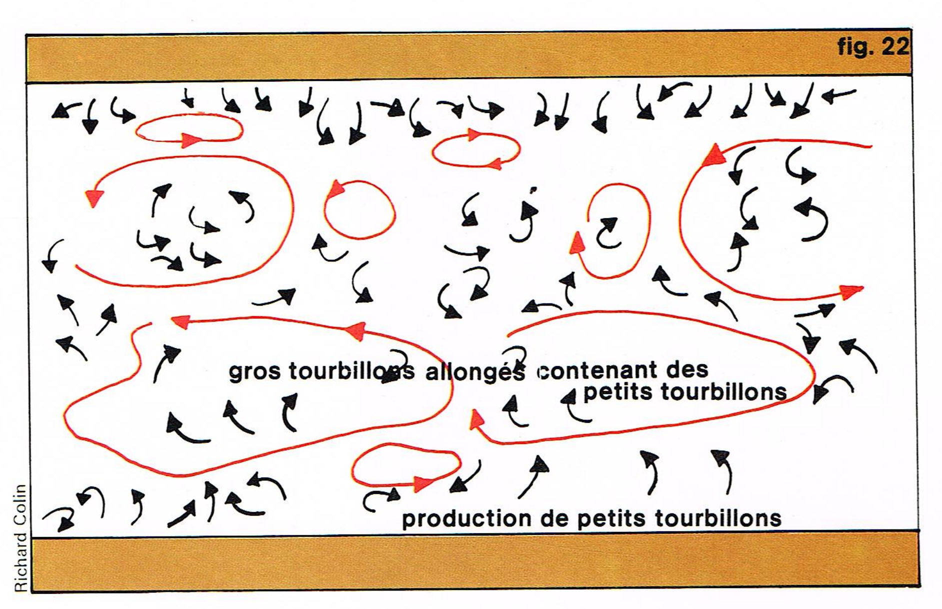
$$\mathcal{R}e = \rho \frac{\overline{V}D}{\mu} = \frac{\overline{V}D}{\nu}$$

où $\overline{V}$ est la vitesse débitante et ν la viscosité cinématique. Tant que $\mathcal{R}e$ ne dépasse pas un nombre critique, $2 \cdot 10^3$ pour les tuyaux cylindriques à parois lisses, le mouvement laminaire sera stable, c'est-à-dire qu'il n'y aura pas de transfert important d'énergie, de l'écoulement de base vers la perturbation superposée, comme le montre la *figure* 20.

Si $\mathcal{R}e$ prend des valeurs comprises entre $2 \cdot 10^3$ et $4 \cdot 10^3$, région appelée *zone de transition*, il y a généralement passage progressif à l'état turbulent. Au-dessus de cette valeur du nombre de Reynolds, l'écoulement est complètement turbulent quelles que soient les conditions d'entrée (orifices rentrants, entrées à bords arrondis et polis ou à bords vifs), pour une distance de l'entrée supérieure à la *longueur d'établissement* du régime. Le diagramme schématique de l'écoulement est alors celui qui est représenté sur la *figure* 21. La zone TT' est d'autant plus proche de l'orifice que le degré de turbulence dans le



◀ *Figure 21 ; zone d'entrée dans un tube en régime turbulent :* I, *couche limite laminaire ;* II, *sous-couche limite laminaire ;* III, *cœur turbulent ;* L, *longueur d'entrée en régime turbulent.*



▲ *Figure 22 ; représentation schématique de la structure d'un écoulement cylindrique turbulent : les tourbillons sont superposés à un écoulement de base plus rapide ; l'observation est faite dans un système de référence lié à l'écoulement moyen ; les petits tourbillons, engendrés dans la zone des forts gradients de vitesse près des parois, diffusent dans le cœur de l'écoulement.*

réservoir est plus grand. En général, cette zone d'entrée où l'écoulement n'est pas complètement turbulent est de l'ordre d'une centaine de diamètres du tube.

Dynamique de la turbulence et distribution spectrale des fluctuations

Outre le caractère temporellement aléatoire du champ de vitesse turbulent et l'important transfert de quantité de mouvement relié aux effets d'inertie, une autre propriété de ce type d'écoulement est à noter : la turbulence est toujours associée à un caractère localement tourbillonnaire appelé encore champ aléatoire de vorticité $\vec{\omega}$ où :

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}$$

La *figure* 22 montre la turbulence dans un tube où l'écoulement tourbillonnaire est observé dans un système de référence se déplaçant à la vitesse moyenne de l'écoulement principal. Près des parois, le fort gradient des vitesses détruit les gros tourbillons qui se cassent en tourbillons de taille plus petite. Certains de ces derniers migrent vers l'axe où se trouvent les gros tourbillons.

En turbulence complètement développée, quand le nombre de Reynolds est très supérieur à la valeur critique, il y a tout un spectre de tailles des tourbillons. Les plus gros ont des dimensions comparables au diamètre du tube et contiennent la majeure partie de l'énergie cinétique du mouvement turbulent. Leur énergie n'est pas dissipée par effet de viscosité mais par interaction inertielle non linéaire et dégradation en des tourbillons de plus petite taille. Ceux-ci pouvant se dégrader à leur tour en tourbillons encore plus petits, il en résulte, pour le transfert de l'énergie cinétique de la turbulence, un *mécanisme de cascade* qui aboutit finalement à une perte d'énergie par dissipation visqueuse des tourbillons de très petites dimensions. De ce mécanisme de passage, par étape d'abord, de l'énergie de l'écoulement de base aux gros tourbillons, puis, par cascade, de ces derniers aux petits tourbillons et enfin sous forme de chaleur par dissipation par effets de viscosité, il résulte un spectre caractéristique de l'énergie des fluctuations turbulentes, dont il est donné un exemple sur la *figure* 23.

Dans la distribution spectrale d'énergie qui représente la densité des valeurs quadratiques $\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ des fluctuations des vitesses dans l'espace des fréquences n, la valeur maximale de F (n) apparaît toujours aux basses fréquences. Pour les fréquences supérieures, on notera deux domaines différents : aux fréquences moyennes dans le *domaine inertiel isotrope*, la loi de distribution spectrale a pour équation :

$$F(n) \sim n^{-5/3}$$

aux fréquences supérieures, dans le *domaine dissipatif*, F (n) décroît plus vite du fait de l'action de la viscosité, et la relation prend la forme :

$$F(n) \sim n^{-7}$$

Tension de Reynolds

Dans un écoulement turbulent en tuyau cylindrique, la vitesse instantanée dans la direction de l'axe (x) est donnée par :

$$u_x = V + u'_x$$

où $V = \langle u_x \rangle$ est la vitesse moyenne sur une période de temps suffisamment longue pour intégrer un grand nombre de fluctuations, et u'_x la vitesse instantanée des fluctuations. Ce sont ces vitesses fluctuantes qui sont importantes pour les phénomènes de dissipation d'énergie, de transfert de masse et de chaleur dans la turbulence. L'*intensité de la turbulence* est mesurée par la valeur quadratique moyenne des fluctuations de vitesse :

$$u'_x = \sqrt{\langle u'^2_x \rangle}$$

De même, dans la direction y perpendiculaire à l'axe x, on peut décomposer la vitesse en sa partie moyenne qui est nulle, $\langle u_y \rangle = 0$, et la partie fluctuante u'_y.

Une grandeur fondamentale dans la théorie de la turbulence est le produit de corrélation des vitesses fluctuantes dans deux directions, par exemple $\langle u'_x u'_y \rangle$. Ce produit de corrélation est, en général, une quantité non négligeable du fait de la bonne corrélation des vitesses à l'intérieur d'un même tourbillon et traduit un échange intense de quantité de mouvement entre différents points du liquide. Plus précisément, les tensions équivalentes à ce transfert de quantité de mouvement, appelées *tensions de Reynolds* T_R, sont plus importantes que les tensions ayant pour origine la viscosité moléculaire. Leur expression mathématique prend la forme :

$$T_R = -\rho \langle u'_x u'_y \rangle$$

Certaines théories semi-empiriques, fondées sur la notion de longueur de mélange, permettent de relier ces tensions au gradient de vitesse moyenne, et ainsi de trouver le profil des vitesses moyennes dans l'écoulement.

Profil des vitesses moyennes

Ainsi, si l'on trace ce profil le long d'un diamètre du tube cylindrique à parois lisses (des caractéristiques similaires seraient obtenues dans le cas de conduits de section quelconque), on obtient la courbe de la *figure* 24. Ce profil peut être représenté par les expressions mathématiques suivantes. Si y désigne la distance à la paroi, on a, près des parois :

$$V = \dot{\gamma}_p y$$

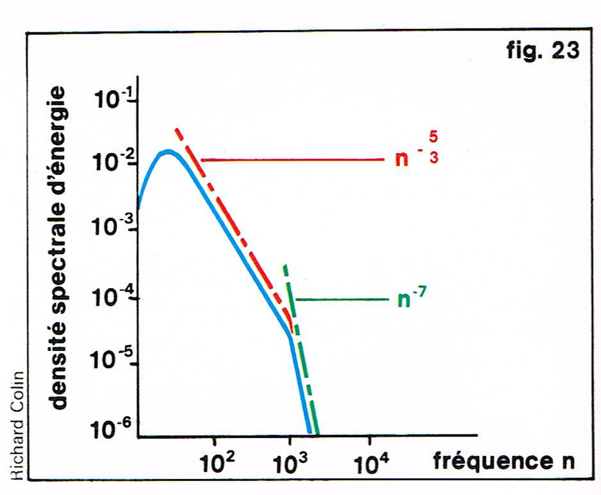
où le gradient de vitesse $\dot{\gamma}_p$ est constant dans le domaine qui est appelé *sous-couche laminaire*. Dans le cœur de l'écoulement (noyau turbulent), on a :

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{y}{R}\right)^n$$

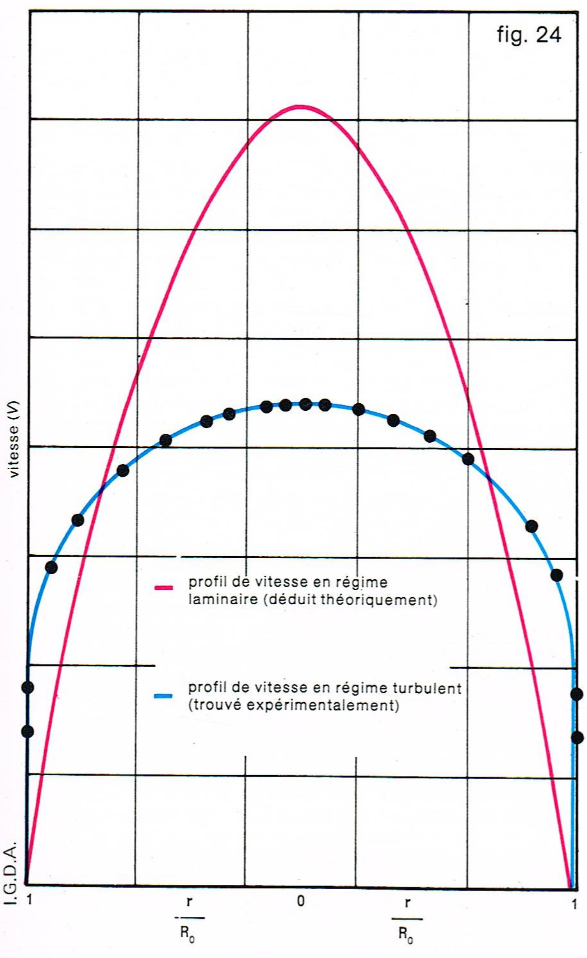
où V_0 est la vitesse sur l'axe.

La valeur de l'exposant n, voisine de 1/7, dépend du nombre de Reynolds $\mathcal{R}e$ caractéristique de l'écoulement et décroît alors que $\mathcal{R}e$ croît. Pour les forts nombres de Reynolds, on doit ainsi remplacer cette loi en puissance par la loi logarithmique :

$$V = A' + B' \ln y$$



▶ *Figure 23 ; allure du spectre d'énergie des fluctuations dans un écoulement cylindrique turbulent.*



Cette loi est généralement présentée sous forme non dimensionnelle en introduisant ce que l'on appelle la *vitesse de frottement :*

$$V_f = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$$

où τ_p est la contrainte tangentielle à la paroi. Si l'on pose :

$$y^* = \frac{yV_f}{\nu} \quad \text{et} \quad V^* = \frac{V}{V_f}$$

les deux lois précédentes s'écrivent alors, quel que soit l'écoulement turbulent en rayon cylindrique considéré :

— au voisinage de la paroi :

$$V^* = y^* \qquad (1)$$

— dans le noyau turbulent :

$$V^* = \text{A} + \text{B Ln}y^*$$

où les valeurs des constantes A et B ont été déterminées expérimentalement :

$$\text{A} \simeq 5{,}5 ; \quad \text{B} \simeq 2{,}5$$

L'épaisseur δ_L de la sous-couche laminaire dans laquelle la vitesse est proportionnelle à la distance à la paroi est obtenue en cherchant la distance à la paroi pour laquelle les deux valeurs de V^* valables dans les différents domaines sont égales.

Dans le cas des tuyaux rugueux, si *e* est la hauteur des aspérités, on admet que le tuyau peut se comporter comme un tuyau lisse lorsque l'on a :

$$e < \delta_L$$

Au-delà, le tuyau est considéré comme étant rugueux, et ce d'autant plus que *e* est grand. Dans ces tuyaux, la loi de distribution des vitesses dépend de la hauteur caractéristique des aspérités :

$$\frac{V}{V_f} = 8{,}5 + 2{,}5 \text{ Ln} \frac{y}{e}$$

Frottements et résistance à l'écoulement

Comme il a été vu précédemment, la relation entre le gradient de pression et le débit $Q = \frac{\pi D^2 \overline{V}}{4}$ ne peut être déterminée théoriquement que dans le cas d'écoulement laminaire où l'on observe un bon accord avec l'expérience. Dans le cas d'écoulement turbulent, une telle relation ne peut être qu'empirique. Cette loi, appelée *loi de frottement* ou *loi de résistance*, est généralement donnée en termes de variables non dimensionnelles en définissant le coefficient de résistance *f* par :

$$|\vec{\nabla} P| = \frac{f}{D}\frac{1}{2}\rho\overline{V}^2$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire dans un tuyau cylindrique, qu'il soit laminaire ou turbulent, le bilan des forces qui s'exercent sur un domaine compris entre deux sections, séparées d'une longueur unité, conduit à la relation suivante entre le gradient de pression $|\vec{\nabla} P|$ et la tension τ_p à la paroi :

$$\tau_p = |\vec{\nabla} P| \frac{D}{4}$$

On peut donc aussi définir le coefficient de résistance par la relation :

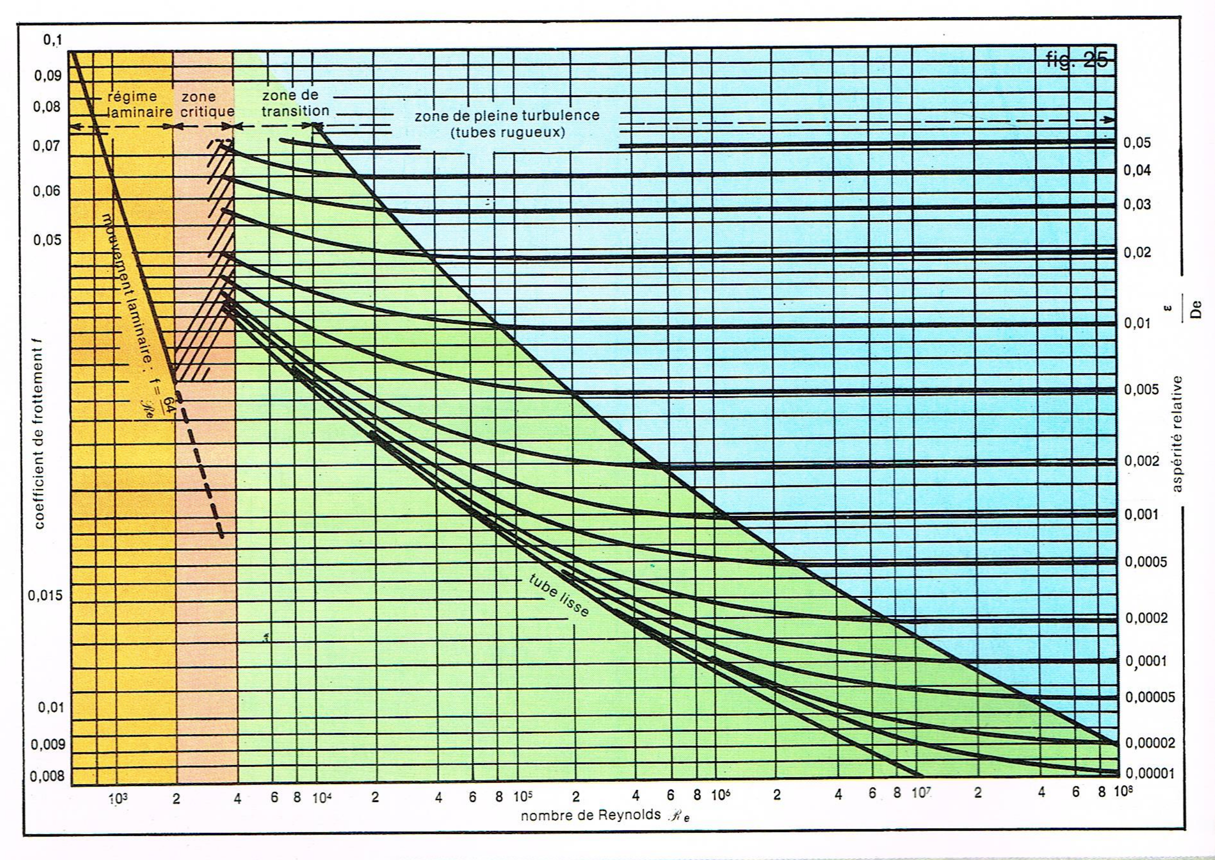
$$f = \frac{8\,\tau_p}{\rho\overline{V}^2}$$

◀ ***Figure 24 ; comparaison entre les profils de vitesse dans un tube : en régime laminaire (rouge), le rapport entre la vitesse maximale et la vitesse moyenne vaut 2, alors qu'en régime turbulent (bleu) ce rapport prend des valeurs considérablement plus basses, variables suivant la vitesse moyenne.***



▼ ***Écoulement à basse vitesse : les tourbillons se forment au-dessus d'une ogive inclinée sur le courant (coupe transversale à l'avant de l'ogive)*** [*visualisation à l'aide de bulles d'air*].

▶ Figure 25 ; diagramme de Moody pour la détermination du coefficient de frottement f dans les tubes à section circulaire. Les zones colorées correspondent à autant de types de mouvement.



▶ La réduction de la résistance à l'écoulement dans les lances d'incendie est une application de l'hydrodynamique où interviennent des écoulements turbulents.

G. Peress - Magnum

qui, dans le cas de l'écoulement laminaire, conduit à :

$$f = \frac{64}{\mathcal{R}e}$$

Il est intéressant de donner ici la loi du frottement dans le cas d'écoulements turbulents qui se rencontrent dans de nombreuses applications pratiques (installations de chauffage, refroidissement des piles atomiques...). Pour les forts nombres de Reynolds, et dans le cas de tuyaux lisses, il y a une bonne concordance théorique et expérimentale entre la loi universelle des vitesses (1) et la loi de frottement suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} (\mathcal{R}e \sqrt{f}) - 0{,}8$$

Dans le cas des tuyaux à parois rugueuses, le coefficient de frottement ne dépend pratiquement plus du nombre de Reynolds aux grandes valeurs de $\mathcal{R}e$, mais dépend fortement de la taille caractéristique des rugosités comme le montre la *figure* 25.

Récemment, il a été montré, expérimentalement, que des solutions aqueuses de polymères en très faibles proportions (quelques p. p. m.) peuvent donner lieu à une réduction du frottement qui peut aller jusqu'à 90 %. Cette réduction de traînée résulte de l'inhibition des pertes dues à la viscosité dans la sous-couche laminaire et à la résistance à l'étirement et au cisaillement, cette résistance étant accrue en présence des molécules à longues chaînes présentes dans les tourbillons. Déjà utilisé dans l'industrie pétrochimique, ce phénomène est d'un intérêt fondamental pour toutes les applications de l'hydrodynamique où interviennent des écoulements turbulents (réduction de traînée des sous-marins, de résistance à l'écoulement dans les lances d'incendie et dans les conduites à longues distances...).



Magnétohydrodynamique

La magnétohydrodynamique (M. H. D.) étudie les mouvements des fluides électriquement conducteurs en présence de champs magnétiques : l'écoulement d'un fluide conducteur dans un champ magnétique engendre un champ électrique d'induction et est donc le siège de courants. Ceux-ci modifient le champ magnétique initial et, par l'intermédiaire des forces magnétiques, modifient le mouvement du fluide. Ainsi apparaît un couplage des effets électromagnétiques et hydrodynamiques qui constitue le domaine de l'étude de la M. H. D. Cette interaction, par effets d'induction, est d'autant plus importante que la conductivité électrique du fluide, la vitesse et les dimensions de l'écoulement sont grandes. Ces derniers paramètres peuvent être regroupés dans un nombre sans dimension, le *nombre de Reynolds magnétique* $\mathcal{R}_M$, qui traduit l'importance du couplage; les pertes par effet Joule et par les phénomènes d'interaction sont généralement faibles ($\mathcal{R}_M < 1$) dans les métaux liquides et les gaz faiblement ionisés; par contre, les plasmas complètement ionisés sont parfaitement conducteurs et l'interaction est forte ($\mathcal{R}_M > 1$).

De nombreux phénomènes naturels, en particulier d'origines astrophysique (taches, éruptions et vents solaires) et géophysique (physique de la magnétosphère), sont interprétés en utilisant la M. H. D. : cela tient au fait que les dimensions, les vitesses et les conductivités électriques mises en jeu sont élevées, de sorte que le couplage champ-matière est important. Par contre, à l'échelle du laboratoire, les applications thermiques envisagées, tant avec les métaux liquides qu'avec les plasmas faiblement ionisés, se sont heurtées aux difficultés inhérentes à la faible conductivité et, par là même, au faible couplage. Ainsi, actuellement, les seuls développements industriels concernent-ils le pompage et le brassage électromagnétique de métaux liquides (réfrigérant sodium liquide dans les réacteurs nucléaires). Cependant, les applications de la M. H. D. aux plasmas fortement ionisés de forte conductivité, dans le domaine de l'obtention de nouvelles sources d'énergie ou de nouveaux moyens de conversion d'énergie, sont à un stade très avancé des recherches : fusion contrôlée, générateurs et moteurs M. H. D.

Hypothèses fondamentales et équations générales

La théorie de la M. H. D., régie par un système d'équations couplées obtenues à partir de la théorie de *Maxwell* et des équations de l'hydrodynamique, repose sur certaines hypothèses.

— Les phénomènes observés étant de basse fréquence, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction $\vec{J}$. La loi de Maxwell-Ampère s'écrira donc dans ce cas :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

— Le fluide est globalement neutre du point de vue électrique, ce qui permet de négliger la force électrique due à la charge d'espace devant la force magnétique.

— Le libre parcours moyen des porteurs de charges étant beaucoup plus petit que leur rayon de giration dans le champ magnétique, le fluide peut être considéré comme *isotrope* et, de ce fait, sa conductivité électrique comme une quantité *scalaire*.

Sous ces hypothèses, la combinaison des équations de l'électromagnétisme et de la loi d'Ohm relative à un conducteur en mouvement (vitesse $\vec{V}$) dans un champ magnétique conduit à une équation de diffusion-convection du champ magnétique :

$$(1) \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\vec{V} \times \vec{B}) + \lambda \Delta \vec{B}; \quad \mathrm{div}\, \vec{B} = 0$$

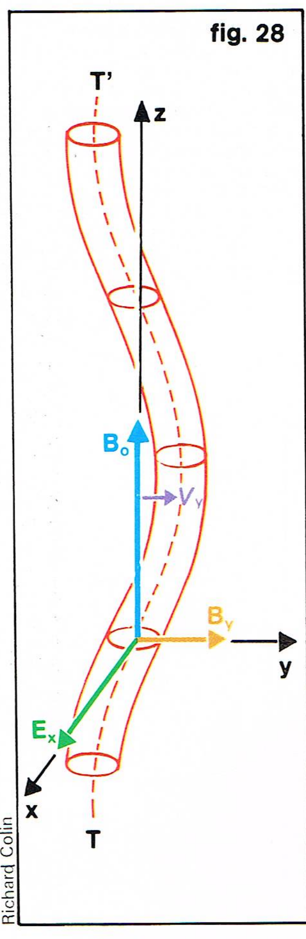
où le coefficient de diffusion λ est relié à la conductivité électrique par la relation :

$$\lambda = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$$

(μ_0 constante magnétique du vide).

D'autre part, les équations générales de l'hydrodynamique, compte tenu de la force de Laplace, s'écrivent :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \vec{J} \times \vec{B} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P + \nu \Delta \vec{V}; \quad \mathrm{div}\, \vec{V} = 0$$



▲ *Ci-dessus, figure 28; onde d'Alfven se propageant parallèlement à un champ statique uniforme $\vec{B}_0$; TT', tube de champ déformé par l'onde; Ex, By, Vy, perturbations des champs électrique, magnétique et vitesse dues à l'onde. A droite, figure 29; écoulement plan parallèle de Hartmann.*

(ρ et ν sont respectivement la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide).

Il est intéressant de noter ici qu'il y a une importante analogie entre l'équation **(1)** de transport de $\vec{B}$ et l'équation qui décrit l'évolution de la vorticité $\vec{\omega} = \text{rot}\,\vec{V}$ dans un fluide incompressible non conducteur. En effet, en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes, on obtient :

$$\textbf{(2)} \qquad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{rot}\,(\vec{V} \times \vec{\omega}) + \nu\Delta\vec{\omega}; \quad \text{div}\,\vec{\omega} = 0$$

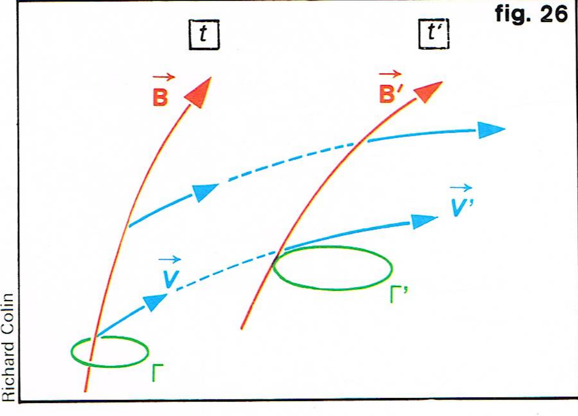
Convection et diffusion du champ magnétique

Les deux termes qui figurent aux membres de droite des équations **(1)** et **(2)** décrivent deux mécanismes différents qui font évoluer $\vec{B}$ ou $\vec{\omega}$: le premier dépend de la vitesse du fluide, le deuxième est proportionnel aux paramètres caractéristiques des pertes par frottements (viscosité ν, résistivité $1/\sigma$). Ils sont respectivement appelés :

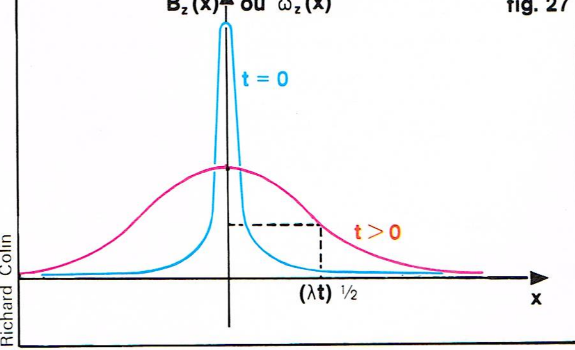
termes de convection $\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}\,(\vec{V} \times \vec{B}) \\ \quad\text{ou} \\ \text{rot}\,(\vec{V} \times \vec{\omega}) \end{array} \right.$

termes de diffusion $\left\{ \begin{array}{l} \lambda\Delta\vec{B} \\ \text{ou} \\ \lambda\Delta\vec{\omega} \end{array} \right.$

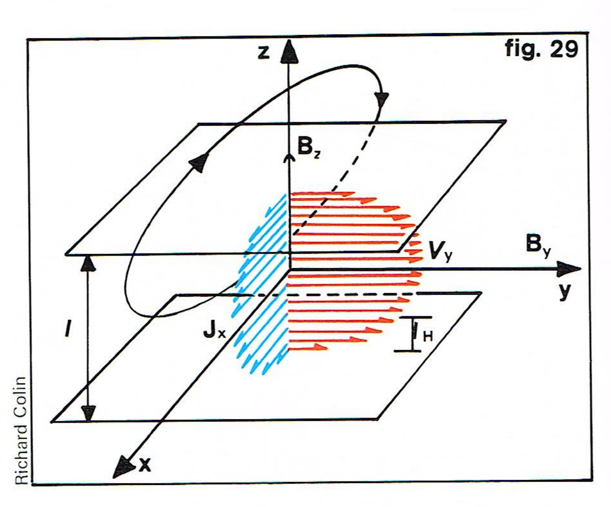
Dans le cas où les pertes d'énergie sont faibles, les termes de diffusion sont négligeables devant les termes de convection, et l'on aboutit ainsi à la propriété caractéristique de « champ gelé » dans la matière (champ de vorticité dans le cas des fluides parfaits non conducteurs, champ magnétique dans le cas des fluides très conducteurs), comme le montre la *figure* 26. Par contre, dans le cas limite opposé où le deuxième mécanisme d'évolution est prépondérant, l'équation d'évolution de $\vec{B}$ (ou $\vec{\omega}$) est une équation classique de diffusion. Les phénomènes de diffusion tendent à atténuer une perturbation selon la loi décrite sur la *figure* 27. En un temps de l'ordre de t, la distance de diffusion est de l'ordre de $(\lambda t)^{1/2}$. Il en résulte que la pénétration d'un champ magnétique alternatif de pulsation ω se produit sur une épaisseur $\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^{1/2}$ (effet de peau).



▶ *Figure 26; convection du champ magnétique « gelé » dans un fluide infiniment conducteur (il suffit de remplacer $\vec{B}$ par $\vec{\omega}$ dans le cas du fluide parfait non conducteur).*



▶ *Figure 27; diffusion du champ magnétique (ou de la vorticité) dans un fluide faiblement conducteur (ou visqueux).*



Il est intéressant de remarquer ici qu'une analyse dimensionnelle des équations **(1)** et **(2)** conduit à introduire des nombres de Reynolds sous forme de rapport des effets de convection et de diffusion. En effet, alors que l'on avait

$$\mathcal{R}e = \frac{Vl}{\nu} \sim \frac{\text{convection de } \vec{\omega}}{\text{diffusion de } \vec{\omega}}$$

on obtient ici :

$$\mathcal{R}_M = \frac{Vl}{\lambda} = \mu_0 \sigma V l \sim \frac{\text{convection de } \vec{B}}{\text{diffusion de } \vec{B}}$$

Ondes d'Alfven

Dans le cas des milieux fortement conducteurs, une perturbation de champ magnétique peut se propager sous forme d'ondes électromagnétiques de basse fréquence (ondes hydromagnétiques) avec entraînement, par convection, de la matière. Le cas le plus simple est celui d'ondes planes sinusoïdales à polarisation transversale et de direction de propagation parallèle au champ magnétique statique $\vec{B}_0$. La structure de telles ondes, appelées ondes d'Alfven, est décrite sur la *figure* 28. Elle résulte d'un comportement des tubes de force du champ magnétique analogue au comportement des cordes vibrantes (masse spécifique ρ, tension longitudinale magnétique $T_M = \frac{B_0^2}{\mu_0}$). On a donc, pour ces ondes, une vitesse de propagation :

$$V_A = \sqrt{\frac{T_M}{\rho}} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

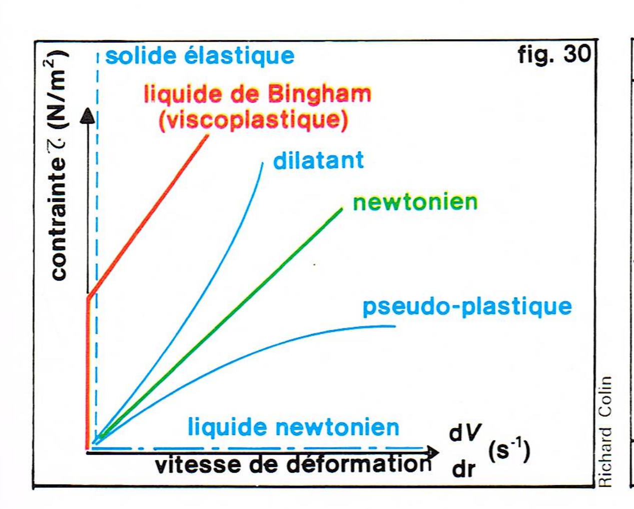
indépendante de la fréquence. Pour que ces ondes se propagent sans dispersion ni atténuation, il est nécessaire que la fréquence soit suffisamment basse et que le champ magnétique ainsi que la conductivité σ soient assez élevés.

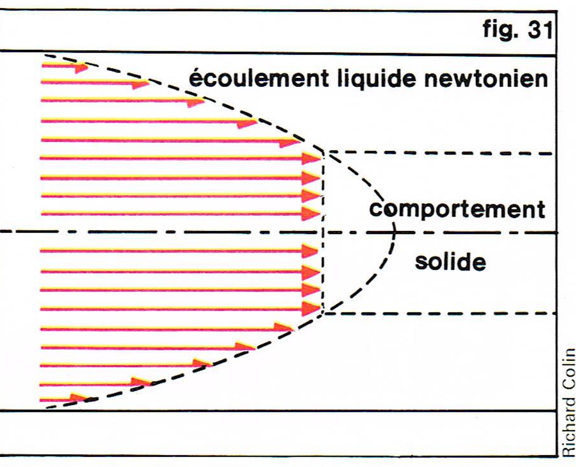
Écoulements de Hartmann

Ce sont des écoulements plans stationnaires et laminaires de fluides conducteurs ayant la structure schématisée sur la *figure* 29. On remarquera que le champ magnétique principal B_z, le courant induit J_x et la vitesse de l'écoulement V_y forment un trièdre direct; compte tenu de la viscosité finie du fluide et des conditions aux limites, un tel écoulement possède une vorticité ω_x dont la répartition résulte de deux effets antagonistes; la viscosité tend à faire diffuser la vorticité vers l'intérieur du fluide alors que le champ magnétique s'oppose à sa pénétration. Il en résulte une zone de confinement de la vorticité dans deux couches limites voisines des parois et dont l'épaisseur est de l'ordre de :

$$l_H = \frac{1}{B_z}\left(\frac{\rho\nu}{\sigma}\right)^{1/2}$$

Si l est la largeur caractéristique de l'écoulement, le rapport $\frac{l}{l_H} = H$ est appelé *nombre de Hartmann*. Ce type d'écoulement est utilisé dans les pompes électromagnétiques à sodium fondu de l'industrie nucléaire.





◀ *A gauche, figure 30 ; lois de comportement de divers types de liquides réels. A droite, figure 31 ; profil des vitesses de l'écoulement d'un liquide de Bingham ; on remarquera que le cœur de l'écoulement pourrait être remplacé par un corps solide en mouvement de translation à vitesse uniforme.*

Applications de l'hydrodynamique

Écoulements des liquides non newtoniens et rhéologie des suspensions

La rhéologie, d'un point de vue très général, consiste à étudier la déformation de la matière. Elle s'applique, le plus souvent, aux milieux continus intermédiaires entre les liquides non visqueux et les solides indéformables. Elle a notamment pour objectif la connaissance des relations contraintes-déformations (et vitesse de déformation) des milieux à plusieurs phases, telles des solutions de polymères. Pour atteindre cet objectif, on étudie l'écoulement laminaire de tels liquides dans des géométries bien déterminées (écoulement de Couette, écoulements cylindriques...).

La loi de comportement $\left(\tau = \mu \dfrac{dV}{dr}\right)$, écrite précédemment dans l'étude du mouvement laminaire des liquides newtoniens, était utilisée en supposant la viscosité dynamique μ constante, indépendante du champ d'écoulement. En fait, cette hypothèse n'est applicable que dans le cas d'un nombre restreint de liquides (eau, glycérine...). La plupart des liquides à structure moléculaire complexe ont un comportement non newtonien.

En effet, dans le cadre général de cette loi élémentaire (où τ est la contrainte dans la direction de la vitesse $\vec{V}$ et $\dfrac{dV}{dr}$ le taux de cisaillement), il y a lieu de considérer la viscosité dynamique comme une fonction du taux de cisaillement. La *figure* 30 récapitule sur un diagramme la contrainte (τ), la vitesse de déformation $\left(\dfrac{dV}{dr}\right)$, et le comportement des principaux types de liquides (sauf les fluides appelés visco-élastiques ou thixotropes dont la viscosité dynamique dépend du temps).

Suivant la nature des interactions moléculaires (tendance à l'orientation des molécules dans le sens de l'écoulement pour les pseudo-plastiques, présence d'une contrainte seuil au-delà de laquelle disparaît une structure fortement rigide pour les viscoplastiques) ou suivant la structure des particules en suspension (effets de frottements solides des particules fortement concentrées dans le cas des dilatants), la viscosité varie en fonction de la vitesse de cisaillement. Il est à noter aussi que certains liquides de nature complexe (sang par exemple) présentent simultanément un comportement pseudo-plastique, viscoplastique et thixotrope.

La loi la plus simple rencontrée dans le cas des liquides viscoplastiques est celle du fluide de Bingham dont le comportement est newtonien (viscosité μ_0) au-delà d'une contrainte seuil τ_0, de telle sorte que la relation de comportement s'écrit :

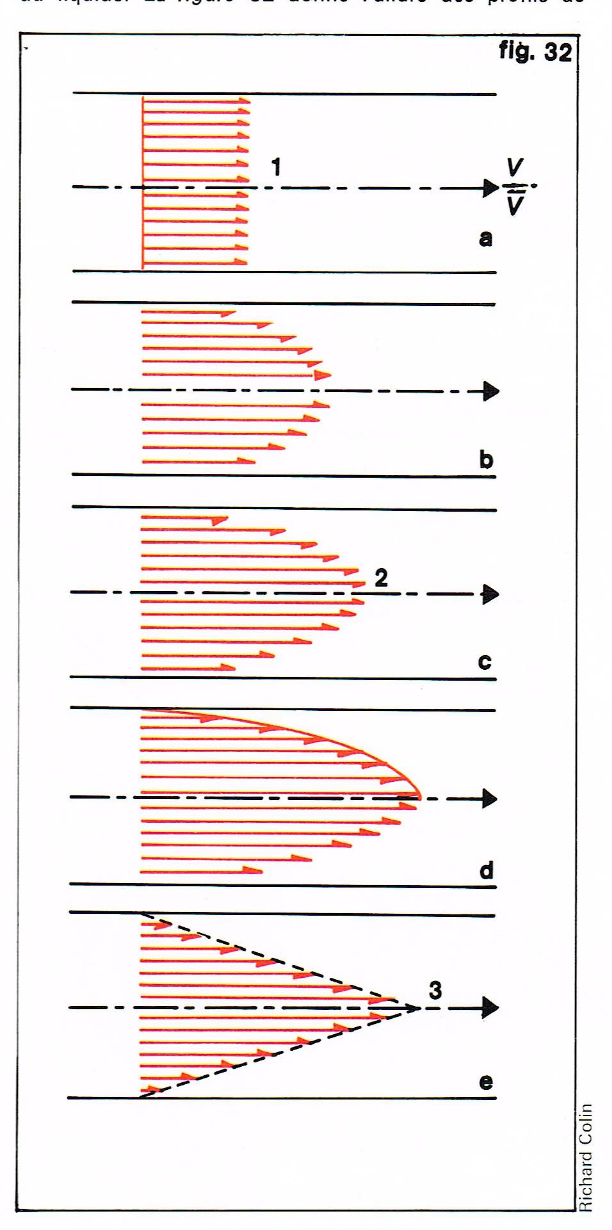
$$\tau = \tau_0 + \mu_0 \frac{dV}{dr}$$

La *figure* 31 montre que, pour l'écoulement laminaire dans une conduite cylindrique d'un tel liquide, la vitesse est constante au cœur de l'écoulement (pour $r < r_0$, $\tau < \tau_0$, d'où $\left.\dfrac{dV}{dr} = 0\right)$ et présente un profil parabolique (caractéristique d'un fluide newtonien) à l'extérieur de cette zone.

En première approximation, on pourra écrire la loi du comportement des autres fluides non newtoniens sous la forme :

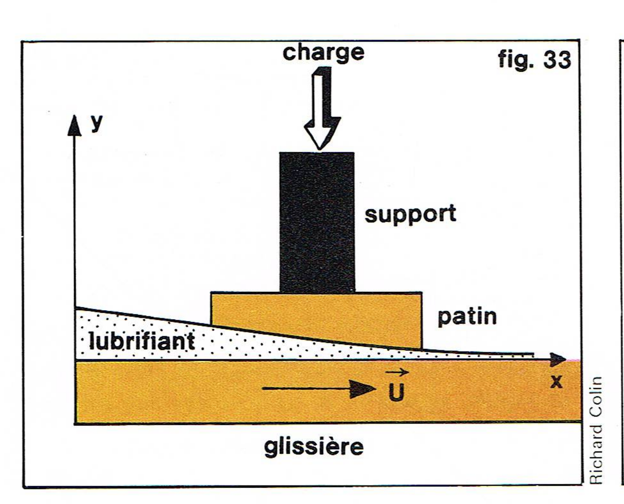
$$\tau = \mathrm{K}\left(\frac{dV}{dr}\right)^n$$

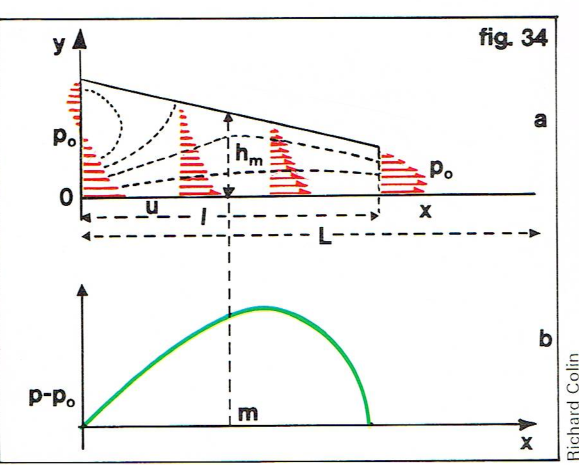
où K et l'indice du comportement fluide n sont des constantes qui ne sont fonction que de l'état thermodynamique du liquide. La *figure* 32 donne l'allure des profils de



◀ *Figure 32 ; profil des vitesses d'écoulements laminaires des fluides non newtoniens en conduite cylindrique* $\tau = K\left(\dfrac{dV}{dr}\right)^n$ *:*
a, K = 0 non visqueux ;
b, n < 1 pseudo-
c, n = 1 newtonien ;
d, n > 1 dilatant ;
e, n = ∞ cas limite du dilatant.

▶ *A gauche, figure 33 ; film de lubrifiant séparant le patin de la glissière : quand cette mince couche est poussée dans l'interface par le mouvement de la surface de la glissière, la résistance du fluide à l'écoulement a pour effet le développement d'une haute pression dans le fluide qui contrebalance la pression due à la force transmise par le support. A droite, figure 34 ; écoulement dans un coin d'huile : a, répartition des lignes de courant et des vitesses ; b, répartition des pressions.*





vitesses obtenus pour différentes lois de comportement. On remarquera que, pour le liquide newtonien, la vitesse maximale V_{max} est égale au double de la vitesse débitante $\overline{V}$, alors que, dans le cas des pseudo-plastiques et des dilatants, les vitesses maximales sont respectivement inférieures et supérieures à celle du liquide newtonien.

Lubrification hydrodynamique

La réalisation de grandes unités mécaniques modernes, telles que les grandes turbines à axe vertical, n'a été rendue possible que grâce au graissage hydrodynamique, les solutions classiques utilisant des roulements à billes ou à aiguilles ne pouvant convenir dès que la charge est trop forte.

Dans les roulements les plus anciens et encore les plus répandus, qui utilisent ce type de graissage, un arbre tourne dans un coussinet. Le faible frottement entre ces deux pièces en mouvement relatif l'une par rapport à l'autre est assuré par l'écoulement d'un liquide visqueux (huile, graisse) entre les deux parois quasi parallèles.

En fait, la forte pression régnant à l'intérieur du lubrifiant, et que l'on observe dès que l'arbre est en mouvement, est engendrée par le mouvement du liquide lui-même. Elle est due au fait que ce liquide visqueux est forcé de passer par l'étroit passage entre l'arbre et le coussinet. Ce phénomène apparaît aussi dans le mouvement du fluide assurant le fonctionnement d'un patin sur glissière (*fig.* 33). Dans ce cas, la pression est la même aux deux extrémités du patin, et est égale, par exemple, à la pression atmosphérique P_0.

L'étude d'un tel phénomène est due à Reynolds, pionnier de l'hydrodynamique, qui remarqua que, dans ce type d'écoulement quasi rectiligne, les forces d'inertie peuvent être négligées. La distribution de la vitesse et de la pression résultantes est alors le résultat du bilan des seules forces de viscosité et de pression à l'intérieur de l'écoulement. En supposant la dimension des plaques dans la direction perpendiculaire au plan de la figure suffisamment grande, et l'angle du dièdre qu'elles forment suffisamment petit, on peut admettre que l'écoulement est longitudinal plan, parallèle à $\vec{u}$ dans la direction $\vec{x}$. L'équation fondamentale de la dynamique des fluides, dans ces conditions, se réduit à :

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dx^2}$$

Si nous nous déplaçons le long de x, nous devons tenir compte d'une variation possible du gradient de pression $\frac{dP}{dx}$, due à la variation d'épaisseur h du film. Toutefois, le débit total du fluide reste constant d'un bout à l'autre du patin. En tenant compte de cette dernière relation et des conditions aux limites sur la pression et les vitesses, énoncées précédemment, on obtient les distributions de pression et de vitesse schématisées sur la *figure* 34.

Un ordre de grandeur de la pression maximale P_m calculée au centre du patin (épaisseur h_m) est :

$$P_m \simeq P_0 + \frac{3}{2} \mu u \frac{l^2}{h_m^2 \ (2\,L - l)}$$

Le rapport $\frac{l}{h_m}$ pouvant être considérable, cette dernière formule montre qu'on peut atteindre de fortes pressions.

Le même raisonnement peut s'appliquer au cas de l'arbre cylindrique qui tourne à l'intérieur d'un coussinet cylindrique de diamètre légèrement plus grand, l'espace intermédiaire étant rempli d'huile. Pour que le graissage s'effectue correctement, il faut que les deux cylindres ne soient pas coaxiaux et qu'on puisse considérer qu'il existe un film d'huile important. Lors de la mise en mouvement, le frottement résulte du contact des matériaux constituant l'arbre et le coussinet, bien qu'une petite quantité de lubrifiant puisse rester dans l'interface. C'est ce qui explique les grands efforts qu'il faut parfois mettre en jeu pour faire démarrer certains mécanismes.

La lubrification hydrodynamique n'apparaît que lorsqu'un film entier s'est développé et sépare complètement les surfaces en mouvement relatif. Au début du mouvement, par l'intermédiaire du coin d'huile entraîné, une pression croissante s'exerce sur la surface du coussinet. Dans cette phase transitoire, l'axe de rotation de l'arbre se déplace, ainsi que la position du minimum d'épaisseur, sur la circonférence du coussinet (*fig.* 35).

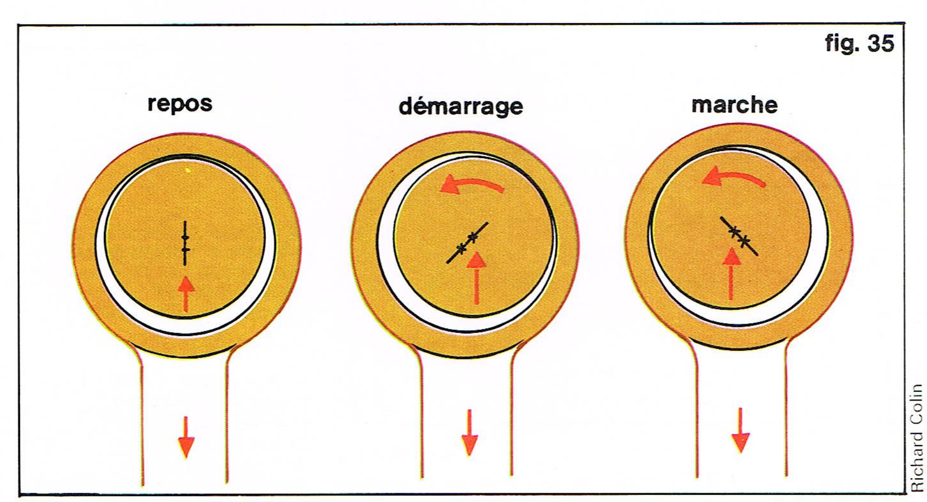
Bien que les principes de fonctionnement de tels paliers soient connus depuis un siècle, leur technologie évolue encore par la recherche de matériaux plus résistants et de lubrifiants moins dégradables.

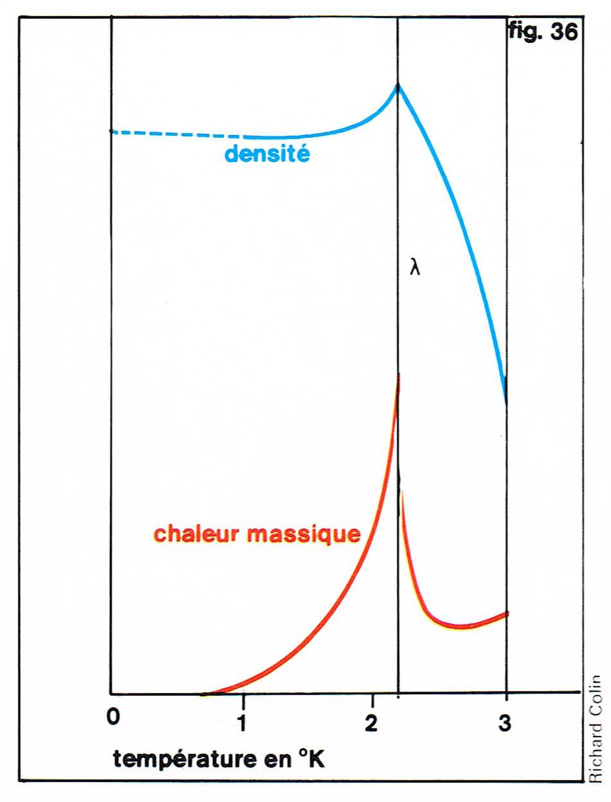
Hydrodynamique des superfluides

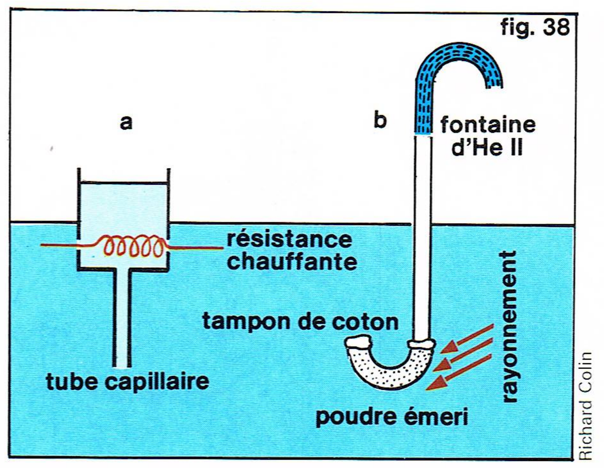
La physique des basses températures doit son existence à l'hélium liquide, réfrigérant qui permet l'étude des phénomènes apparaissant à des températures de quelques °K. En particulier, si la température de l'hélium liquide est abaissée au-dessous de 2,17 °K, ses propriétés physiques telles que densité et chaleur spécifique changent radicalement, comme le montre la *figure* 36.

De même, au-dessous de cette température critique (appelée point λ d'après l'allure de la courbe chaleur spécifique fonction de la température), les propriétés dynamiques du liquide changent brutalement. Le fluide, appelé alors hélium II, peut s'écouler à travers des pores très étroits (inférieurs à 10^{-4} cm), pratiquement sans opposer

▼ *Figure 35 ; déplacement du film de lubrifiant pendant le démarrage d'un arbre dans son coussinet.*







◄ *A gauche, figure 36; la densité et la chaleur massique de l'hélium liquide présentent un maximum au point λ. A droite, figure 38* a *et* b *: « effet fontaine » dans l'hélium II.*

de résistance. De plus, au-dessous du point λ, l'hélium liquide possède la propriété particulièrement gênante de s'échapper du récipient qui le contient par les fuites les plus petites ou par écoulement pelliculaire le long des bords internes, puis externes d'un vase dewar (*fig.* 37). D'où la qualification « superfluide » appliquée à l'He II dans cette zone de température où ce liquide se comporte comme un fluide parfait. Cependant, un phénomène contradictoire apparaît si l'on regarde le comportement d'un disque oscillant immergé dans l'hélium II : l'amortissement du mouvement conduit à conclure que sa viscosité a une valeur finie.

Ce comportement anormal se manifeste également si l'on examine les flux de masse et de chaleur qui s'effectuent dans des directions opposées. On peut l'observer, par exemple, dans l' « effet fontaine » obtenu à l'aide d'un tube capillaire dont l'extrémité supérieure est reliée à la base d'un petit récipient. L'ensemble est partiellement plongé dans un bain d'He liquide (*fig.* 38a). Si, par l'intermédiaire d'une résistance chauffante, on fournit de l'énergie à l'hélium contenu dans le petit récipient, son niveau s'élève beaucoup plus haut que l'on ne pourrait le prévoir en faisant appel à de simples effets de dilatation.

Un phénomène encore plus spectaculaire est obtenu dans le cas d'une microfuite chauffée par rayonnement et constituée par un tube rempli de poudre émeri maintenue à chaque extrémité par un tampon de coton (*fig.* 38b). On peut faire l'expérience inverse : un petit dewar dont l'extrémité inférieure ouverte est bouchée par un tampon de coton surmonté de poudre émeri est plongé dans un bain d'He II (*fig.* 39). Lorsqu'on plonge le dewar, l'hélium pénètre à l'intérieur à travers le tampon, et on observe une baisse de température; si l'on soulève le dewar, l'hélium s'écoule, et l'on observe, au contraire, une hausse de température.

Ces expériences ont été interprétées en termes d'une théorie phénoménologique fondée sur le concept d'hydrodynamique à deux fluides : l'hélium II serait constitué d'un mélange de deux liquides, le superfluide et le fluide normal qui se meuvent à des vitesses différentes et sans interactions mutuelles. La proportion relative des deux composants dépend de la température, comme le montre la *figure* 40. Le superfluide s'écoule sans frottements et ne transporte aucune entropie; le fluide normal est soumis à des tensions visqueuses et, par conséquent, se comporte comme un liquide ordinaire. On peut ainsi interpréter les expériences mentionnées ci-dessus en postulant que seul passe à travers les pores de faibles diamètres le superfluide.

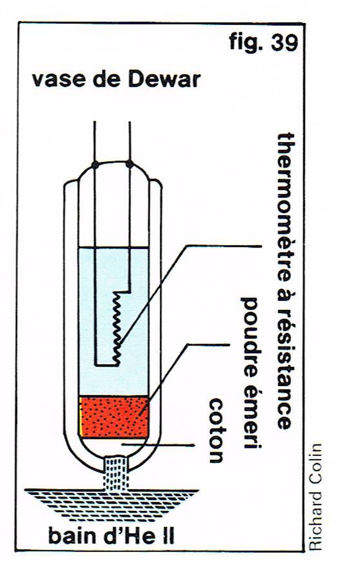
D'un point de vue microscopique, l'hélium superfluide est un liquide quantique, c'est-à-dire qu'il est nécessaire pour décrire son mouvement à l'échelle atomique d'utiliser l'équation de Schrödinger (et non pas la loi classique de Newton). Il en résulte pour le comportement macroscopique du fluide, et en particulier pour le champ de vitesse $\vec{V}_s$ associé à son mouvement, une propriété importante :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V}_s = 0$$

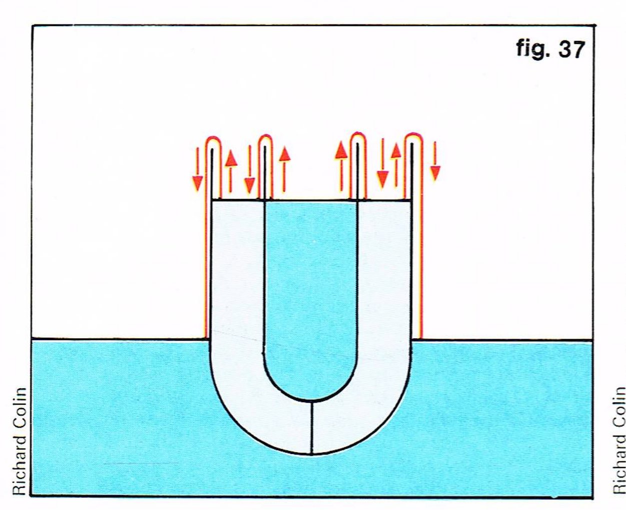
à laquelle il faut associer une quantification de la circulation de la vitesse :

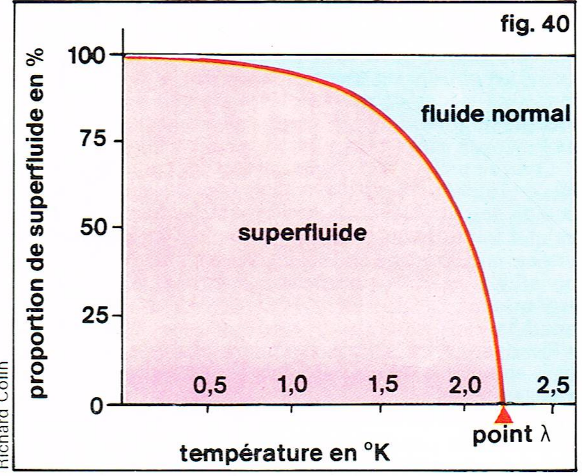
$$\oint \vec{V}_s \cdot d\vec{l} = n \frac{h}{m}$$

où m est la masse de l'atome d'hélium et h la constante de Planck.



▲ *Figure 39; phénomène mécano-thermique inverse de l'effet fontaine.*





◄ *A gauche, figure 37; transfert pelliculaire sans frottement dans l'hélium II. A droite, figure 40; modèle des deux fluides.*



Michelangelo Durazzo - Magnum

▲ ***Visualisation d'un vortex ou tourbillon**, qui prend naissance à la surface libre d'un fluide en écoulement sous l'action de la gravité. Un tel écoulement est irrotationnel dans tout l'espace, sauf en quelques points singuliers formant des tubes tourbillons verticaux distincts.*

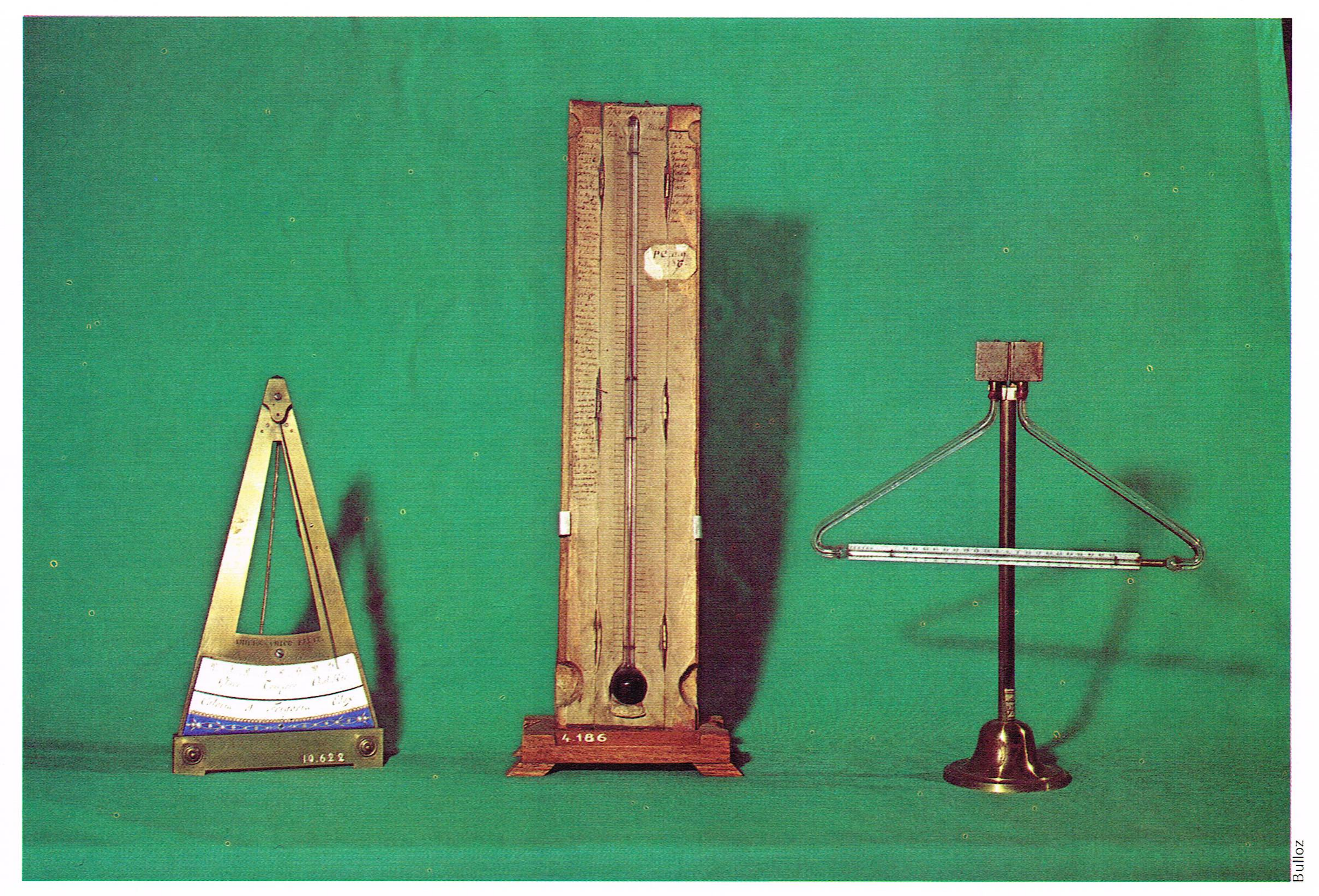
Différentes expériences ont été faites pour mettre en évidence cette propriété du champ de vitesse ainsi que la persistance des écoulements du liquide superfluide analogue aux courants électriques dans un supraconducteur. Cette quantification de la circulation a été observée en mesurant la force qui s'exerce sur un fil vibrant dans le liquide superfluide, fil autour duquel une circulation du liquide est établie. La force de Magnus qui s'exerce sur le fil en mouvement se traduit par un changement du plan de vibration du fil, variation mesurée par l'induction électrique induite dans ce fil qui balaye une zone de champ magnétique intense. La valeur de la circulation de vitesse trouvée par cette méthode est quantifiée, et l'on observe des valeurs de n comprises entre — 3 et + 3.

Une autre méthode consiste en la mesure de l'énergie et de la vitesse d'ions chargés d'He II. Le résultat obtenu semble paradoxal en ce sens que, plus l'énergie est grande, moins la vitesse est élevée. Ce comportement inhabituel est exactement celui qui est imposé par la dynamique d'un anneau de tourbillons. Si l'on suppose que les ions sont piégés dans les anneaux de vorticité, les résultats montrent que l'intensité de ces anneaux (circulation de la vitesse qu'ils engendrent) est h/m.

Lorsqu'un vase cylindrique contenant de l'He II est mis en rotation, le mouvement de la partie superfluide du liquide doit être différent du mouvement d'un fluide ordinaire. En effet, le fluide tend vers un mouvement qui maximalise son moment cinétique et satisfait la restriction quantique sur la circulation de la vitesse. On peut alors montrer que le mouvement résultant est celui que créent des lignes de vortex parallèles à l'axe du cylindre, qui s'étendent du fond jusqu'au sommet du vase. Ces lignes sont en nombre fini, et ce nombre est d'autant plus élevé que la vitesse de rotation du vase est grande. On peut montrer aussi qu'au-dessous d'une vitesse angulaire critique, il n'y a pas de ligne de vortex, et qu'ainsi le superfluide est immobile. Cette transition de phase quantique a été observée en mesurant le courant d'électrons capturé par les lignes de vorticité.

BIBLIOGRAPHIE

BINDER, C., *Fluids Mechanics,* Prentice Hall Inc. - BRUN, MARTINOT, LAGARDE et MATHIEU, *Mécanique des fluides,* t. I, II, III, Dunod, 1968. - CHIRGWIN B. H. and PLUMPTON C., *Elementary Classical Hydrodynamics,* The Commonwealth and International Library. - COMOLET R., *Mécanique expérimentale des fluides,* t. I : *Statique et dynamique des fluides non visqueux,* t. II : *Dynamique des fluides réels, Turbomachines,* t. III (avec BONNIN J.) : *Recueil de problèmes,* Masson, 1969. - DAUGHERLY and FRANZINI, *Fluid Mechanics with Engineering Applications,* International Student Edition, Mc Graw Hill. - DOWDELL R. B., *Flow, Its Measurements and Control in Science and Industry,* vol.1, part 1, 2, 3, Instrument Society of America. - GERMAIN P., *Mécanique des milieux continus,* Masson, 1962. - LACHNITT J., *la Mécanique des fluides,* Que sais-je ? P.U.F. n° 1054. - *L'Aérodynamique,* Que sais-je ? P.U.F. n° 752. - LAMB Sir Horace, *Hydrodynamics,* Cambridge University Press. - LANDAU L. et LIFSCHITZ E., *Mécanique des fluides,* Éditions de Moscou. - PRANDTL and TIENTJENS, t. I : *Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics,* t. II : *Applied Hydro- and Aeromechanics,* Dover Publications Inc., New York. - TENNEKES and LUMLEY J. L., *A First Course in Turbulence,* The Mit Press. - VENNARD J. K., *Elementary Fluid Mechanics,* John Willey ans Sons Inc., 4th edition. - VON MISES R., FRIEDRICHS K. O., *Applied Mathematical Sciences,* t. V : *Fluid Dynamics,* Springer-Verlag, New York Inc. - ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS. - ENCYCLOPÉDIE INTERNATIONALE des SCIENCES et des TECHNIQUES, Groupe des Presses de la Cité.



Bulloz

▲ ***Quelques types de thermomètres anciens ; de gauche à droite : un thermomètre bimétallique ; un thermomètre à alcool ; un thermomètre différentiel (dû au physicien écossais J. Leslie).***

THERMOMÉTRIE ET THERMODYNAMIQUE

THERMOMÉTRIE

Transformations thermiques

Les transformations thermiques mettent en jeu des variations de température ou des échanges de chaleur. Leur étude fait intervenir, en plus de connaissances acquises en mécanique, des notions fondamentales que nous allons chercher à expliciter.

Température et équilibre thermique

Une première notion de température nous est donnée par le sens du toucher qui permet d'apprécier, jusqu'à un certain point, si un corps est plus chaud ou plus froid qu'un autre. Mais cette sensation physiologique est grossière et peut conduire à des erreurs : la même eau tiède paraît chaude à la main qui sort de l'eau froide et froide à la main qui sort de l'eau chaude.

Nous savons cependant ce qui se passe quand on place un corps au-dessus d'un foyer. Pendant que le corps s'échauffe, ses propriétés varient : son volume en particulier augmente, sauf rares exceptions. Lorsqu'on éloigne le corps du foyer, il se refroidit et son volume diminue. Nous pourrons donc repérer toute température du corps en la caractérisant par le nombre qui mesure son volume.

D'autre part, l'expérience montre que des corps enfermés dans une enceinte et protégés des actions thermiques extérieures finissent toujours, qu'ils se touchent ou non, par atteindre un état d'*équilibre thermique,* dans lequel leur volume ne varie plus du tout ; par définition, ils sont à la même température. Si l'un d'eux sert à repérer les températures par les valeurs que prend son volume, c'est un thermomètre.

Repérage des températures et échelles thermométriques

La température attribuée à un corps à un instant donné ne doit pas dépendre du thermomètre utilisé. Repérer cette température par le volume d'un corps arbitrairement choisi n'est pas satisfaisant. Mais l'expérience montre qu'un certain nombre de phénomènes physiques, notamment la fusion et l'ébullition d'un corps pur sous une pression donnée, se produisent toujours à une température invariable : l'indication d'un thermomètre est toujours la même lorsqu'il est en équilibre thermique avec un mélange quelconque d'eau pure et de glace, par exemple.

On dispose ainsi de *points fixes* ou *repères thermométriques* dont on peut conventionnellement numéroter les températures en degrés. Le thermomètre se présente alors comme un instrument de comparaison des divers points fixes, permettant en outre d'évaluer par « interpolation » les températures intermédiaires entre celles des points fixes et éventuellement, par « extrapolation », les températures plus basses ou plus élevées.

L'échelle thermométrique normale ou Celsius, légale en France, est basée sur l'emploi de deux points fixes fondamentaux : le point de fusion de la glace et le point d'ébullition de l'eau, sous la pression atmosphérique normale, points dont les températures sont appelées respectivement 0 °C et 100 °C. La grandeur thermométrique utilisée est la pression d'une masse de gaz parfait maintenue à volume constant. (Le gaz parfait est un gaz idéal sur les propriétés duquel nous reviendrons.) La détermination des variations de pression d'un gaz à volume constant est plus facile que celle des variations de volume à pression constante, ce qui explique le choix de la grandeur thermométrique.

Si P_0, P_{100} et P sont les valeurs de cette pression à 0°, 100° et t°, l'équation thermométrique est donc :

$$\frac{t}{100} = \frac{P - P_0}{P_{100} - P_0}$$

ou

$$P = P_0 (1 + \beta t)$$

et la température est donnée par : $t = \dfrac{P - P_0}{\beta P_0}$, le coefficient thermométrique étant : $\beta = \dfrac{P_{100} - P_0}{100\, P_0}$

Sa valeur, pour un gaz parfait, est $\beta = \dfrac{1}{273{,}16}$

Le thermomètre à hydrogène fournit des indications très légèrement différentes (sauf naturellement à 0 °C et à 100 °C) de celles que donnerait un gaz parfait ; mais il est possible de déduire d'une étude des propriétés de l'hydrogène la correction qu'il faut ajouter à ces indications pour obtenir la température normale. Cette correction est très faible aux températures usuelles (— 0,003 °C au maximum entre 0 et 100 °C ; + 0,016 °C à 200 °C).

L'emploi du thermomètre à gaz pour la définition de l'échelle normale est justifié par la possibilité de reproduire celle-ci avec certitude (moyennant les corrections dont nous venons de parler) et surtout par la facilité de passage de la température « Celsius » t à la température « thermodynamique » de lord Kelvin, qui a l'intérêt de ne pas dépendre du choix arbitraire d'un corps thermométrique. Cette dernière température est identique à la température absolue.

$$T = t + \frac{1}{\beta} = t + 273{,}16,$$

déduite de la température Celsius par un simple changement d'origine.

Pour éviter toute confusion, on est convenu de faire suivre l'indication d'une température du symbole °C (initiale de Celsius) ou °K (initiale de Kelvin), selon qu'elle est exprimée dans l'échelle normale ordinaire ou dans l'échelle thermodynamique ; le point d'ébullition de l'eau sous la pression atmosphérique normale, par exemple, s'écrit donc : t = 100 °C ou T = 373,16 °K.

On utilise encore, en Grande-Bretagne et aux États-Unis, l'échelle Fahrenheit, dans laquelle le point de fusion de la glace est numéroté 32 ° et le point d'ébullition normal de l'eau 212 °.

D'où entre les valeurs t (échelle Celsius) et t_F (échelle Fahrenheit) d'une même température, la relation :

$$\frac{t_F - 32}{t} = \frac{212 - 32}{100} \quad \text{d'où : } t_F = 32 + 1{,}8\, t$$

$$\text{et } t = \frac{t_F - 32}{1{,}8}$$

Quant à l'échelle Réaumur, correspondant à des températures $t_R = 0{,}8\, t$, elle est complètement abandonnée.

Thermomètres usuels

Le thermomètre normal à gaz est encombrant et ne se prête pas à des mesures faciles. Aussi utilise-t-on habituellement des thermomètres beaucoup plus commodes, la grandeur mesurée x pouvant être, selon le cas : le volume (apparent) d'un liquide (mercure, alcool...) dans une enveloppe transparente, la déformation d'une enveloppe solide pleine d'un liquide convenable, la longueur d'un solide, la pression d'une vapeur saturante, la résistance électrique d'un fil métallique, la force électromotrice d'un « couple » de deux conducteurs, la lumière émise par un corps incandescent, etc.

Une relation empirique ou reposant sur des bases théoriques peut être utilisée pour définir, en fonction de x, une température apparente t' (ou T') indiquée par le thermomètre considéré. Cette relation peut être linéaire (cas du thermomètre à mercure), ou plus compliquée ; elle est choisie telle qu'aux deux points fixes fondamentaux, et parfois en outre à certains autres, t' (ou T') se confonde avec la température normale t (ou avec la température thermodynamique T).

Une comparaison directe ou indirecte avec un thermomètre normal permet d'effectuer, au besoin, les corrections $t - t'$ ou T — T' à apporter aux indications du thermomètre employé.

Ce n'est qu'après avoir étudié la *dilatation des solides, des liquides et des gaz* que nous pourrons décrire en détail les thermomètres à dilatation, et surtout discuter leurs conditions d'emploi ; cette étude préliminaire nécessite elle-même un thermomètre, mais il n'y a pas là de cercle vicieux : la définition des températures donnée ci-dessus permet en effet de les déterminer, d'abord assez grossièrement, puis en se fondant sur les résultats des premières études, avec une précision de plus en plus satisfaisante.

Dilatation thermique des corps

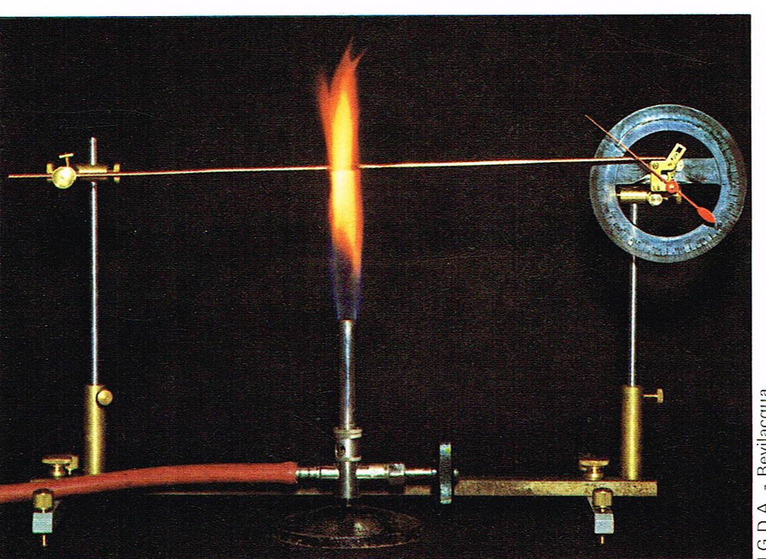
Dilatation linéaire des solides

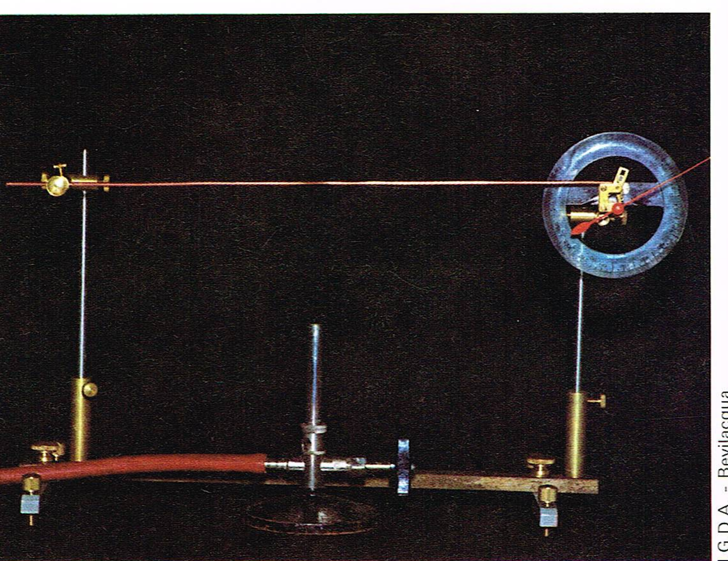
Sauf dans des cas exceptionnels, les solides augmentent de dimensions linéaires lorsqu'on les chauffe. Cette dilatation relativement petite s'observe mieux en l'amplifiant. Prenons l'exemple d'une tige métallique chauffée par un bec Bunsen : l'une des extrémités est fixe, l'autre s'appuie sur le plus petit bras d'un levier. Quand on chauffe la tige, l'extrémité du grand bras se déplace d'une quantité très appréciable, l'amplification obtenue pouvant atteindre facilement 50.

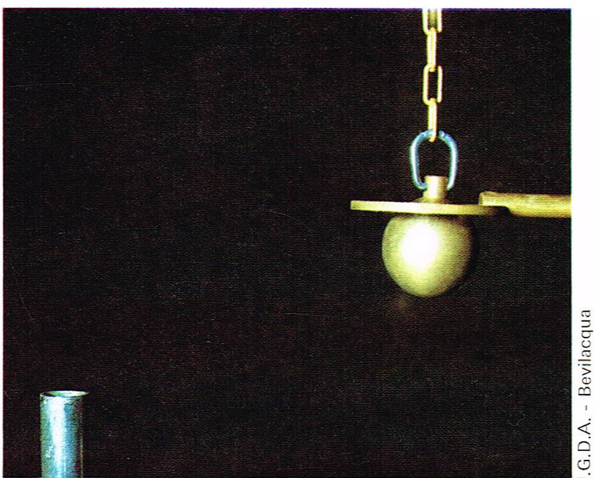
Donnons un autre exemple : une tige de verre se brise quand on la chauffe sans précaution dans une flamme ou quand, l'ayant chauffée sans la briser, on la refroidit brusquement en la trempant dans de l'eau froide. Cela tient au fait que le verre, mauvais conducteur de la chaleur, subit des dilatations ou des contractions locales irrégulières, d'où résultent des tensions internes provoquant la rupture.

Un tube de quartz traité de la même façon ne se brise pas, car il se dilate beaucoup moins que le verre et conduit mieux la chaleur.

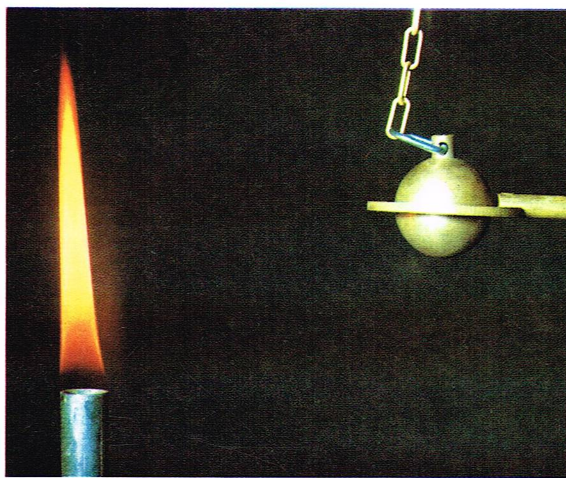
▼ ***Observation de la dilatation linéaire d'un solide.***


I.G.D.A. - Bevilacqua


I.G.D.A. - Bevilacqua



I.G.D.A. - Bevilacqua



I.G.D.A. - Bevilacqua

◀ ***Observation de la dilatation cubique d'un solide.***

L'allongement relatif d'une barre est proportionnel à la variation de température et au coefficient de dilatation linéaire λ, ce qu'on représente par la formule :

$$L_t = L_0 (1 + \lambda t)$$

L_0 et L_t étant respectivement les longueurs aux températures 0 °C et t °C. Les coefficients de dilatation ne sont pas des constantes mais varient avec la température. Ils diminuent quand elle s'abaisse et s'annulent tous au zéro absolu.

— *Dilatation en volume*

Le volume d'un corps à t °C s'exprime en fonction du volume V_0 à la température 0 °C et du *coefficient de dilatation cubique* α par la formule :

$$V = V_0 (1 + \alpha t)$$

Un solide isotrope, c'est-à-dire ayant les mêmes propriétés dans toutes les directions, se dilate en restant semblable à lui-même si sa température est uniforme. La sphère de cuivre passe librement à la température ordinaire dans l'anneau de cuivre. Quand la sphère a été chauffée seule, elle ne passe plus à travers l'anneau, mais, si on échauffe simultanément et également la sphère et l'anneau, le passage s'effectue comme à froid. Cela prouve qu'un solide creux se dilate de la même façon qu'un solide plein de même volume et de même nature.

Le volume V d'un corps isotrope étant proportionnel au cube d'une quelconque de ses dimensions linéaires l, on a :

$$1 + \alpha t = \frac{V}{V_0} = \left(\frac{l}{l_0}\right)^3 =$$

$$(1 + \lambda t)^3 = 1 + 3\lambda t + 3\lambda^2 t^2 + \lambda^3 t^3$$

Pour $t = 100°$, par exemple, λt est de l'ordre du millième, et les termes en $\lambda^2 t^2$ et $\lambda^3 t^3$ sont négligeables vis-à-vis du terme en λt.

Le coefficient de dilatation cubique est donc très sensiblement le triple du coefficient de dilatation linéaire :

$$\alpha \simeq 3\lambda$$

D'autre part, la *masse volumique* $\rho = \dfrac{m}{V}$ ainsi que le *poids volumique* $p = \dfrac{P}{V}$ varient pour un même corps (de masse m et poids P) en raison inverse de V.

Soit ρ_0 et p_0 leurs valeurs à 0°, ρ et p leurs valeurs à t, on a, d'après ce qui précède :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \alpha t} \qquad p = \frac{p_0}{1 + \alpha t}$$

— *Dilatation en surface*

Un raisonnement analogue au précédent montre que la surface (ou une section) S d'un corps isotrope se dilate suivant la loi :

$$S = S_0 (1 + 2\lambda t)$$

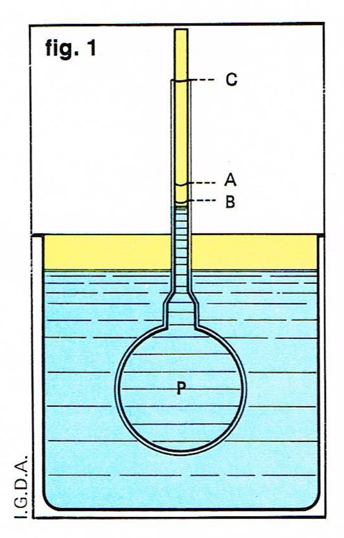
— *Conséquences de la dilatation des solides*

Nous n'en rappellerons que quelques-unes. Il faut rendre possibles les variations de longueur des rails de chemin de fer, des ouvrages métalliques (ponts), des canalisations

▼ ***Conséquence de la dilatation des solides : il faut rendre possibles les variations de longueur des rails de chemin de fer.***



P. Guis - Rapho



▲ *Figure 1 ; représentation schématique de l'expérience sur la dilatation d'un liquide contenu dans un ballon de verre.*

de chauffage, etc., pour éviter les ruptures quand la température varie. (Les forces nécessaires pour s'opposer aux dilatations thermiques seraient en effet considérables : 2 400 kg environ par cm^2 de section pour une tige de fer.)

Inversement, en procédant à chaud au cerclage des roues, on assure à la bande métallique refroidie une forte adhérence avec le pourtour de la roue ; le *rivetage* se fait également à chaud pour les mêmes raisons.

Pour réaliser des *soudures métal-verre* dont l'adhérence ne soit pas détruite par les variations de température ultérieures, il faut que les deux corps aient des coefficients de dilatation assez voisins : c'est ce qui arrive notamment pour le verre ordinaire et le platine ou la platinite — ou pour le verre Pyrex et le tungstène.

Les *ampèremètres thermiques* font intervenir la dilatation d'un fil fin, parcouru par le courant ou par une fraction connue du courant à mesurer ; cette dilatation, convenablement amplifiée, est transmise à une aiguille se déplaçant devant un cadran.

Notons enfin que, dans les mesures de précision, on a besoin de connaître le coefficient de dilatation d'une règle divisée pour *corriger les lectures* que l'on fait avec elle. Supposons que la règle ait été graduée en cm à 0 °C et que nous lisions qu'une certaine longueur, mesurée à la température t, est égale à n divisions ; si λ est le coefficient de dilatation de la règle, la longueur mesurée a en réalité pour valeur, en cm : $n\ (1 + \lambda t)$.

Dilatation des liquides

Un ballon plein d'un liquide est plongé dans l'eau chaude (voir la *figure* 1). Le niveau du liquide baisse d'abord un peu dans le tube, puis il remonte rapidement et s'établit au-dessus du niveau primitif.

La contraction apparente AB du début est due à la dilatation du ballon lui-même, qui précède celle du liquide, car le ballon est le premier chauffé par l'eau ; la dilatation du liquide qui se produit ensuite est plus grande que celle du ballon, puisque le niveau monte au total de A en C.

Le volume V d'un liquide à t °C s'exprime en fonction du volume V_0 à 0 °C par la formule :

$$V = V_0\ (1 + \alpha t)$$

α est un coefficient de dilatation *vrai*, somme du coefficient de dilatation *apparent* et du coefficient de dilatation cubique de l'enveloppe.

Alors que, pour les solides, α dépasse rarement 10^{-5}/degré, pour les liquides, habituellement beaucoup plus dilatables, α est de l'ordre de 10^{-3}/degré. L'eau présente un cas particulier, celui de se dilater d'une façon anormale : de 0 à 4 °C, son volume spécifique diminue, et au-dessus de 4 °C, il augmente. Le volume spécifique passe donc par un minimum à 4 °C, et, par suite, l'eau présente à cette température un maximum de densité.

L'éprouvette de Hope (*fig.* 2) est entourée d'un manchon dans sa partie moyenne, et les thermomètres T_1 et T_2 donnent la température de l'eau contenue dans l'éprouvette au-dessus et au-dessous du manchon. On met dans le manchon un mélange réfrigérant (M) fait avec de la glace et du chlorure de sodium. Le thermomètre T_1 reste d'abord presque invariable tandis que T_2 baisse rapidement jusqu'à 4 °C et s'arrête à cette température ; à partir de ce moment, le thermomètre T_1 baisse rapidement à son tour. Quand il atteint 4 °C, toute l'eau est à cette température, puis T_1 continue à descendre beaucoup plus vite que T_2. Au début, l'eau, refroidie par M, mais qui n'est pas encore descendue jusqu'à 4 °C, tombe au fond et refroidit T_2, puis l'eau refroidie au-dessous de 4 °C, plus légère, gagne la partie supérieure de l'éprouvette et refroidit T_1.

Un phénomène analogue se produit en hiver dans les lacs profonds : la congélation de l'eau se trouve ainsi retardée. En outre, quand de la glace se forme à la surface, les couches inférieures peuvent rester longtemps à 4 °C.

Parmi les conséquences de la dilatation des liquides et des solides, citons à titre d'exemple les corrections à effectuer dans l'usage des baromètres et manomètres à mercure ; une hauteur h mesurée à t °C correspondrait à 0 °C à une hauteur :

$$h_0 = \frac{h}{1 + \alpha t}$$

Si, d'autre part, la lecture de h est faite avec une règle métallique de coefficient de dilatation linéaire λ, la hauteur h correspond à une lecture

$$h_1 = \frac{h}{1 + \lambda t}$$

D'où :

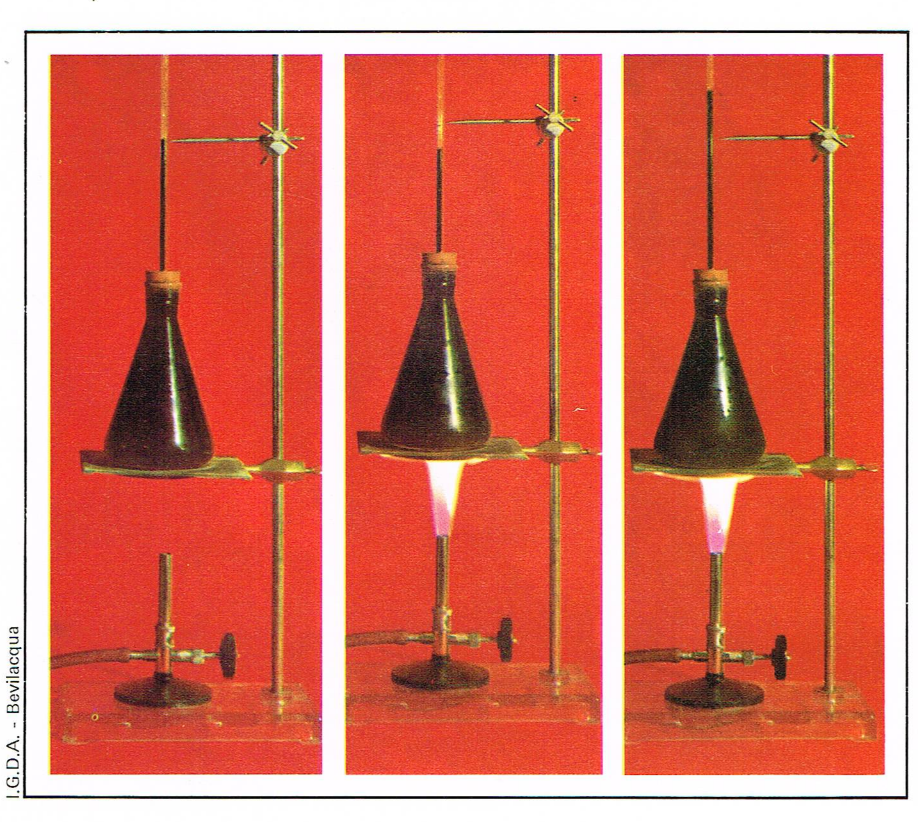
$$h_0 = h_1 \frac{1 + \lambda t}{1 + \alpha t} \simeq h_1\ [1 - (\alpha - \lambda)\ t]$$

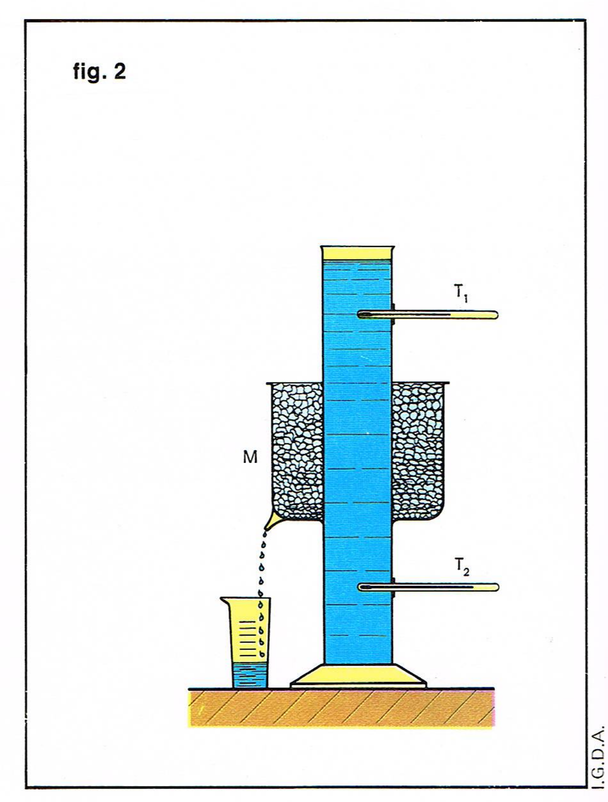
A une température de 20 °C et à la pression atmosphérique normale, $\alpha = 18 \cdot 10^{-5}$/degré pour le mercure et $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$/degré pour le laiton, d'où :

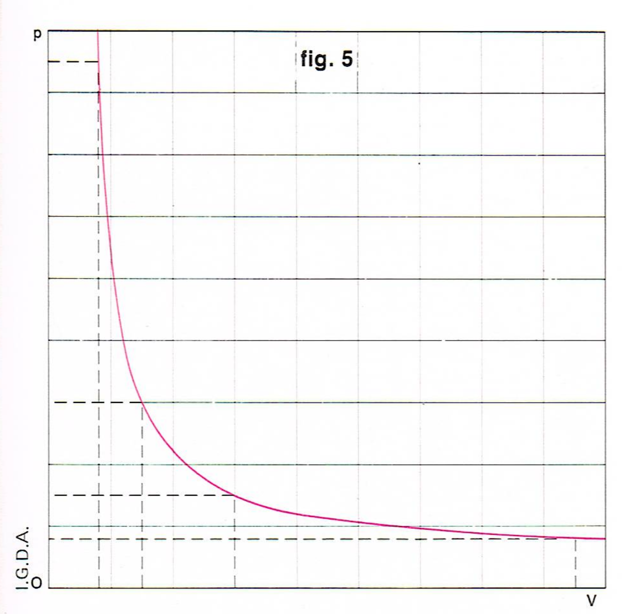
$$h_1 = h_0\ (1 - 3 \cdot 10^{-3})$$

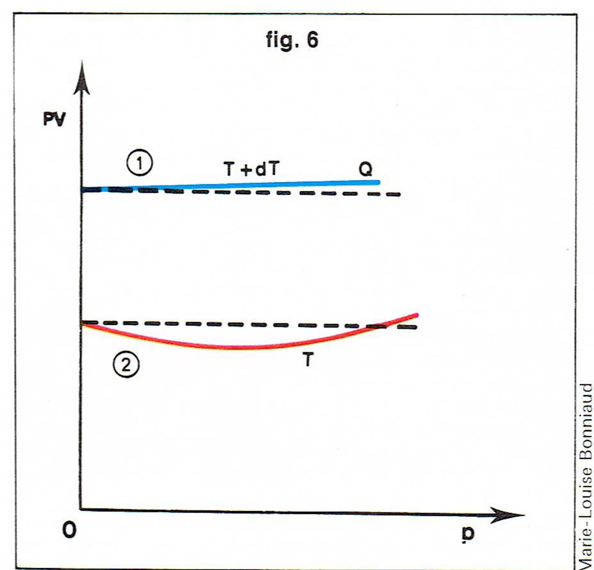
La correction est de l'ordre de 3 millièmes.

▼ *A gauche, dilatation d'un liquide : au début, l'enveloppe de verre se dilate plus que le liquide, le niveau baisse dans le tube (au centre), puis remonte (à droite) et s'établit au-dessus du niveau primitif. A droite, figure 2 ; schéma de l'éprouvette de Hope qui permet de montrer que l'eau se dilate de façon anormale.*



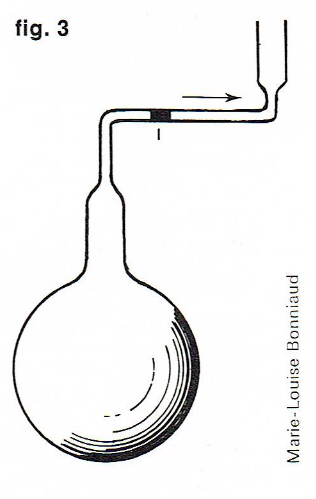




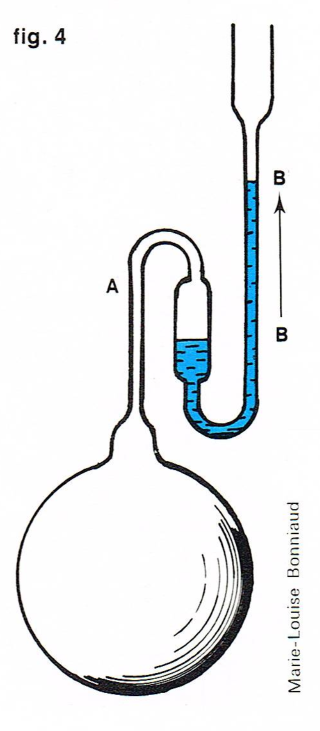


◀ *A gauche, figure 5 ; isotherme d'un gaz parfait ; d'après la loi de Mariotte, c'est une hyperbole équilatère.*
A droite, figure 6 ; isothermes d'Amagat : en pointillé, gaz parfait ; (1), gaz plus compressible qu'un gaz parfait ; (2), gaz moins compressible qu'un gaz parfait.

▼ *Figure 3 ; dilatation d'un gaz à pression constante.*



▼ *Figure 4 ; variation de la pression d'un gaz à volume constant.*



Dilatation des gaz

Les dilatations des solides et des liquides dont nous avons parlé précédemment étaient implicitement supposées produites à *pression constante* par une élévation de température. Les liquides et les gaz étant peu compressibles, une faible variation de pression n'entraîne d'ailleurs que des variations négligeables. En ce qui concerne les gaz, il en est tout autrement, et il est indispensable de préciser les conditions de l'échauffement. On considère ici deux cas simples : échauffement soit à pression constante, soit à volume constant.

Premier cas. L'air du ballon de la *figure* 3 placé à la température ambiante est séparé de l'air atmosphérique par l'index I qui coulisse dans le tube. Quand on pose la main sur le ballon, l'index se déplace vers la droite. Le volume augmente, mais pas la pression, qui est toujours égale à la pression atmosphérique. Les volumes d'air V et V_0 aux températures t °C et 0 °C, respectivement, sont liés par la relation :

$$V = V_0\,(1 + \alpha t)$$

Pour beaucoup de gaz, le coefficient de dilatation est indépendant de la température et vaut comme l'a indiqué Gay-Lussac, en 1802, environ $\frac{1}{273{,}15}$ $d^{\circ -1}$.

Second cas. Prenons maintenant l'exemple d'une variation de pression à volume constant (*fig.* 4) : dans le ballon, l'air est d'abord à la pression atmosphérique, et, dans le tube qui a la forme d'un U, les niveaux en A et B sont d'abord dans le même plan horizontal. Quand on met la main sur le ballon, on fait monter le liquide de B en B' tandis que le niveau A descend très peu, en raison de la plus grande section du tube en ce point. La pression a donc augmenté sans variation notable du volume. Les pressions P et P_0 à t °C et 0 °C, respectivement, sont liées par la relation :

$$P = P_0\,(1 + \beta t)$$

β étant le coefficient de variation de pression à volume constant. Pour la plupart des gaz, β vaut environ $\frac{1}{273}$.

— *Gaz parfaits*

On appelle gaz parfaits ceux qui obéissent à toute température à la loi de Boyle-Mariotte (ou loi de Mariotte tout court) :

Le produit de la pression d'une masse donnée d'un gaz parfait par son volume ne dépend que de la température.

Supposons alors qu'un gaz parfait occupe à 0 °C, sous la pression P_0, le volume V_0 ; à t °C, il occupera le volume $V_0\,(1 + \alpha t)$ à la pression P_0 ou bien le volume V_0 à la pression $P_0\,(1 + \beta t)$.

Les produits de la pression par le volume dans les deux cas sont égaux :

$$P_0V_0\,(1 + \alpha t) = P_0V_0\,(1 + \beta t)$$

Donc $\alpha = \beta$. D'une manière générale, P et V étant la pression et le volume à la température t °C d'une mole de gaz :

$$PV = P_0V_0\,(1 + \beta t) = P_0V_0\beta\left(t + \frac{1}{\beta}\right)$$

En posant :

$$R = P_0V_0\beta$$

et

$$T = t + 273{,}15$$

où R est la *constante des gaz parfaits* et T la *température absolue*, l'*équation caractéristique* des gaz parfaits s'écrit alors :

$$PV = RT$$

La *figure* 5 illustre la loi de Mariotte. On a porté en abscisse le volume d'une masse de gaz, en ordonnée la pression ; pour une température donnée, la courbe, appelée isotherme de Clapeyron, a l'allure d'une hyperbole.

— *Gaz réels*

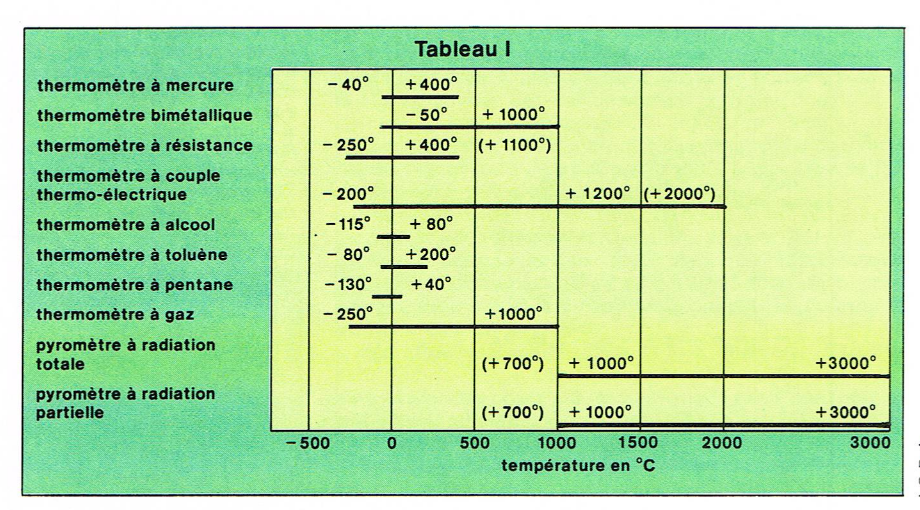
Aucun gaz n'est parfait, et les expériences qui établirent qu'aucun gaz ne suit exactement la loi de Mariotte sont dues à Reynault (1874). Elles montrèrent qu'à la température ordinaire et pour des pressions comprises entre 1 et 15 atmosphères, tous les gaz sont plus compressibles que ne l'indique la loi de Mariotte, sauf l'hydrogène. Cependant, aux faibles pressions, jusqu'à 1 atmosphère environ, les écarts à la loi de Mariotte sont faibles, et on assimile souvent les *gaz réels* aux gaz parfaits.

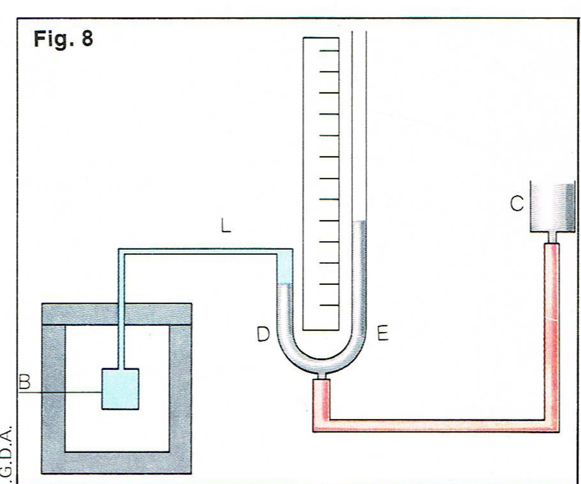
Les résultats de l'étude « thermométrique » d'un gaz peuvent être traduits par des réseaux de courbes *isothermes*, correspondant chacune à une température déterminée. Les isothermes de Clapeyron représentent comme on vient de le voir les variations de la pression en fonction du volume : ce seraient des hyperboles équilatères pour un gaz parfait. Il est souvent plus avantageux de considérer les isothermes d'Amagat, représentant les variations du produit PV en fonction de la pression P : ce seraient des droites d'ordonnées constantes $PV = nRT$ pour un gaz parfait. Elles sont en réalité incurvées, comme l'indique la *figure* 6 : quand la température est assez basse, le produit PV diminue lorsque la pression augmente à partir d'une valeur faible. Le gaz est alors « plus compressible que le gaz parfait », les écarts relatifs étant, lorsqu'on passe de 1 à 2 atmosphères, de l'ordre du millième pour les gaz difficiles à liquéfier, et pouvant dépasser le centième pour les autres.

Toutes ces notions sur la dilatation thermique vont nous être utiles maintenant que nous allons aborder l'étude des principaux types de thermomètres.

Principaux types de thermomètres

Le tableau ci-après (Tab. I) fournit la liste de quelques-uns des thermomètres le plus souvent utilisés, ainsi que les domaines d'utilisation. Il existe des thermomètres très divers convenant chacun plus ou moins bien à tel ou tel usage. Les températures extrêmes mesurables à l'aide d'un type donné d'appareil résultent des propriétés des matériaux utilisés et des lois de variation de la grandeur thermométrique ; les valeurs mises entre parenthèses cor-





▲ *A gauche, tableau I; ce tableau indique les domaines d'utilisation des thermomètres les plus courants. A droite, figure 8; représentation schématique du thermomètre « normal ».*

respondent à des cas exceptionnels. Bien entendu, les limites d'emploi d'un instrument déterminé peuvent être réduites, de façon à augmenter la *sensibilité* de lecture.

Celle-ci peut se définir d'après la variation d'indication observée pour une augmentation donnée de la température, un degré par exemple. Mais l'exactitude des résultats n'est pas conditionnée seulement par la sensibilité; il faut encore que le thermomètre soit assez *fidèle*, c'est-à-dire que les lectures ne soient pas faussées d'une façon excessive par des facteurs fortuits, tels que les échauffements subis antérieurement par l'instrument : nous verrons combien fâcheuse est parfois l'influence des « résidus de dilatation » des solides.

Nous indiquerons plus loin quelques-unes des corrections qu'il faut apporter aux résultats bruts pour tenir compte de certaines causes d'erreur et, en particulier, *rattacher à l'échelle normale* les températures mesurées. Une grave incertitude tient parfois à ce qu'une partie du thermomètre n'est pas située dans l'enceinte dont on veut mesurer la température, ou encore à ce que cette température est modifiée par la présence même de l'instrument, d'où résulte un transfert de chaleur. Il est souvent nécessaire que le thermomètre ait une faible « capacité calorifique » et fournisse rapidement son indication définitive. Enfin, la commodité d'emploi, l'encombrement, la fragilité et le prix des appareils sont des facteurs dont il faut bien tenir compte.

Comme on l'a déjà indiqué, la détermination des températures normales est fondée sur l'emploi des deux *points fixes fondamentaux* 0 et 100 °C (*fig.* 7).

Le *point zéro* est la température d'équilibre entre la glace pure et l'eau pure saturée d'air, sous la pression atmosphérique (les variations courantes de cette dernière sont sans influence appréciable). Si l'on opère soigneusement, dans un vase bien isolé avec de la glace finement divisée, cette température est reproductible à quelques dix-millièmes de degré près.

Le *point cent* est la température d'équilibre entre l'eau liquide pure et sa vapeur, sous la pression atmosphérique normale. Cette température dépend en effet de la pression.

fig. 7

glace

résistances chauffantes

I.G.D.A.

▶ *Figure 7; prise du point « zéro » et du point « cent ».*

Il existe un certain nombre d'autres repères correspondant à des changements d'état d'un certain nombre de corps purs sélectionnés. Tous ces changements d'état doivent se faire sous pression atmosphérique normale.

Thermomètres à dilatation

— *Thermomètre à gaz*

Il existe deux types de thermomètres à gaz : ceux qui sont fondés sur la variation de volume à pression constante dont l'échelle est définie par la relation linéaire $V = V_0 (1 + \alpha t)$, et ceux qui utilisent la variation de pression à volume constant et dont l'échelle est définie par $P = P_0 (1 + \beta t)$.

On décrira ici le fonctionnement du thermomètre « normal », dans lequel on mesure la variation de pression d'un gaz maintenu à volume constant (*fig.* 8).

Le réservoir B contient quelques centaines de cm^3 d'un gaz. Il est réuni par un tube capillaire L au manomètre à mercure DE qui donne la pression P dans B. Le réservoir de mercure C qu'on peut monter ou descendre sert à maintenir constant le volume de gaz de B. De la relation entre la pression et la température ci-dessus, on tire :

$$T\ (°K) = 273{,}15\ \frac{P}{P_0}$$

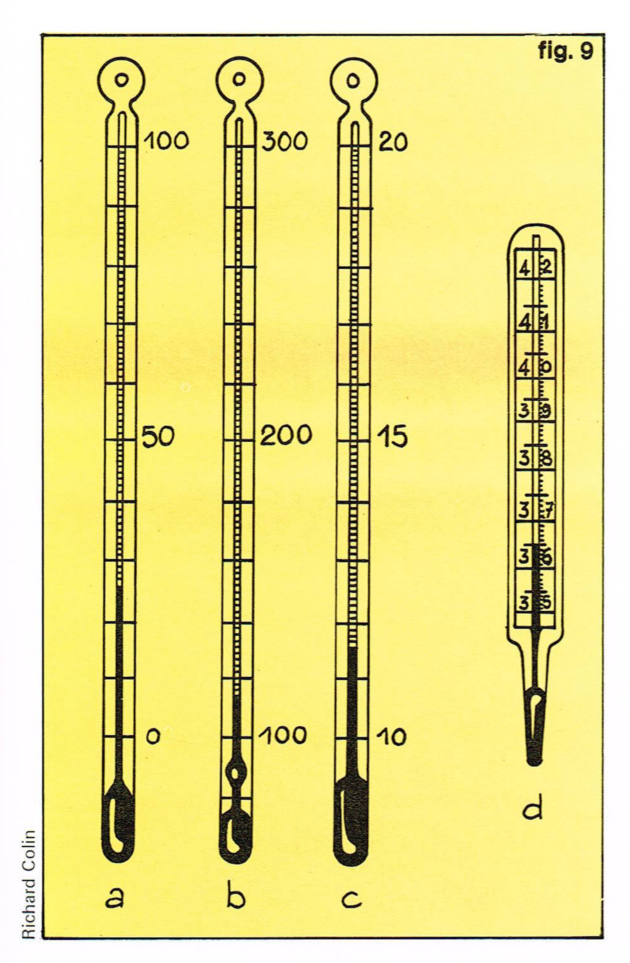
Le thermomètre normal, utilisable entre — 250 °C et 1 000 °C, d'emploi difficile, n'est utilisé que dans quelques laboratoires. Il sert essentiellement à la détermination de repères thermométriques et à l'étalonnage de thermomètres plus commcdes par comparaison des indications des deux appareils dans des enceintes à température uniforme.

— *Thermomètre à mercure*

Ces instruments très connus indiquent la température d'après le volume *apparent* V d'une certaine masse de mercure dans une enveloppe de verre; ils ressemblent à des dilatomètres à liquides. L'enveloppe comporte un réservoir, dont le volume est de l'ordre du cm^3, raccordé à un tube capillaire, appelé tige du thermomètre, dont la section interne a un diamètre de quelques dixièmes de millimètre (*fig.* 9).

La tige et le réservoir sont en verre; le réservoir est à parois minces pour faciliter la mise en équilibre thermique. Le remplissage se fait avec du mercure bien pur et de façon à éviter d'emprisonner de l'air dans l'instrument; la partie de la tige opposée au réservoir est scellée après expulsion de l'air. Elle comporte souvent une petite ampoule permettant la dilatation du mercure au-delà de la température maximale prévue.

La masse du mercure et la longueur de la tige peuvent être telles qu'à 0 et 100 °C le niveau du liquide se trouve dans le capillaire en deux points que l'on marque 0 et 100 sur la tige. Cet intervalle 0-100 est divisé en 100 parties égales et éventuellement prolongé en deçà du point 0 et au-delà du point 100. Cette division en parties d'égale longueur équivaut, si la section du tube est partout la même, à une division en parties d'égal volume. Le coefficient k de dilatation apparente du mercure dans le verre, quelque peu variable selon le verre employé, est voisin de $\frac{1}{6\,400}$, c'est-à-dire que l'augmentation du volume V cor-



◄ *Figure 9; quelques thermomètres à mercure.*

respondant à un échauffement de 1° est 6 400 fois plus petite que le volume apparent V_0 du mercure à 0°.

La graduation étant tracée sur la partie externe de la tige, les lectures doivent être faites de façon que le rayon visuel soit normal à l'axe du thermomètre, pour éviter les « erreurs de parallaxe » ; on s'aide au besoin d'une loupe ou d'un viseur (grossissement 5 à 10). L'écart entre deux traits de la graduation est habituellement de l'ordre du millimètre ou du demi-millimètre, ce qui peut correspondre, selon les instruments, à un ou plusieurs degrés, dixièmes ou centièmes de degré. La longueur totale de la tige, généralement comprise entre 10 et 20 cm, détermine un domaine de mesures d'autant plus réduit que la longueur du degré est plus grande.

Si l'on ne désire pas que ce domaine de mesures comprenne les points 0 et 100 °C (cas des thermomètres pour la météorologie, la calorimétrie, la cryoscopie...), l'instrument est gradué par comparaison avec un autre, étalonné aux points fondamentaux. On peut aussi introduire dans la tige de petits réservoirs auxiliaires de volume convenable, connu en fonction de celui qui correspond à un degré, de façon à permettre les lectures à 0 et à 100 °C, ainsi que dans le domaine d'emploi désiré.

On ne peut naturellement pas dépasser le point de ramollissement du verre (500 °C, jusqu'à 600 pour certains verres). D'ailleurs, en ce qui concerne les thermomètres destinés à mesurer des températures dépassant 300 °C, on doit éviter la distillation du mercure vers les parties froides de la tige ; on emprisonne à cet effet dans la partie de la tige habituellement vide un gaz n'agissant pas sur le mercure (azote).

La limite inférieure d'emploi des thermomètres à mercure est le point de congélation de ce métal : — 38 °C.

Un autre cas où l'échelle est très réduite est celui des *thermomètres médicaux,* gradués en dixièmes de degré (*fig.* 9d), sur quelques degrés de part et d'autre de 37 °C. Ce sont des thermomètres *à maximum :* leur tube capillaire est rétréci et contourné un peu au-dessus du réservoir, ce qui empêche le mercure de redescendre de lui-même après qu'il a atteint le niveau le plus élevé : la colonne liquide se brise au refroidissement. Il faut secouer l'appareil pour ramener tout le mercure dans le réservoir.

— *Autres thermomètres à dilatation de liquide*

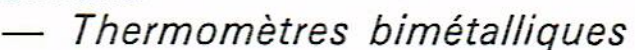
Par raison d'économie, ou encore pour mesurer des températures inférieures à — 38 °C, on utilise des thermomètres constitués comme les précédents, mais avec un autre liquide : alcool (jusqu'à — 80 °C ; on y dissout généralement un colorant), toluène (jusqu'à — 95 °C), pentane (jusqu'à — 200 °C).

Les coefficients de dilatation de ces liquides varient plus en fonction de *t* que celui du mercure : si les thermomètres sont gradués en parties d'égal volume, la correction de rattachement à l'échelle normale peut être très importante.

En outre, ces liquides mouillent le verre (ce que ne fait pas le mercure), et sont très visqueux aux basses températures, ce qui les fait adhérer aux parois. Lorsque le thermomètre vient d'être refroidi, son indication est par suite trop faible (le liquide n'ayant pas pris son niveau définitif), pendant un temps parfois considérable.

Les thermomètres à liquide peuvent être disposés de façon à indiquer indéfiniment, si l'on n'intervient pas, la température la plus élevée ou la plus basse à laquelle ils ont été portés.

Le *thermomètre à maximum et à minimum* (*fig.* 10), le plus employé en météorologie, est un thermomètre à alcool dont la tige capillaire, en forme d'U, contient dans le bas une colonne de mercure AB, au-dessus de laquelle deux index peuvent glisser dans le tube ; ces index sont en fer émaillé et portent un petit fil de verre qui fait ressort contre la paroi du tube et les empêche de glisser sous l'action de leur poids seul. Quand la température augmente, l'index *b* est soulevé ; mais si le mercure revient en arrière, cet index reste immobile dans l'alcool ; il indique donc les maximums. Quand la température diminue, c'est l'index *a* qui est et reste soulevé ; il indique les minimums. On ramène les index au contact du mercure à l'aide d'un aimant.



— *Thermomètres bimétalliques*

On utilise le phénomène de dilatation des solides : une *bilame* est formée de deux lames étroites et minces de métaux de nature différente, soudées à plat l'une contre l'autre. Les métaux choisis ayant des coefficients de dilatation très différents, la bilame s'incurve sous l'effet des changements de température, et la déflexion constatée ne dépend que de cette dernière. Une bilame peut donc être utilisée comme organe sensible d'un thermomètre.

La bilame n'eut longtemps que des emplois limités, car, fabriquée avec des matériaux de dilatabilités peu différentes, comme le fer et le laiton, sa sensibilité était médiocre. Pour y remédier, on remplaçait le laiton par du zinc, mais la mollesse de ce métal engendrait un défaut grave : l'hystérésis. Les bilames sont devenues des appareils sensibles et fidèles avec la mise au point des ferronickels réversibles. Elles peuvent être utilisées de manière continue jusqu'à 450-500 °C. Un bon thermomètre à bilame métallique donne la température avec une précision d'environ ± 1,5 % du maximum de l'échelle.

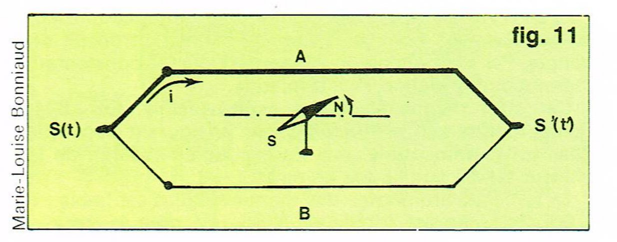
Les bilames se présentent sous diverses formes : bilame droite encastrée à une extrémité, en U, en hélice, en spirale.

▲ *Figure 10 ; thermomètre à maximum et à minimum.*

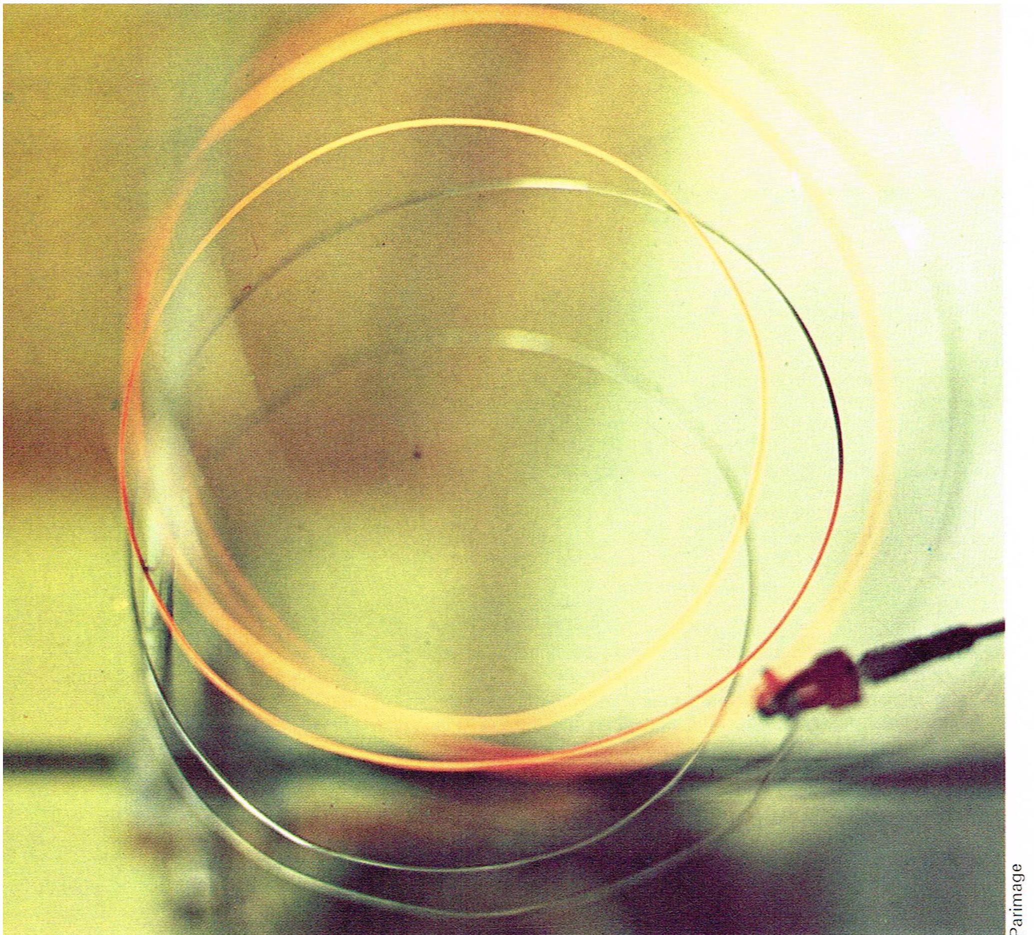
Les thermocouples

— *L'effet thermo-électrique*

Cet effet a été découvert, en 1821, par Seebeck. On peut le décrire de la manière suivante. Soit deux fils A et B, homogènes, de nature différente, soudés à leurs extrémités en S et S', *t* et *t'* étant les températures des soudures. Plaçons le conducteur A parallèlement à une aiguille aimantée N-S en équilibre sous l'action du champ magnétique terrestre. Pour cette expérience fondamentale, Seebeck utilisait une lame de bismuth et une lame d'antimoine. Prenons plus simplement un fil de cuivre associé à un fil de constantan (*fig.* 11). On constate le phénomène suivant :



◄ *Figure 11 ; expérience fondamentale de Seebeck.*



▲ ***Couple thermo-électrique ou* thermocouple.**

— si les soudures S et S′ sont portées à des températures différentes ($t \neq t'$), l'aiguille aimantée tend à se mettre en croix avec le conducteur A ; elle est donc soumise à un champ magnétique supplémentaire créé par un courant d'intensité (i) qui circule dans le circuit AS′BSA ;

— si les soudures S et S′ ont des températures égales, l'aiguille aimantée conserve sa position d'équilibre.

Un courant i circulant dans le circuit quand S et S′ sont à des températures différentes, il existe entre les deux soudures une différence de potentiel (e) qui dépend des températures t et t' ;

— si on recommence les expériences précédentes avec deux fils identiques (A par exemple), on ne décèle aucun courant dans le circuit ;

— si on chauffe A ou B en un point quelconque assez éloigné des soudures pour ne pas en modifier les températures, la déviation de l'aiguille reste constante.

▶ ***Page ci-contre, en haut à gauche, figure 14 : circuit thermo-électrique sans soudure froide ; à droite, figure 13 : circuit thermo-électrique avec soudure froide.***

Ces constatations peuvent se traduire par l'énoncé suivant : *Si les soudures S et S′ de deux métaux différents A et B sont à des températures différentes, il existe entre elles une différence de potentiel qui ne dépend que de la nature des fils et de la température des soudures.*

On peut écrire :

$$e = f\,(A, B, t, t')$$

f étant une fonction inconnue de A, B, t et t'. La valeur de e est indépendante des sections des conducteurs ainsi que des températures intermédiaires entre les deux soudures, à condition toutefois que chacun des conducteurs soit homogène sur toute sa longueur.

Il est facile de mesurer cette différence de potentiel avec un galvanomètre intercalé entre les deux soudures, comme le montre la *figure* 12.

Si R est la résistance totale du circuit et i l'intensité qui le traverse, on a l'égalité :

$$e = R \times i$$

Quand le courant apparaissant à la soudure froide circule de A vers B, on appelle l'ensemble : thermocouple AB, ce qui revient à nommer en premier l'élément positif du couple. Par exemple on dit : thermocouple fer-constantan, thermocouple platine rhodié-platine.

Cet effet thermo-électrique est réversible. En 1834, Peltier montra que, si l'on fait passer un courant électrique dans un thermocouple, une des soudures absorbe de la chaleur tandis que l'autre en émet.

La force électromotrice des thermocouples est faible : à 1 000 °C, elle est inférieure à 50 mV pour le couple chromel-alumel (chromel : alliage nickel chrome ; alumel : alliage aluminium nickel) qui est pourtant, parmi ceux qui sont utilisables à cette température, celui qui possède le plus fort *pouvoir thermo-électrique, c'est-à-dire celui pour lequel la variation de la force électromotrice est la plus grande pour une variation de température de* 1 °C.

— *Jonction de référence* ou *soudure froide*

Si l'on maintient la jonction S′ (t'), appelée « jonction de référence » ou « soudure froide » (quoique les éléments du couple n'y soient généralement pas soudés), à une température constante, $t' = 0$ par exemple, on pourra connaître la température de l'autre jonction, appelée jonction de mesure ou « soudure chaude », en mesurant la différence de potentiel qui existe entre les deux soudures ; des tables numériques fournissent pour un thermocouple donné la relation qui existe entre la force électromotrice développée dans ces conditions et la température de la soudure chaude. Le montage fondamental est celui de la *figure* 13 où la soudure froide est effectivement placée à 0 °C dans de la glace contenue dans un vase de Dewar ; il n'est pratiquement réalisé qu'en laboratoire. La force électromotrice mesurée par le galvanomètre ne dépend pas de l'endroit où il est inséré *tant que les deux bornes de raccordement P et P′ sont isothermes.*

Industriellement, on met souvent à profit cette propriété en faisant coïncider l'ouverture PP′ du circuit avec la soudure froide. Tout se passe comme si le galvanomètre (ou le potentiomètre) était la soudure froide, car une série de soudures isothermes se comporte comme une soudure directe des métaux extrêmes (*fig.* 14).

En général, la liaison entre le thermocouple et l'appareil de mesure est effectuée avec un câble de compensation bifilaire. Les conducteurs du câble doivent avoir les mêmes propriétés électriques que les fils du thermocouple qu'ils remplacent. L'avantage du câble de compensation est qu'il est moins onéreux que les fils du couple et qu'il existe sous différentes formes : câbles avec isolant plastique ou fibre de verre, ou dans une gaine de plomb, par exemple (*fig.* 15).

Mesures des forces électromotrices

Les f. e. m. d'origine thermo-électrique se mesurent par une méthode galvanométrique ou potentiométrique.

— *Méthode galvanométrique*

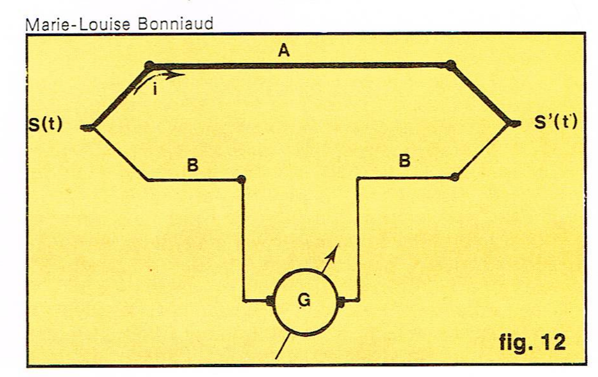
Le galvanomètre le plus couramment utilisé est constitué d'un cadre mobile autour d'un axe vertical (*fig.* 16). Sur ce cadre placé entre les pôles d'un aimant permanent est enroulé un fil fin, conducteur, traversé par le courant électrique à mesurer. Un noyau de fer doux est placé au centre du cadre pour donner aux lignes de force du champ magnétique une direction radiale. L'entrefer entre le noyau et les pôles de l'aimant est de quelques millimètres. Le courant est amené au cadre par deux ressorts spiraux qui servent aussi à le maintenir au repos quand le courant est nul. Quand un courant circule dans le cadre, celui-ci a tendance à tourner autour de son axe pour recevoir le flux maximal. Comme il est soumis à un couple antagoniste, dû aux ressorts spiraux, qui s'oppose à sa rotation, il prend une position d'équilibre telle que le couple moteur électromagnétique soit égal au couple résistant d'origine mécanique, l'angle de rotation du cadre étant proportionnel au courant i qui le traverse :

$$\alpha = ki$$

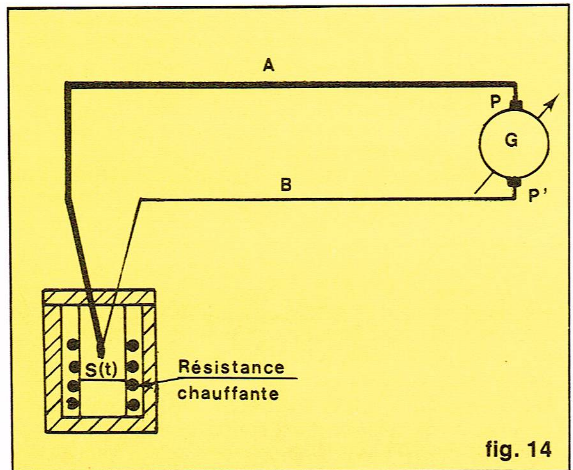
k étant une constante qui dépend de l'appareil utilisé.

Le galvanomètre est intercalé dans un circuit fermé de résistance R ; d'après la loi d'Ohm :

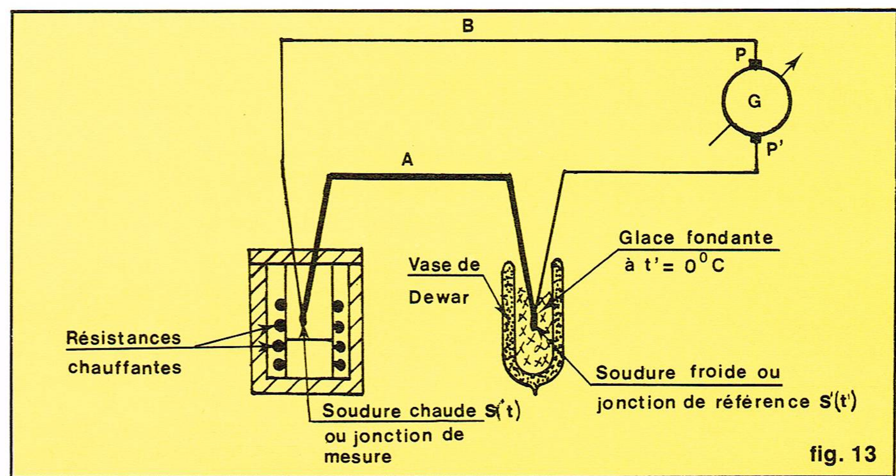
Marie-Louise Bonniaud



▶ ***Figure 12 ; mesure de la différence de potentiel à l'aide d'un galvanomètre placé dans le circuit.***



Marie-Louise Bonniaud



Marie-Louise Bonniaud

$$e = Ri = R\frac{\alpha}{k}$$

R étant la résistance totale du circuit et e la f. e. m. thermoélectrique. De la connaissance de e on déduit, de graphiques donnant la température en fonction de e pour un couple donné, la différence de température entre la soudure chaude et la soudure froide. Les galvanomètres fournissent directement sur un cadran la f. e. m. ou même la différence de température. Les variations de température en fonction du temps peuvent aussi être enregistrées (*fig.* 17).

— *Méthode potentiométrique*

C'est une méthode d'opposition utilisée d'une manière générale pour la mesure précise des faibles forces électromotrices. On oppose à la f. e. m. développée dans le circuit thermo-électrique une différence de potentiel variable et connue jusqu'à ce qu'il y ait égalité entre les deux. Cette égalité est constatée par une absence de courant dans un galvanomètre sensible. C'est une *méthode de zéro* précise et fidèle.

Thermomètres à variation de résistance

La thermométrie à résistance est fondée sur la variation de la résistivité électrique de certains corps conducteurs ou semi-conducteurs en fonction de la température. Jusqu'à ces dernières années, on utilisait les métaux dont la résistance augmente avec la température. On utilise maintenant de plus en plus les corps appelés *thermistances* ou *résistances C. T. N.* (coefficient de température négatif) dont la résistance diminue quand la température s'élève.

— *Thermomètres à résistance métallique*

La résistance R d'un conducteur métallique de section s uniforme, de longueur l et de résistivité ρ, vaut :

$$R = \rho\frac{l}{s}$$

La résistivité ρ étant une fonction croissante de la température, il en est de même pour la résistance. Celle-ci peut être calculée grâce à une expression de la forme :

$$R(t) = R_0(1 + \alpha t)$$

R_0 étant la résistance à 0 °C et α le coefficient de température, qui vaut environ $4 \cdot 10^{-3}$/°C pour le platine par exemple.

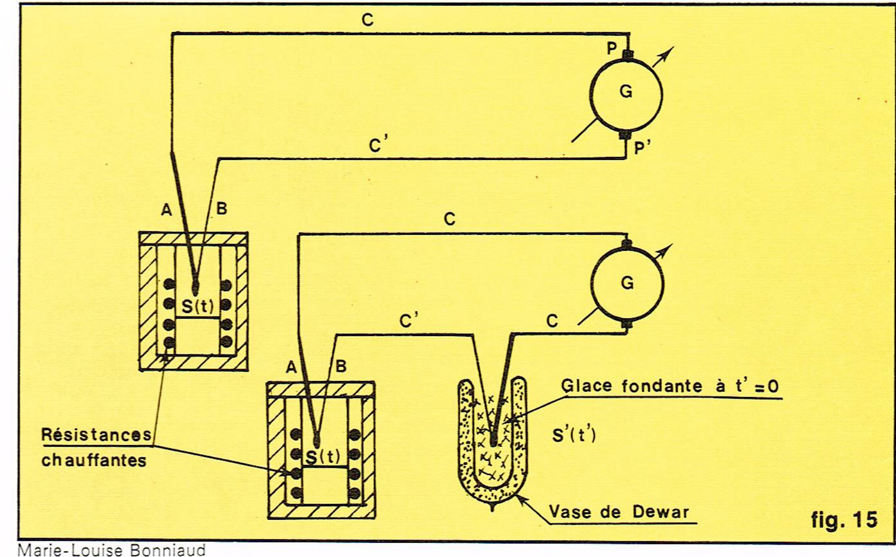
Quand la variation de résistance n'est pas linéaire, on utilise une expression plus élaborée de la forme :

$$R(t) = R_0(1 + at + bt^2 + ...)$$

Pour fabriquer des thermomètres à résistance, appelés *sondes à résistance*, on prend des fils de faible section qu'on enroule sur des supports de diverses formes, cylindres, disques ou rectangles de dimensions analogues à celles d'un timbre-poste.

Les sondes à résistance ont un temps de réponse beaucoup plus long que celui des thermocouples, car la masse qui doit se mettre en équilibre thermique avec le système dont on veut mesurer la température est beaucoup plus grande.

Le temps de réponse, d'environ 1 seconde pour les thermocouples, peut atteindre 1 minute et même plus pour les sondes à résistance.



Marie-Louise Bonniaud

— *Thermomètres à thermistance*

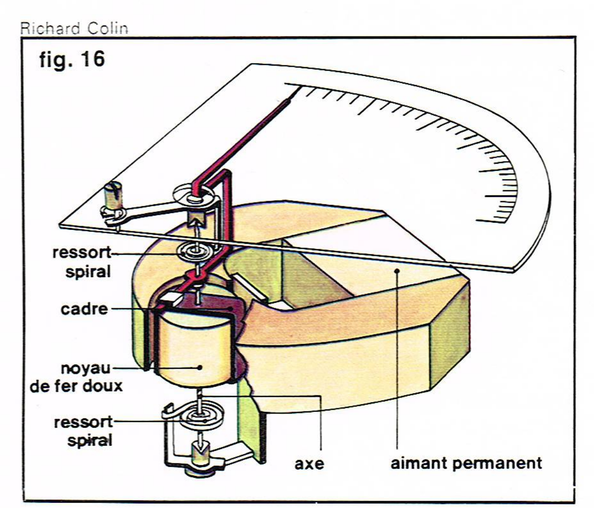
Les thermistances sont constituées de matériaux semi-conducteurs dont la conductibilité d'origine électronique augmente avec la température. Le graphique de la *figure* 18 met en évidence, par comparaison avec le platine, la très grande variation de la résistivité des thermistances en fonction de la température. Leur emploi en thermométrie permet de réaliser des appareils d'une très grande sensibilité. Les thermistances qui se présentent sous des formes très diverses, plaques, cylindres, perles, etc., possèdent une résistance qui décroît avec la température :

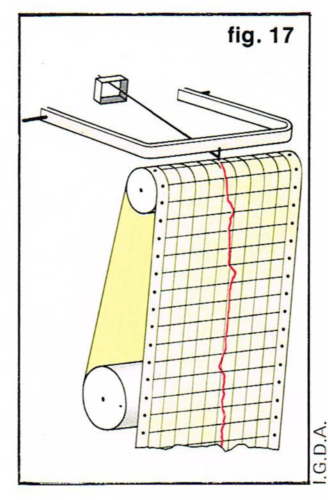
$$R_T = ae^{b/T}$$

▲ ***Figure 15; circuits thermo-électriques avec câbles de compensation.***

▼ ***Figure 16; galvanomètre à cadre mobile utilisé pour la mesure des forces électromotrices d'origine thermo-électrique.***
Figure 17; enregistreur galvanométrique de température.

Richard Colin





I.G.D.A.

▶ *Figure 18; la résistivité des thermistances 1, 2, 3 varie beaucoup plus rapidement en fonction de la température que celle du platine, 4.*

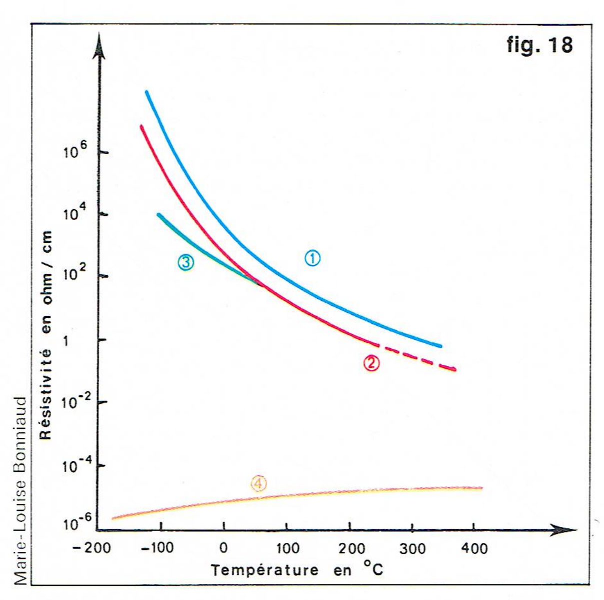


fig. 20

I.G.D.A.

▲ *Figure 20; représentation schématique d'un pont de Wheatstone.*

R_T est la résistance à la température absolue T; *a*, une constante caractéristique de la forme et de la dimension de la thermistance étudiée; *b*, une caractéristique du matériau constituant la thermistance; *e*, la base des logarithmes népériens ($e = 2{,}718$). R_0 étant la résistance à la température T_0, on peut éliminer le paramètre à :

$$R_T = R_0 e^{b\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$$

Mesure des résistances

Les résistances se mesurent par de nombreuses méthodes. Nous décrivons ici celles qui sont le plus utilisées.

— *Les galvanomètres à cadres croisés*

Ce galvanomètre à cadres mobiles et aimant permanent est d'un type particulier, puisqu'il fonctionne *sans couple de rappel d'origine mécanique* (*fig.* 19). Il possède deux enroulements qui font entre eux un angle de $\beta = 30°$ environ. Ces deux enroulements sont placés au centre des pôles d'un aimant permanent dont les épanouissements polaires ne sont pas concentriques au noyau central en fer doux. Avec cette disposition, le champ magnétique dans l'entrefer n'est pas constant. Son intensité est minimale sur l'axe des symétries des pôles. Le sens des enroulements est tel que les couples s'opposent et qu'ils ont tendance à faire tourner chacun des cadres supposé seul, l'un dans le sens des aiguilles d'une montre, l'autre dans l'autre sens. L'ensemble des deux enroulements prend une position d'équilibre quand les deux couples sont égaux, et on montre à l'aide de quelques calculs simples que l'angle pris par l'ensemble par rapport à l'équilibre est une fonction du rapport des deux courants i_1 et i_2 qui traversent les enroulements :

$$\alpha = \frac{1 + b\beta - \frac{i_1}{i_2}}{b\left(1 + \frac{i_1}{i_2}\right)}$$

où b est une constante.

En choisissant convenablement les rayons de courbure des surfaces qui délimitent les épanouissements polaires, on peut réaliser une variation plus ou moins importante du champ magnétique; il en résulte une diminution ou une augmentation de la sensibilité.

Les deux enroulements sont bobinés sur des cadres en aluminium qui servent également à amortir les oscillations de l'équipage. Le courant est amené par trois rubans minces, en or généralement, et dont le couple résultant mécanique est négligeable par rapport aux couples électromagnétiques agissant sur les cadres. Un des fils est commun aux deux enroulements.

Les variations de courant dues à des variations de résistance modifient bien entendu l'angle α.

— *Pont de Wheatstone*

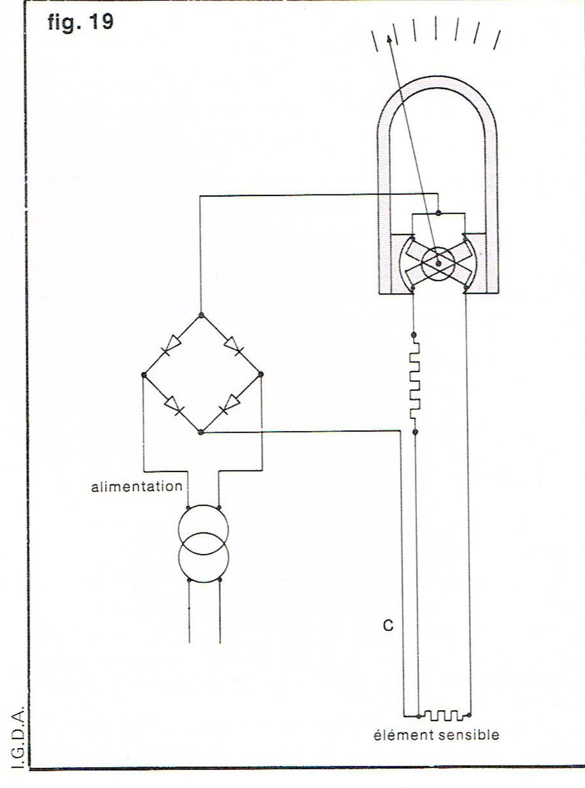
Pour des mesures plus précises, on emploie un montage en pont dont la sonde R_x constitue l'une des branches (*fig.* 20). Les résistances R_2 et R_3 sont fixes. La résistance variable R_1 permet d'équilibrer le pont. Quand le galvanomètre est au zéro :

$$R_x \times R_2 = R_1 \times R_3$$

D'où
$$R_x = \frac{R_3}{R_2} R_1$$

Lorsqu'on effectue des mesures précises, il faut aussi tenir compte de la résistance des fils du pont, ce qui complique légèrement le calcul précédent.

On utilise aussi le montage en pont de Wheatstone déséquilibré. La résistance R_x fait partie d'un pont de Wheatstone que l'on équilibre pour une température t_0 de la sonde à résistance. Quand celle-ci est portée à une température t, sa résistance passe de R_0 à R_t. Le pont est déséquilibré, et un courant de déséquilibre circule dans le galvanomètre connecté aux bornes DE du pont. Il indique un courant i qui est fonction de R_t, donc de la température t de la sonde. On peut, grâce à un étalonnage, graduer directement le galvanomètre en °C.



▶ *Figure 19; schéma d'un galvanomètre à cadres croisés.*

Cas des hautes températures

La mesure des températures élevées, ou *pyrométrie*, présente des difficultés spéciales dues aux altérations subies par les thermomètres quand on les chauffe au-delà d'une certaine limite.

Comme on l'a vu, le thermomètre normal peut être utilisé (exceptionnellement) jusque vers 1 600 °C; mais la précision des mesures diminue rapidement quand on dépasse 1 200 à 1 400 °C. Ce sont là aussi les limites d'emploi pratique de pyromètres thermo-électriques, et les thermomètres à résistance, ainsi que les pyromètres à dilatation de solides, ont des limites d'emploi encore plus basses.

Il se trouve, fort heureusement, que le rayonnement des corps incandescents « noirs » (c'est-à-dire absorbant toutes les radiations qu'ils reçoivent) varie en fonction de leur température suivant des lois relativement simples, dans l'échelle thermodynamique. Ces lois sont établies théoriquement, contrôlées jusque vers 1 800 °K à l'aide des thermomètres dont nous avons déjà parlé. Il paraît entièrement légitime de les appliquer à des températures plus élevées, et de déterminer celles-ci d'après des mesures de rayonnement. C'est ce qu'on fait à l'aide des *pyromètres optiques* (dont certains peuvent aussi être employés à des températures moyennes : 800 ou 1 000 °C par exemple). Nous en indiquerons le principe après avoir étudié le rayonnement thermique.

THERMODYNAMIQUE

Généralités

Notions de physique macroscopique

Les systèmes macroscopiques comportent un très grand nombre d'atomes ou de molécules. Une pièce de cuivre de quelques grammes ou un litre d'air à la pression atmosphérique et à la température ambiante sont des exemples de systèmes macroscopiques. En général, le nombre de particules de tels systèmes est de l'ordre du nombre d'Avogadro $\mathcal{N} = 6 \times 10^{23}$. Même si l'on connaît les lois d'interaction entre les particules, l'importance numérique du nombre d'Avogadro ne nous permet pas de traiter un système macroscopique comme on le fait avec un système simple, par exemple, le mouvement des planètes par la mécanique classique ou la molécule d'hydrogène par la mécanique quantique.

Bien qu'on ne puisse étudier les systèmes macroscopiques en s'intéressant à chacune des particules qui les constituent, c'est-à-dire d'un point de vue *microscopique*, on sait par expérience que ces systèmes obéissent à un certain nombre de lois : l'eau à la pression atmosphérique bout toujours à la même température (100 °C, par définition, comme on l'a déjà vu) ; la pression exercée par un gaz dilué sur les parois du récipient est donnée par la loi des gaz parfaits.

Quand on met en contact thermique un corps chaud et un corps froid, leurs températures s'égalisent. Ces exemples montrent que la pression et la température peuvent se mesurer sans description microscopique (on n'a pas besoin de connaître la position de chaque molécule à chaque instant).

Il y a deux manières d'aborder l'étude de la physique macroscopique lorsque l'énergie intervient sous forme de chaleur.

La plus ancienne, développée surtout dans la première moitié du XIXe siècle par des hommes comme Carnot, Clausius, William Thomson (devenu plus tard lord Kelvin), Robert Mayer et Joule, est celle de la *thermodynamique classique*. Elle est basée sur des *principes* et des *lois* qui sont des déductions et des généralisations d'un grand nombre d'expériences effectuées sur des systèmes macroscopiques.

Quand on utilise ces principes et ces lois, il n'apparaît pas de considérations microscopiques mais uniquement des variables macroscopiques comme la pression, le volume, la température, qui servent à décrire les propriétés des systèmes. Par exemple, l'équation d'état des gaz parfaits PV = RT qui relie les variables macroscopiques dont on vient de parler est déduite de l'expérience. Il est bien des cas où des considérations microscopiques sont sans importance et où la thermodynamique classique permet de faire des déductions d'une grande généralité.

La seconde manière est celle de la *thermodynamique statistique*. On part de considérations microscopiques pour déduire, à partir des propriétés atomiques de la matière, des lois portant sur les systèmes macroscopiques. Les premiers travaux dans ce domaine portent sur la théorie cinétique des gaz due à Maxwell, et que Boltzmann et Gibbs ont poursuivie ensuite dans cette voie. Pour reprendre l'exemple de l'équation d'état des gaz parfaits, la thermodynamique statistique permet, en effectuant des *moyennes* sur des coordonnées microscopiques, d'obtenir des coordonnées macroscopiques comme le volume d'un corps, ainsi que les autres variables, la pression et la température.

La séparation qu'on trouve le plus souvent dans la littérature entre *thermodynamique classique* et *thermodynamique statistique* est essentiellement d'ordre historique. Ici au contraire, on liera étroitement les deux aspects, et on montrera comment on peut passer de l'un à l'autre.

Quelques concepts thermodynamiques

Quelques-unes des variables dont on vient de parler ont un sens en mécanique. On peut mesurer le volume d'un récipient et la pression du gaz qu'il contient (à l'aide d'un manomètre à mercure par exemple). Il en est tout autrement de la température dont on a déjà parlé longuement et dont l'importance est fondamentale en thermodynamique. Reprenons l'exemple du corps chaud et du corps froid en contact thermique : le corps chaud se refroidit et le corps froid se réchauffe jusqu'à ce qu'ils soient tous deux à la même température. L'égalisation est due à un *flux d'énergie* du corps chaud au corps froid. Quand ce flux, appelé *flux de chaleur*, cesse, les deux corps sont en équilibre thermique. Ce fait peut être constaté expérimentalement en utilisant un troisième corps.

Quand deux corps sont en équilibre thermique avec un troisième corps, ils sont en équilibre thermique entre eux.

Cet énoncé est appelé parfois le *principe zéro de la thermodynamique*.

Prenons maintenant le cas plus général d'un *système isolé*. Dans ce système, la température, la pression, la densité peuvent ne pas être les mêmes en tout point. En fonction du temps, ce système évolue jusqu'à ce qu'on n'observe plus de différence entre les trois grandeurs. On dit alors qu'il est dans un *état d'équilibre*. Bien entendu, il n'est pas dans un équilibre statique, puisqu'il règne à l'intérieur une agitation permanente à l'échelle microscopique. Le temps que met un système pour atteindre l'équilibre dépend de plusieurs mécanismes dont chacun possède un *temps de relaxation propre*. Après un temps long par rapport aux temps de relaxation, le système est en équilibre. Le calcul du temps que met un système isolé pour atteindre l'équilibre est un problème extrêmement complexe. Il en est de même de la manière dont il atteint l'équilibre. Dans cet exposé, nous nous limiterons au cas des systèmes en équilibre sans nous préoccuper de la manière dont ils ont atteint cet équilibre. Mais nous avons bien entendu besoin d'un critère pour définir l'état d'équilibre. C'est le *second principe de la thermodynamique* qui nous le fournira.

L'état d'équilibre d'un système est défini à partir de quelques variables macroscopiques qui définissent toutes les autres propriétés macroscopiques du système. Ces variables, qui dépendent uniquement de l'état du système, sont appelées *fonctions d'état*. Par exemple, l'état d'un fluide homogène est entièrement déterminé par sa masse M, son volume V et sa pression P. Sa température T est une fonction d'état :

(1) $$T = f(P, V, M)$$

On aurait pu, bien entendu, choisir d'autres variables indépendantes pour caractériser l'état du fluide, par exemple M, V et T, et trouver P.

Reprenons l'équation d'état des gaz parfaits :

(2) $$PV = RT$$

La constante R vaut dans le système M. K. S.

$$R = 8{,}31 \text{ joules/mole} \cdot \text{degré}$$

A partir du nombre d'Avogadro :

$$\mathcal{N} = 6 \times 10^{23} \text{ molécules/mole}$$

on peut calculer la constante de Boltzmann k

$$k = R/\mathcal{N} = 1{,}38 \times 10^{-23} \text{ joule/degré}$$

L'équation d'état pour un gaz contenant N molécules s'écrit :

(3) $$PV = NkT$$

L'intérêt d'écrire l'équation d'état sous cette forme est de faire apparaître la quantité kT qui a les dimensions d'une énergie. A la température ordinaire (T = 300 °K), kT vaut environ $4 \cdot 10^{-21}$ joule. En introduisant comme unité d'énergie l'électron-volt :

$$1 \text{ eV} = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ joule}$$

kT vaut environ 1/40 eV. C'est l'ordre de grandeur de l'énergie d'une molécule d'un système macroscopique à la température ordinaire.

Principes et lois de la thermodynamique - Fonctions d'état

Le premier principe

Nous allons maintenant exposer quelques applications du **principe de conservation de l'énergie,** appelé **premier principe.**

Considérons tout d'abord un système limité par des parois imperméables à la chaleur. Ces parois sont dites



Boyer - Viollet

▲ ***Le physicien anglais* James Prescott Joule *(1818-1889).***

adiabatiques, et le système *thermiquement isolé.* (Comme on n'envisage pas pour l'instant d'échange de matière avec l'extérieur, on dira que le système est isolé en omettant de préciser à chaque fois thermiquement.) On fait passer un tel système d'un état 1 à un état 2 en lui fournissant un travail W, quels que soient la forme du travail fourni et les états intermédiaires.

Les premiers travaux sur les changements d'états des systèmes isolés sont dus à Joule (1843). Il fournit à un système isolé une quantité de chaleur en produisant différentes formes de travail. D'une part en agitant vigoureusement un liquide par un système de pales mues par des poids, d'autre part en dépensant un travail électrique en faisant passer un courant dans une résistance plongée dans le liquide (*fig.* 21ab). Le travail fourni au système, mesuré dans le premier cas par le mouvement des poids et dans le second par le courant traversant la résistance et la différence de potentiel aux bornes, est le même et fournit au système une même variation d'*une fonction d'état,* l'énergie *interne* E.

(4) $$W = \Delta E = E_2 - E_1$$

Considérons maintenant un système qui n'est plus isolé : on l'appelle *système fermé.* On peut comme précédemment faire passer le système de l'état 1 à l'état 2, mais en général le travail fourni W n'est pas égal à l'augmentation d'énergie interne ΔE. La différence :

(5) $$Q = \Delta E - W$$

est la quantité de chaleur fournie au système. Il faut bien remarquer que la chaleur est une forme d'énergie et s'exprime en joules comme les énergies.

L'équation ci-dessus, qu'on écrit plus généralement :

(6) $$\Delta E = Q + W$$

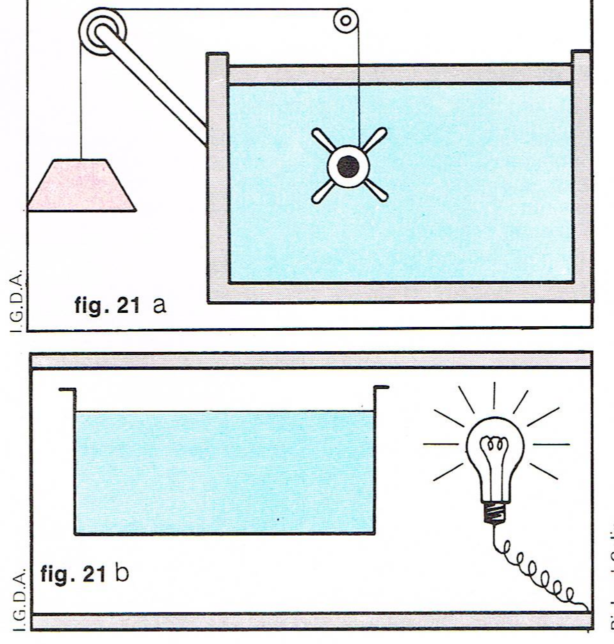
est l'expression du premier principe. L'énergie interne est due à l'énergie cinétique des molécules en mouvement et à l'énergie d'interaction entre ces mêmes molécules. Dans un cristal, par exemple, l'énergie interne est due aux énergies cinétique et potentielle des atomes qui vibrent autour de leur position d'équilibre. On verra plus loin que la température d'un système est une mesure de son énergie interne.

L'énergie interne d'un système est une fonction d'état. Pour un fluide, on peut écrire $E = E(P, T)$ ou $E = E(V, T)$ selon les variables indépendantes qu'on choisit pour définir l'état du fluide. (On a supprimé la dépendance en la masse, car on raisonne généralement à masse constante.) Quand on passe de l'état 1 à l'état 2, ΔE est la différence de deux énergies E_1 et E_2 et ne dépend pas de la manière dont on est passé de l'état 1 à l'état 2. Par contre, Q et W ne sont pas des fonctions d'état. Il n'y a pas de fonction d'état « chaleur du système » telle qu'il y ait une « chaleur » dans l'état 1 et une autre dans l'état 2 avec Q différence de ces « chaleurs ». De même, il n'y a pas de fonction d'état « travail du système » telle qu'il y ait un travail défini dans l'état 1 et un travail défini dans l'état 2 avec W différence de ces « travaux ». Il en résulte qu'il n'y a pas de conservation de la chaleur ni de conservation du travail, mais uniquement une conservation de l'énergie. *Le travail et le flux de chaleur sont différentes formes de transfert d'énergie.*

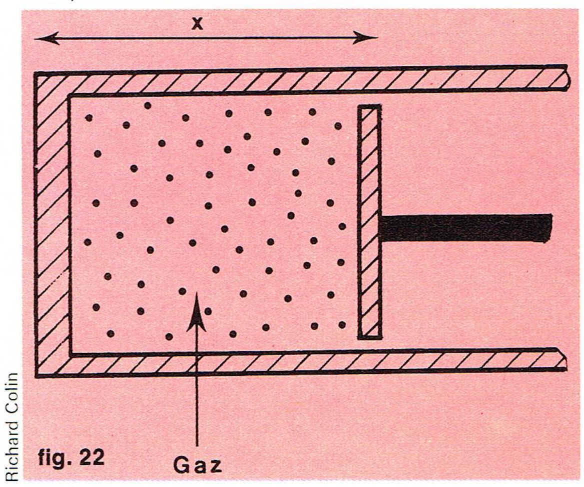
Du point de vue physique, le travail est un transfert d'énergie qui s'observe macroscopiquement, tandis que le flux de chaleur se conçoit à partir de considérations microscopiques. Pour bien montrer la différence entre ces deux transferts d'énergie, considérons un gaz dans un cylindre isolé dont l'une des extrémités est un piston (*fig.* 22). Quand on comprime le gaz, le travail fourni s'observe macroscopiquement en considérant la variation de volume. Pendant la compression, le gaz se réchauffe, les molécules subissent des chocs élastiques sur les parois du piston mobile, gagnent de l'énergie et redistribuent cette énergie au cours des chocs avec les autres molécules.

L'équation **(6)** exprime le principe de la conservation de l'énergie dans le cas de *transformations finies.* Pour des variations infiniment petites, on écrira :

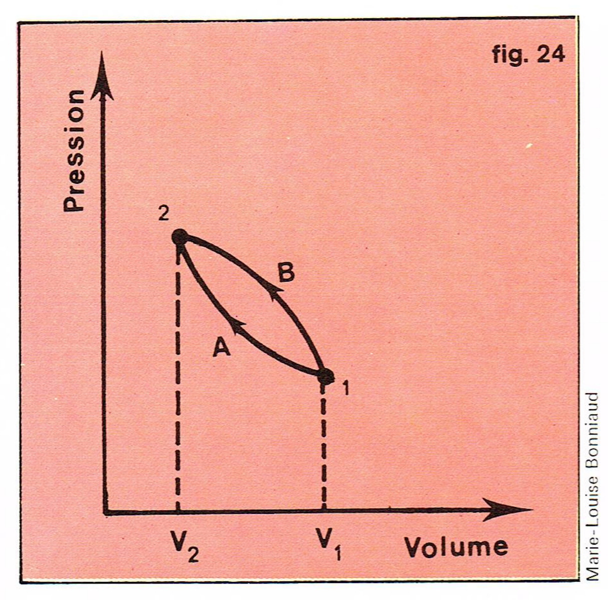
(7) $$dE = dQ + dW$$

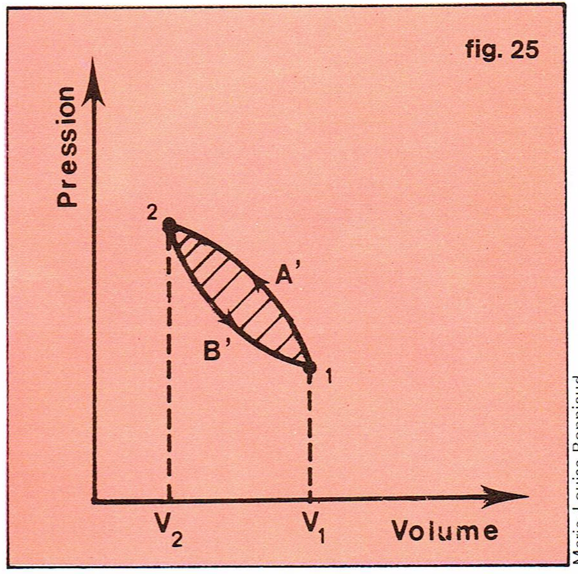


▶ ***Figure 21*a *; schéma de l'expérience de Joule : le liquide du calorimètre reçoit un travail mécanique. Figure 21*b *: le liquide du calorimètre reçoit un travail électrique.***



▶ ***A droite, figure 22 ; compression d'un gaz dans un cylindre isolé.***





◀ *A gauche, figure 24; le travail pour aller de 1 en 2 n'est pas le même suivant que l'on suit le chemin A ou le chemin B. A droite, figure 25; l'aire hachurée représente le travail reçu au cours d'un cycle.*

où dE est une variation infiniment petite de l'énergie du système due à un apport de travail $đW$ et de chaleur $đQ$ infiniment petits. On a écrit $đQ$ et $đW$ (et non pas dQ et dW) pour ne pas oublier que Q et W ne sont pas des fonctions d'état. Quand on passe d'un état 1 à un état 2, la variation d'énergie interne ΔE est définie, et il en est de même de la somme $(Q + W)$. Par contre, Q et W ne sont pas définis séparément et dépendent de la manière dont on passe de 1 à 2, c'est-à-dire du *chemin suivi* (la même remarque s'applique aux transformations infiniment petites). Il existe cependant des exceptions : dans une transformation adiabatique $(Q = 0)$, le travail est défini par l'état initial et l'état final, $W = E_2 - E_1$; dans une transformation qui ne met en jeu aucun travail $(W = 0)$, la quantité de chaleur Q est définie par $Q = E_2 - E_1$.

Transformations réversibles

Un système évolue de manière *réversible* quand une modification infiniment petite suffit à le faire évoluer dans l'autre sens. Une condition nécessaire pour qu'un système évolue de manière réversible est qu'il passe par une suite continue d'états d'équilibre infiniment voisins. Un tel processus est dit *quasi statique*.

Prenons à nouveau l'exemple d'un gaz enfermé dans un cylindre fermé par un piston. Supposons que le piston s'enfonce. Pour que le système évolue dans l'autre sens, il faut que la vitesse du piston change de signe. Pour que le processus soit réversible, il est nécessaire que la vitesse soit infiniment petite. Le gaz passe alors par une suite d'états d'équilibre : la transformation est *quasi statique*.

Système hors d'équilibre

Si un système, par exemple une masse de gaz, n'est pas en équilibre, on ne peut parler ni de sa température ni de sa pression parce que ces grandeurs n'auront pas la même valeur en différents points du système. Ainsi, si l'on passe brusquement ou de manière *irréversible* d'un état d'équilibre à un autre, on pourra bien connaître la variation d'énergie interne du gaz qui ne dépend que de l'état initial et de l'état final, mais on ne pourra calculer ni le travail, ni la chaleur reçue par le gaz dans la transformation, faute de données sur la transformation elle-même.

Ce travail reçu lorsqu'une force $\vec{F}$ s'exerce sur le piston de surface S et déplace le piston d'une longueur $d\vec{l}$ a pour valeur :

$$(8) \qquad dW = \vec{F}\,d\vec{l} = -PS\,dx = -P\,dV$$

où P est la pression $\left(P = \frac{F}{S}\right)$ et V le volume du cylindre (*fig.* 23). Lorsque le piston s'enfonce dans le cylindre, le volume diminue $(dV < 0)$, et le travail reçu par le gaz est positif. On notera qu'en thermodynamique, on compte positivement le travail et la quantité de chaleur reçus par un système. Le travail reçu quand on passe du volume V_1 au volume V_2 :

$$(9) \qquad W = -\int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

ne pourra être calculé que si l'on connaît la pression à chaque instant de la transformation, c'est-à-dire si celle-ci est *quasi statique*.

Il peut arriver que, dans une transformation irréversible, bien que la forme $W = -\int P\,dV$ ne soit pas applicable, on connaisse le travail fourni par l'extérieur et donc reçu par le gaz.

Transformations isothermes

Au cours d'une transformation isotherme, la température reste constante. En conséquence, la température n'étant définie que dans une transformation quasi statique, *une transformation isotherme est nécessairement quasi statique*.

Calculons le travail reçu par un gaz parfait dans une compression isotherme : une certaine masse de gaz parfait passe à température constante d'un état (P_1V_1) à un état (P_2V_2), le produit PV étant constant d'après la loi de Mariotte :

$$(10) \qquad PV = P_1V_1 = P_2V_2 = Cte$$

D'où

$$(11) \qquad P = \frac{P_1V_1}{V}$$

On peut calculer le travail W :

$$(12) \qquad W = -\int_{V_1}^{V_2} P\,dV = -P_1V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = P_1V_1 \operatorname{Log} \frac{V_1}{V_2}$$

Dans une compression $(V_2 < V_1)$, le travail reçu par le système est positif $\left(\operatorname{Log} \frac{V_1}{V_2} > 0\right)$.

Notion de cycle

Le travail reçu par le système dans le passage de l'état 1 à l'état 2 dépend du chemin suivi. Dans l'exemple ci-dessus, on a parcouru l'isotherme $P = \frac{P_1V_1}{V}$ (*fig.* 24, chemin A). En suivant le chemin B, le résultat obtenu serait différent.

Supposons maintenant qu'on passe de l'état 1 à l'état 2 en suivant le chemin A', puis qu'on revienne en 1 en suivant le chemin B' (*fig.* 25). Le travail reçu par le système au cours de ce *cycle* est représenté par l'aire hachurée :

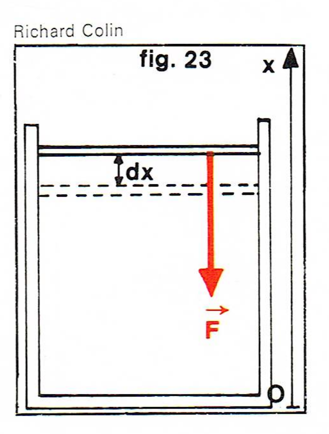
$$(13) \qquad W_A - W_B = -\oint P\,dV \neq 0$$

La variation de l'énergie interne, au contraire, ne dépend pas du chemin suivi :

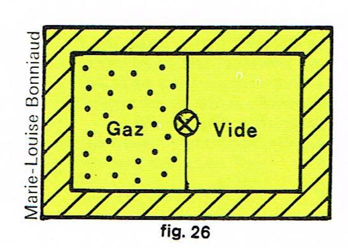
$$(14) \qquad \oint dE = 0$$

C'est ce qui caractérise une *fonction d'état*. Au cours du cycle, on est parti du point 1 où l'énergie interne avait la valeur E_1 pour revenir au point 1 où elle retrouvait la même valeur E_1.

Richard Colin



▲ *Figure 23; calcul du travail reçu par un système.*



▲ *Figure 26 ; expérience de Joule sur l'énergie interne des gaz parfaits.*

Énergie interne des gaz parfaits

L'énergie interne des gaz parfaits ne dépend que de la température.

Cette loi a été déduite par Joule de l'expérience suivante. Deux récipients isolés de l'extérieur peuvent être mis en communication par l'ouverture d'un robinet (*fig.* 26) ; l'un contient un gaz comprimé, l'autre est vide. Quand on ouvre le robinet, le gaz se détend ; on constate que sa température ne varie pas. Comme il n'y a pas eu d'échange de chaleur ($Q = 0$) et qu'il n'y a pas eu de travail ($W = 0$), la variation d'énergie interne est nulle ($\Delta E = 0$).

Pour un gaz réel, la baisse de température est faible et due au travail dépensé pour vaincre les forces de cohésion entre les molécules du gaz. A basse pression, cependant, les variations de température sont négligeables.

On peut maintenant définir un gaz parfait de la manière suivante :

— il obéit à l'équation d'état $PV = RT$ (pour une mole) ;

— son énergie interne ne dépend que de la température.

Chaleur spécifique des gaz parfaits

Pour un solide ou un liquide, la chaleur spécifique est la chaleur qu'il faut fournir à l'unité de masse du corps pour élever sa température de 1°.

Pour un gaz, nous savons qu'il existe une infinité de manières de passer d'un état à un autre, et que la chaleur reçue dépend du chemin suivi. Il y a donc autant de « chaleurs spécifiques » d'un gaz que de manières d'augmenter sa température. On a retenu deux types d'opération : *à volume constant,* ou *à pression constante.*

On définira par exemple la chaleur spécifique à volume constant comme la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de masse du gaz pour augmenter, à volume constant, sa température de 1°.

De plus, on prend habituellement comme unité de masse la masse molaire du gaz, et on parle alors de chaleurs spécifiques molaires. La chaleur spécifique *molaire* à volume constant se note C_V, la chaleur spécifique molaire à pression constante se note C_P.

Il existe entre C_P et C_V une relation. Si nous élevons de dT la température d'une mole de gaz parfait, à partir d'un état donné, son augmentation d'énergie interne dE ne dépendra pas du chemin suivi (premier principe), ni des variations dV et dP entre les deux états, mais seulement de dT (définition des gaz parfaits).

A volume constant, le travail reçu est nul ; on a alors :

$$dE = đQ = C_V dT$$

A pression constante, on aura le même dE :

$$dE = đQ + dW = C_P dT - PdV$$

égalons les deux valeurs de dE :

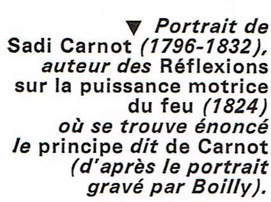
$$(C_P - C_V)\, dT = PdV$$

Or, si nous différentions l'équation d'état pour une mole, et si nous faisons $dP = 0$ (pression constante), il vient :

$$PdV = RdT$$

En rapprochant les deux équations, on trouve :

$$C_P - C_V = R$$



▼ *Portrait de* **Sadi Carnot** *(1796-1832), auteur des* **Réflexions sur la puissance motrice du feu** *(1824) où se trouve énoncé le* **principe** *dit de* **Carnot** *(d'après le portrait gravé par Boilly).*

Boyer - Viollet



Transformations adiabatiques réversibles

Rappelons qu'une transformation est adiabatique quand le système n'échange pas de chaleur avec l'extérieur. Cette définition n'impose rien quant à la réversibilité du processus. On pourra avoir des transformations adiabatiques soit réversibles, soit irréversibles. Nous allons traiter ici le cas d'une transformation adiabatique réversible que subit une mole de gaz parfait.

Une mole de gaz parfait prise dans les conditions (P, V, T) subit une transformation adiabatique infiniment petite qui l'amène à l'état ($P + dP$, $V + dV$, $T + dT$). La variation d'énergie interne $dE = C_V dT$ est égale au travail reçu (la transformation étant adiabatique, $đQ = 0$) :

(15) $$C_V dT = - PdV$$

En différentiant l'équation d'état des gaz parfaits $PV = RT$:

(16) $$RdT = PdV + VdP$$

On ajoute membre à membre les équations **(15)** et **(16)**, on obtient :

(17) $$(R + C_V)\, dT = VdP$$

Comme $$R + C_V = C_P$$

(18) $$C_P dT = VdP$$

Tirons dT de l'équation **(15)** et reportons cette valeur dans l'équation **(18)** ; nous obtenons :

(19) $$\frac{C_P}{C_V} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

En intégrant cette relation, on obtient :

$$\gamma \log V + \log P = Cte$$

soit

(20) $$PV^{\gamma} = Cte$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques C_P/C_V.

La relation $PV^{\gamma} = Cte$ caractérise les transformations adiabatiques réversibles des gaz parfaits. En combinant cette relation avec l'équation $\frac{PV}{T} = Cte$, on obtient des relations entre P et T d'une part, V et T d'autre part, valables pour les transformations adiabatiques réversibles des gaz parfaits :

(21) $$V^{\gamma-1}T = Cte \quad \text{et} \quad P^{\gamma-1}T^{-\gamma} = Cte$$

Les relations **(21)** nous permettent de remarquer que, si la température était constante dans la transformation, il en serait de même du volume et de la pression ; il ne se passerait rien du tout. Une transformation réversible d'un gaz parfait comporte obligatoirement une variation de température. *Il ne faut surtout pas confondre échange de chaleur et variation de température.*

Remarquons enfin que la relation $V^{\gamma-1}T = Cte$ montre qu'une détente adiabatique (volume croissant) s'accompagne d'un abaissement de la température.

Le second principe

Énoncé du second principe

Pour pouvoir prédire les relations entre phénomènes mécaniques et phénomènes calorifiques, le principe de l'équivalence est un guide très précieux, mais c'est un guide insuffisant. Il ne nous donne pas d'indication sur le *sens* dans lequel se déroulent les phénomènes naturels.

Nous avons vu qu'il faut distinguer les *transformations réversibles* et les transformations *irréversibles.* Les transformations réversibles peuvent être considérées comme une suite continue d'états d'équilibre. En changeant infiniment peu les facteurs de l'équilibre, on peut les réaliser dans un sens ou dans le sens opposé, par exemple la détente ou la compression isotherme d'un gaz, la vaporisation d'un liquide ou la condensation d'une vapeur saturée.

Mais il existe dans la nature des transformations *irréversibles* qui se font toujours à *sens unique :* lorsque nous mettons en présence un corps chaud et un corps froid, leurs températures s'égalisent : 1 kg d'eau à 20 °C au contact de 1 kg d'eau à 10 °C donne 2 kg d'eau à 15 °C. La chaleur passe toujours du corps chaud au corps froid.

Si, après avoir mis en contact 1 kg d'eau à 20 °C et 1 kg d'eau à 10 °C, nous constations que nous obtenons au bout d'un certain temps 1 kg d'eau à 25 °C et 1 kg d'eau à 5 °C, cette évolution ne serait pas contraire au principe de conservation de l'énergie ; pourtant *une telle évolution n'a jamais été observée.*

Prenons un autre exemple : nous faisons communiquer 2 ballons contenant des gaz différents : l'un de l'hydrogène léger, l'autre du deutérium. Au bout d'un certain temps, les deux gaz se sont intimement mélangés. *Évolution à sens unique,* car nous n'observons jamais une séparation spontanée de ces deux gaz à température constante.

Ces exemples montrent la nécessité d'admettre un principe distinct du principe d'équivalence, principe qui permet de prévoir le sens des transformations irréversibles.

Ce principe est le **second principe de la thermodynamique** ou **principe de Carnot.**

Nous allons en donner deux énoncés distincts mais équivalents.

1er énoncé (de Clausius) : *Le passage de la chaleur d'un corps froid à un corps chaud n'a jamais lieu « spontanément » ou n'a jamais lieu « sans compensation ».*

« Spontanément » ou « sans compensation » veut dire qu'une telle transformation n'est possible que si elle est liée à une modification qui a lieu en même temps dans le milieu extérieur.

2e énoncé (de lord Kelvin) : *A l'aide d'un système qui décrit un cycle et qui n'est en contact qu'avec une source de chaleur, il est impossible de recueillir du travail.*

Lorsqu'un système n'est en contact qu'avec une source de chaleur à *température constante*, on dit que les transformations de ce système sont *monothermes*.

D'après l'énoncé de lord Kelvin, pour convertir de l'énergie calorifique en travail mécanique, il faut *disposer d'une chute de température*. De même que, pour actionner une machine hydraulique, il faut une différence de niveaux, de même, pour faire fonctionner une machine thermique, il faut une différence de température, il faut disposer de deux sources de chaleur.

Il faut bien voir que les deux principes, celui de l'équivalence et celui de Carnot, sont distincts et indépendants. Historiquement, le principe de Carnot a précédé le principe de l'équivalence. Carnot, dans son livre publié en 1824 et intitulé *Réflexion sur la puissance motrice du feu*, croyait encore à la conservation du calorique. Il croyait que la quantité de chaleur fournie à la machine à vapeur par la chaudière se retrouve intégralement dans le condenseur.

Équivalence des deux énoncés

Nous allons montrer l'équivalence des deux énoncés.

— Si le premier énoncé était faux, si la chaleur passait spontanément d'un corps froid à un corps chaud, on pourrait ainsi accentuer des écarts de température, et on pourrait en particulier obtenir à partir d'une source monotherme un ensemble de sources à températures différentes. Le second énoncé serait sans intérêt, il deviendrait faux également.

— Si le second énoncé était faux, s'il était possible de créer du travail à l'aide d'une source à température unique (en lui enlevant de la chaleur d'après le principe de l'équivalence), on pourrait par le frottement convertir ce travail en chaleur à une température supérieure à celle de la source, et ainsi on aurait, en définitive, transporté de la chaleur d'une température inférieure à une température supérieure sans autre modification. Le premier énoncé serait inexact.

Une machine thermique qui produirait du travail à l'aide d'une source de chaleur à température uniforme serait très avantageuse : elle permettrait, par exemple, de produire du travail en transformant de l'eau froide en glace. Ce serait conforme au principe de l'équivalence. Il y aurait ainsi double profit : on vendrait le travail, on vendrait la glace.

Une telle machine, dont le principe de Carnot nie la possibilité de réalisation, est connue sous le nom de *moteur perpétuel de deuxième espèce*.

Cycles monothermes

D'après le second énoncé du principe de Carnot, un système qui subit un cycle monotherme ne peut fournir de travail, c'est-à-dire que W ne peut être négatif : $W > 0$. Comme dans un cycle, d'après le premier principe :

$$\Delta E = W + Q = 0$$

il en résulte : $Q < 0$.

Examinons le cas particulier d'un cycle monotherme *réversible* : on doit avoir aussi bien $W > 0$ que $W < 0$. Or, comme il est impossible que le travail soit négatif, il ne reste que la possibilité $W = 0$. D'après le premier, si $W = 0$, on a aussi $Q = 0$.

Si un système décrit un cycle monotherme réversible, on a séparément $W = 0$ *et* $Q = 0$.

Quand un système décrit un cycle monotherme irréversible, on a $W > 0$ et $Q < 0$.

Cycle ditherme

Un cycle est appelé *ditherme* lorsque le système qui le décrit se trouve, au cours du cycle, successivement en contact thermique avec deux sources de chaleur, une *source chaude* à la température T_1 et une *source froide* à une température plus basse T_2 ($T_2 < T_1$).

Un tel cycle comporte donc deux transformations monothermes au cours desquelles le système échange de la chaleur avec les sources correspondantes. Comme par hypothèse le cycle ne doit pas comporter d'autres sources, le transfert du contact thermique de l'une des sources à l'autre nécessite l'isolement thermique du système, c'est-à-dire l'existence de deux opérations adiabatiques intermédiaires, une opération adiabatique qui réalise le passage du contact thermique de la source chaude à la source froide et une autre opération adiabatique réalisant le passage du contact thermique de la source froide à la source chaude. Dans l'ordre chronologique, un cycle ditherme comporte donc quatre opérations successives et distinctes :

— une opération monotherme à la température T_1 au cours de laquelle le système échange une certaine quantité de chaleur Q_1 avec la source de chaleur chaude ;

— une opération adiabatique qui interrompt le contact thermique avec la source chaude et qui amène le système au contact thermique avec la source froide ;

— une opération monotherme à la température T_2 au cours de laquelle le système échange une certaine quantité de chaleur Q_2 avec la source froide ;

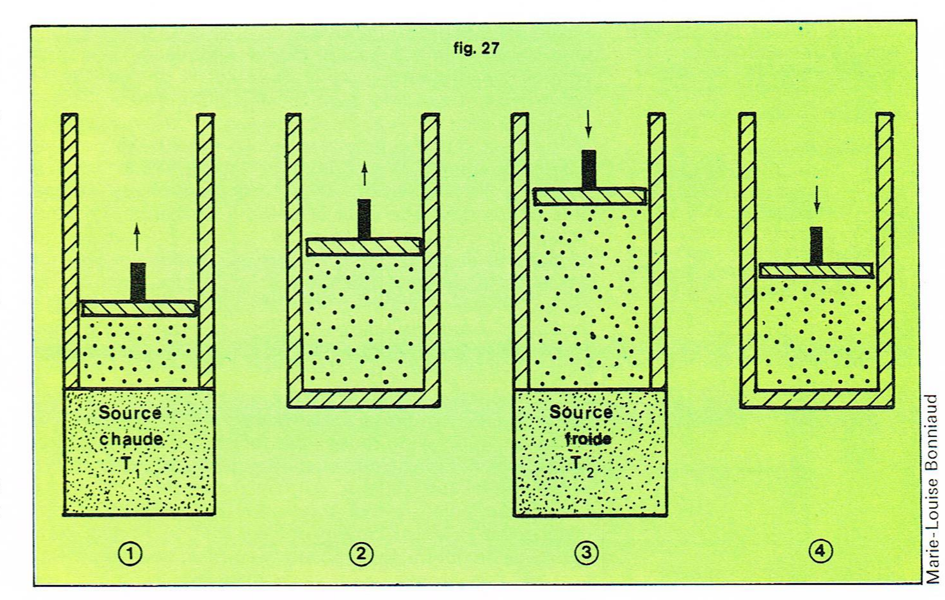
— enfin une opération adiabatique qui interrompt le contact thermique avec la source froide et qui ramène le système au contact thermique avec la source chaude dans des conditions telles que l'état initial du système soit rétabli.

Lorsque les quatre opérations qui constituent le cycle ditherme sont *réversibles*, le cycle porte le nom de *cycle de Carnot*.

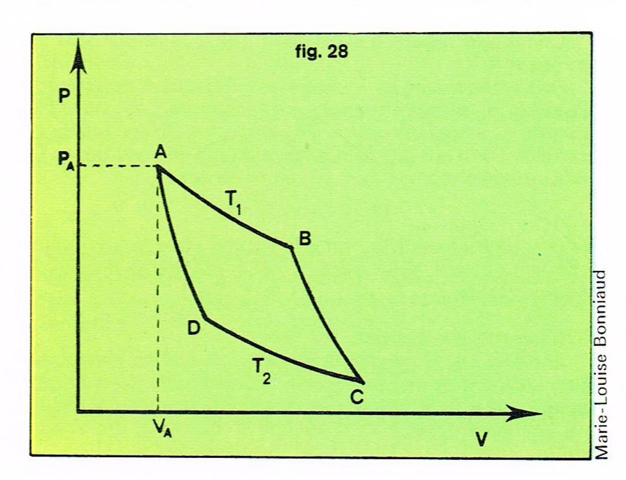
Cycle de Carnot : un exemple classique de Carnot est le cycle suivant, décrit par un gaz et représenté dans le diagramme P, V de la *figure* 28.

Le gaz est supposé enfermé dans un cylindre, surmonté d'un piston (*fig.* 27). Toutes les parois sont supposées adiabatiques, sauf le fond du corps de pompe qui est supposé perméable à la chaleur et qui peut être soit mis en contact avec une source de chaleur, soit entouré d'une paroi adiabatique.

L'état initial du gaz à la température T_1 est représenté par le point figuratif A (volume V_A, pression P_A) [*fig.* 28].



▲ ***Figure 27 ; les quatre opérations du cycle de Carnot.***



◄ ***Figure 28 ; cycle de Carnot représenté dans un diagramme P, V.***

▶ *Figure 29 ; schéma de fonctionnement d'une machine thermique.*

▶ *Page ci-contre, en haut, figure 30 ; fonctionnement d'une machine thermique en réfrigérateur. Figure 31 ; machines thermiques réversible et irréversible fonctionnant entre les mêmes températures* T_1 *et* T_2.

Le gaz est d'abord soumis à une détente isotherme pendant laquelle le fond est au contact thermique de la source chaude qui fournit au gaz la quantité de chaleur Q_1. Le point figuratif décrit le segment d'isotherme AB.

En B le contact thermique avec la source est supprimé, le fond est thermiquement isolé. La détente se poursuit adiabatiquement, la température baisse d'une manière continue, et la pression décroît en fonction du volume plus rapidement que pour la détente isotherme. Le point figuratif décrit une succession d'états d'équilibre qui forment le segment de « courbe adiabatique » BC. On arrête cette détente adiabatique lorsque la température du gaz a atteint la valeur T_2. On établit alors le contact thermique avec une source de température T_2, et on comprime le gaz isothermiquement au contact de cette source. Le gaz échange avec la source une quantité de chaleur Q_2 qui est négative (chaleur cédée par le gaz à la source). On arrête la compression isotherme en un point D tel qu'après suppression du contact thermique avec la source froide une compression adiabatique qui échauffe le gaz le ramène à l'état initial A. Au cours d'un tel cycle, le gaz fournit au milieu extérieur un travail représenté sur le diagramme P, V par l'aire du cyle ABCD. Ce cycle, étant composé de quatre opérations réversibles, peut être décrit en sens inverse, de façon lente et réversible également. Il permet alors d'enlever une certaine quantité de chaleur $Q'_2 = - Q_2$ à la source froide et de déverser une quantité de chaleur $- Q'_1 = Q_1$ dans la source chaude, au prix d'un certain travail W fourni par le milieu extérieur.

Le cycle décrit dans le sens direct ABCD est producteur de travail et peut servir de modèle simple à une « machine thermique ».

Le cycle décrit dans le sens inverse ADCB consomme du travail et permet d'enlever de la chaleur à la source froide. Il peut servir de modèle à une « machine frigorifique » ou à une « pompe de chaleur ».

Les machines réelles ne sont jamais parfaitement réversibles. Mais, dans tous les cas, le principe de l'équivalence doit être satisfait. Pour un cycle ditherme, la relation d'équivalence prend la forme :

$$W + Q_1 + Q_2 = 0$$

Nous dirons qu'un cycle ditherme joue le rôle d'une **machine thermique** lorsque le système qui est le siège des transformations cycliques fournit du travail au milieu extérieur, c'est-à-dire lorsque $W < 0$.

Le principe d'équivalence exige donc que, pour une machine thermique ditherme :

$$Q_1 + Q_2 > 0$$

Rendement des machines thermiques

La *figure* 29 schématise le fonctionnement d'une machine thermique : la machine reçoit pendant un temps donné une quantité de chaleur Q_1 de la source chaude, restitue la quantité plus petite $- Q_2$ à la source froide et fournit un travail $- W$.

Par définition, on appelle rendement de la machine :

$$\mathbf{R} = \frac{-W}{Q_1}$$

D'après le premier principe : $- W = Q_1 + Q_2$

$$\textbf{(22)} \qquad \mathbf{R} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$$

Comme le montre l'expression **(22)**, le rendement est inférieur à 1.

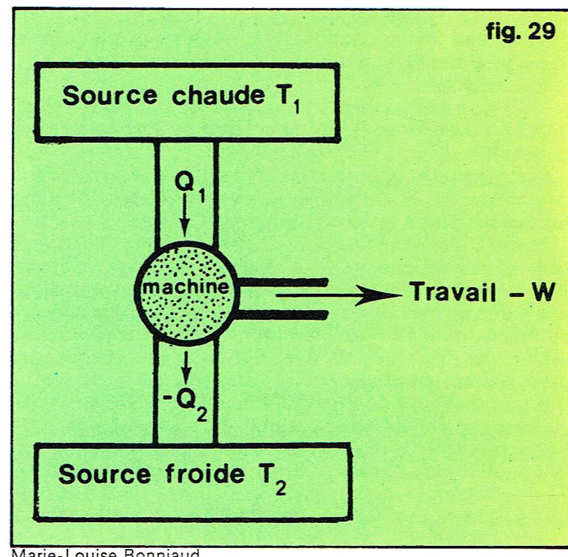
Fonctionnement en réfrigérateur. Faisons fonctionner à l'envers la machine thermique précédente (*fig.* 30). Elle reçoit le travail W ($W > 0$), emprunte la quantité de chaleur Q_2 ($Q_2 > 0$) à la source froide et restitue $- Q_1$ à la source chaude ($Q_1 < 0$). Dans ce cas :

$$Q_1 = - W - Q_2$$

la pompe à chaleur fournit à la source chaude une quantité de chaleur supérieure à celle qu'elle reçoit de la source froide.

Théorème de Carnot

Énoncé. Les rendements de deux machines réversibles fonctionnant entre les mêmes températures sont égaux, quelle que soit la nature des machines, et sont supérieurs au rendement de n'importe quelle machine irréversible fonctionnant entre les mêmes températures.



Marie-Louise Bonniaud

Démonstration. Soit une machine M réversible et une machine M′ irréversible fonctionnant entre les mêmes températures T_1 et T_2. Soit Q_1 et Q_2 d'une part, Q'_1 et Q'_2 d'autre part les quantités de chaleur échangées avec les deux sources pour que les machines fournissent le même travail W (*fig.* 31).

Les rendements sont :

$$\mathbf{R} = \frac{-W}{Q_1} \qquad \mathbf{R}' = \frac{-W'}{Q'_1} \qquad (W = - W')$$

Faisons maintenant fonctionner M en sens inverse, en utilisant le travail W fourni par M′. Le schéma est maintenant celui de la *figure* 32, c'est-à-dire que l'ensemble est équivalent à une machine qui recevrait de la source chaude une quantité de chaleur ($Q'_1 + Q_1$) et fournirait à la source froide ($Q'_2 + Q_2$) *sans échanger aucun travail avec l'extérieur.*

Or, pour une telle machine, le sens des échanges de chaleur est celui des flèches indiquées sur le schéma (*fig.* 33) ; sinon la machine serait un réfrigérateur parfait, en opposition avec le second principe. On doit donc avoir

$$Q'_1 + Q_1 \geqslant 0 \qquad \text{soit} \qquad Q'_1 \geqslant - Q_1$$

or

$$\mathbf{R} = -\frac{W}{Q_1} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}' = -\frac{W'}{Q'_1} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{R} \geqslant \mathbf{R}'$$

Nous avons démontré une partie du théorème de Carnot : une machine réversible fonctionnant entre T_1 et T_2 a un rendement plus grand qu'une machine irréversible fonctionnant entre T_1 et T_2.

La seconde partie est évidente.

Si nous supposons maintenant que M′ est aussi réversible, le même raisonnement nous donne :

$$\mathbf{R}' \geqslant \mathbf{R}$$

En rapprochant les deux résultats, il vient :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}'$$

Nous avons démontré que deux machines réversibles quelconques fonctionnant entre les mêmes températures ont le même rendement. Il nous suffit de connaître le rendement d'une machine réversible particulière pour connaître le rendement de toute machine réversible fonctionnant entre les mêmes températures.

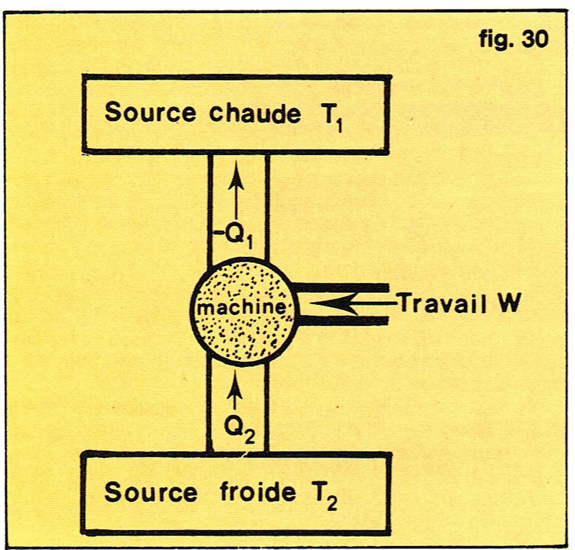
Cycle de Carnot d'une machine réversible

Étudions le cycle de Carnot d'une mole de gaz parfait (voir *fig.* 28). AB est une détente isotherme à la température T_1. Le travail reçu est :

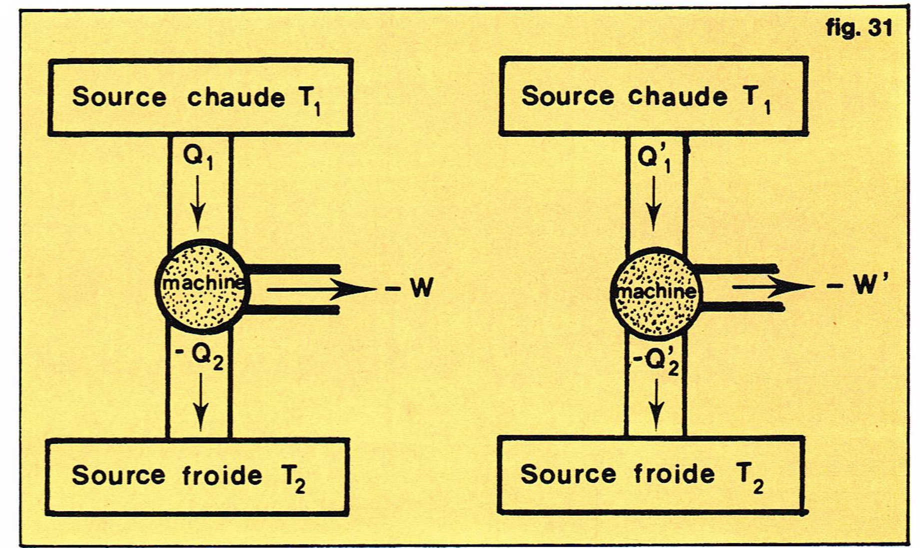
$$\textbf{(23)} \qquad W_1 = - \int_A^B P\,dV = - \mathbf{R}T_1 \int_A^B \frac{dV}{V} = \mathbf{R}T_1 \operatorname{Log} \frac{V_A}{V_B}$$

Comme la transformation AB est isotherme, l'énergie interne du gaz reste constante ($\Delta E = 0$) et la quantité de chaleur reçue Q_1 est $Q_1 = - W_1$.

La transformation BC étant adiabatique, on a d'après les relations **(21)** :



Marie-Louise Bonniaud



Marie-Louise Bonniaud

(24) $$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1}$$

Dans la compression isotherme CD, on calcule comme précédemment Q_2 et W_2 :

(25) $$W_2 = -Q_2 = RT_2 \operatorname{Log} \frac{V_C}{V_D}$$

et enfin on revient à l'état initial A par une compression adiabatique DA où

(26) $$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_D}{V_A}\right)^{\gamma-1}$$

En comparant **(24)** et **(26)**

(27) $$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$$

D'où

(28) $$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \frac{\operatorname{Log} \frac{V_A}{V_B}}{\operatorname{Log} \frac{V_C}{V_D}} = -\frac{T_1}{T_2}$$

Le rendement de la machine réversible est, d'après la relation **(22)** :

(29) $$R = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

D'après le théorème de Carnot, ce rendement est donc celui de toutes les machines réversibles fonctionnant entre les températures T_1 et T_2. Le rendement de Carnot constitue une limite supérieure théorique du rendement d'une machine.

La relation **(28)** nous permet d'écrire *l'égalité de Clausius* pour un cycle ditherme réversible :

(30) $$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Lorsque le cycle ditherme est irréversible, le rendement est inférieur à la limite théorique **(29)** :

(31) $$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

On a alors

(32) $$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$$

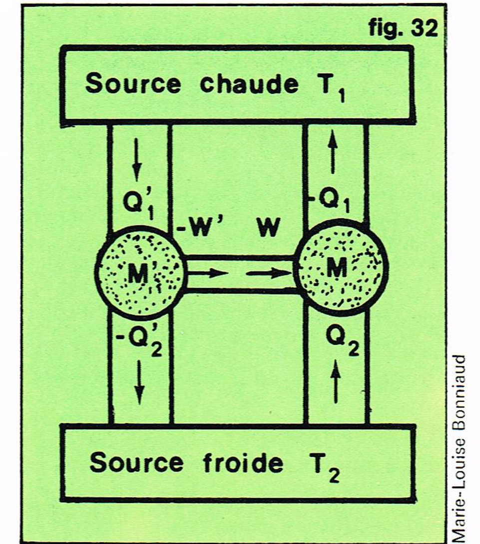
Nombre quelconque de sources

Les résultats précédents s'étendent au cas d'un système en relation avec plus de deux sources de chaleur. Soit $T_1, T_2, ..., T_n$ les températures de n sources avec lesquelles le système échange les quantités de chaleur $Q_1, Q_2, ..., Q_n$.

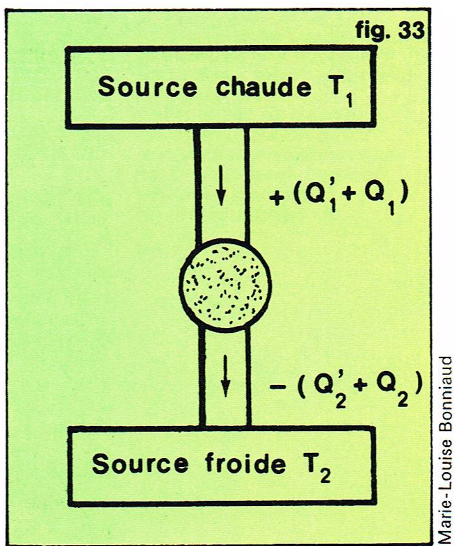
Pour un cycle réversible, on a une égalité analogue à **(30)** :

(33) $$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + ... + \frac{Q_n}{T_n} = \sum_1^n \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

et, pour un cycle irréversible, on a une inégalité analogue à **(32)** :



Marie-Louise Bonniaud



Marie-Louise Bonniaud

▲ ***Figure 32 ; l'ensemble de la figure 31 est équivalent à une machine unique.***
Figure 33 ; l'ensemble de la figure 32 ne fournit pas de travail à l'extérieur.

(34) $$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + ... + \frac{Q_n}{T_n} = \sum_1^n \frac{Q_i}{T_i} < 0$$

En supposant un nombre infini de sources, dont les températures varient d'une quantité infiniment petite de l'une à l'autre et qui échangent avec le système des quantités de chaleur infiniment petites, et en remplaçant les sommes **(33)** et **(34)** par des intégrales, on peut écrire :

$$\oint \frac{dQ}{T} \leqslant 0$$

l'égalité et l'inégalité correspondant à des cycles réversible et irréversible respectivement. Dans le cadre d'un cycle irréversible, l'inégalité s'appelle *inégalité de Clausius.*

L'entropie

Définition

Nous avons montré que, pour une suite de transformations réversibles d'un système thermodynamique formant un cycle, nous pouvons écrire la relation

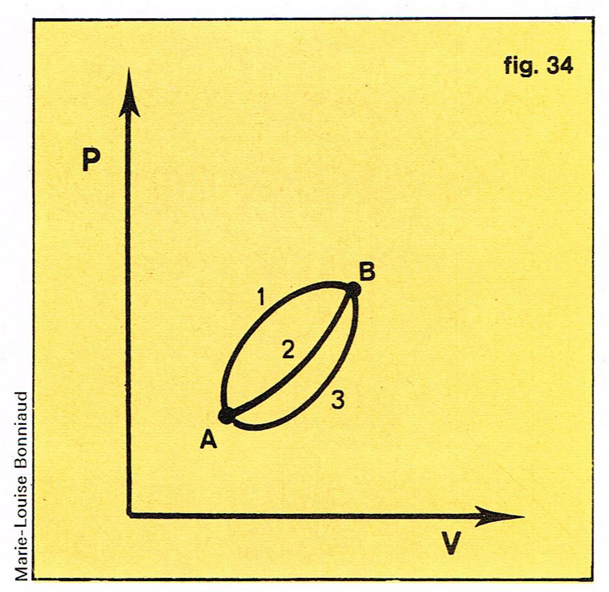
$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

Considérons maintenant un système qui peut passer d'un état initial A à un autre état final B par plusieurs voies différentes qui sont supposées toutes réversibles. L'intégrale

$$\oint_A^B \frac{dQ}{T} \text{ ne dépend pas du chemin suivi.}$$

En effet, considérons par exemple trois chemins différents que peut emprunter le système pour passer de l'état A à l'état B (*fig.* 34).

▶ *Figure 34 ; la variation d'entropie, quand on passe de A en B, ne dépend pas du chemin suivi.*



Le chemin (1) dans le sens A vers B associé au chemin (3) dans le sens B vers A forme un cycle réversible pour lequel nous pouvons écrire :

$$\int_A^B \frac{đQ_1}{T} + \int_B^A \frac{đQ_2}{T} = 0$$

Il en résulte que $$\int_A^B \frac{đQ_1}{T} = \int_A^B \frac{đQ_2}{T}$$

L'intégrale a la même valeur, qu'elle soit évaluée le long du chemin (1) ou le long du chemin (2) ou le long de tout autre chemin *réversible*.

Cela étant posé, nous pouvons définir une fonction d'état S des variables indépendantes telles que

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{đQ}{T}$$

Cette fonction S appelée **entropie** a été introduite par Clausius en 1865. Sa différentielle est $dS = \frac{đQ}{T}$.

La fonction S n'est définie qu'à une constante arbitraire près, mais sa variation ΔS entre deux états donnés a toujours une valeur parfaitement déterminée.

Nous devons noter que l'intégrale $\int_A^B \frac{đQ}{T}$ qui permet d'évaluer cette variation entre deux états donnés doit toujours être calculée *en choisissant une voie réversible* qui mène de l'état A à l'état B. L'intégrale $\int_A^B \frac{đQ}{T}$ calculée le long d'une voie irréversible (notée par la lettre *i*) n'est pas égale à ΔS.

En appliquant l'inégalité de Clausius :

$$\int_A^B \frac{đQ_i}{T} < S(B) - S(A)$$

Lorsqu'un système thermodynamique évolue *irréversiblement* entre deux états successifs A et B, la somme $\int_A^B \frac{đQ_i}{T}$ le long de cette voie irréversible est plus petite que la variation d'entropie S (B) — S (A).

Transformation adiabatique réversible

Une transformation adiabatique est par définition une transformation sans échange de chaleur entre le système et le milieu extérieur; donc telle que, pour toutes ses parties infinitésimales, $dQ = 0$.

Lorsqu'elle est *réversible*, on a également $dS = \frac{đQ}{T} = 0$.

On en conclut qu'*une transformation adiabatique réversible est une transformation isentropique : S = constante.*

Transformation adiabatique irréversible

Pour toute transformation irréversible, on a :

$$\int_A^B \frac{đQ_i}{T} < S(B) - S(A)$$

Si la transformation réelle est adiabatique, on a par définition $đQ = 0$.

Donc S (B) > S (A)

A étant un état initial et B un état final, postérieur dans le temps à l'état A, nous pouvons affirmer :

Lorsqu'un système thermiquement isolé évolue irréversiblement, son entropie augmente en fonction du temps.

Il en est de même pour un système complètement isolé qui évolue irréversiblement : *L'entropie d'un système isolé augmente en fonction du temps.*

Exemples de calcul de variation d'entropie

Une mole de gaz à la température constante T_1 se détend d'une manière réversible d'un volume V_A à un volume V_B. Calculons la variation d'entropie. La quantité de chaleur reçue est $Q_1 = \mathbf{R}T_1 \text{ Log } V_B/V_A$ (voir le calcul effectué dans la description du cycle de Carnot) :

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{đQ}{T} = \frac{1}{T_1}\int_A^B đQ = \mathbf{R} \text{ Log } \frac{V_B}{V_A}$$

Prenons un autre exemple : 1 000 g d'eau sont chauffés de 20 °C à 80 °C. La chaleur spécifique massique de l'eau est **c** = 4,2 J/g/degré. On calcule la variation d'entropie en faisant le raisonnement suivant : le chauffage se fait d'une manière réversible en mettant l'eau en contact avec une infinité de sources de chaleur dans le sens des températures croissantes. La variation d'entropie s'écrit :

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{M\mathbf{c}dT}{T} = M\mathbf{c} \text{ Log } \frac{T_2}{T_1} = 782 \text{ J/degré}$$

M est la masse d'eau (M = 1 000 g). Il faut bien remarquer que les températures qu'on a utilisées sont exprimées en degrés Kelvin (la température de l'eau varie de 293 °K à 353 °K).

Examinons maintenant le cas de transformations irréversibles. Une masse M d'eau, de chaleur spécifique **c**, est prise à la température T_1 et mise en contact avec une source de chaleur à la température T_2 (ce qu'on appelle un thermostat). L'ensemble forme un système isolé, et la température de la masse M augmente irréversiblement jusqu'à T_2. Au cours de cette opération, le thermostat cède au corps la quantité de chaleur $Q = M\mathbf{c}(T_2 - T_1)$, et son entropie varie de :

$$\Delta S_T = \int \frac{đQ}{T} = \frac{1}{T_2}\int đQ = \frac{-M\mathbf{c}(T_2 - T_1)}{T_2}$$

La variation d'entropie de la masse M est, d'après ce qui précède :

$$\Delta S_M = M\mathbf{c} \text{ Log } \frac{T_2}{T_1}$$

On remarque que, même si la masse est amenée de la température T_1 à la température T_2, irréversiblement, la variation d'entropie doit être calculée suivant un chemin réversible. La variation d'entropie totale est :

$$\Delta S = \Delta S_T + \Delta S_M = M\mathbf{c}\left(\frac{T_1 - T_2}{T_2} + \text{Log } \frac{T_2}{T_1}\right)$$

En posant $x = \frac{T_1 - T_2}{T_2}$, ΔS s'écrit :

$$\Delta S = M\mathbf{c}\,[x - \text{Log }(1 + x)]$$

Un calcul simple montre que la quantité entre crochets est toujours positive. On retrouve un résultat déjà obtenu : l'entropie du système isolé augmente en fonction du temps.

Entropie de l'Univers

On parle souvent d'entropie de l'Univers. En thermodynamique, ce qu'on appelle l'Univers, c'est l'ensemble du système et de la partie du milieu extérieur qui échangent de l'énergie. L'ensemble formant un système isolé, on peut dire que :
— l'entropie de l'Univers ne peut jamais diminuer en fonction du temps ;
— si l'Univers est le siège d'une transformation réversible, son entropie reste constante ;
— s'il est le siège d'une transformation irréversible, son entropie augmente en fonction du temps.

Notons enfin que, puisque dans les transformations irréversibles des systèmes isolés l'entropie augmente, on peut dire qu'au cours de ces transformations, il y a *création d'entropie*.

Description statistique d'un système

L'entropie à l'échelle microscopique

Dans ses derniers travaux en 1865, Clausius introduisit, comme on l'a vu, la notion d'*entropie*, qui fournissait un critère quantitatif sur le sens de l'évolution d'un processus et sur l'équilibre d'un système.

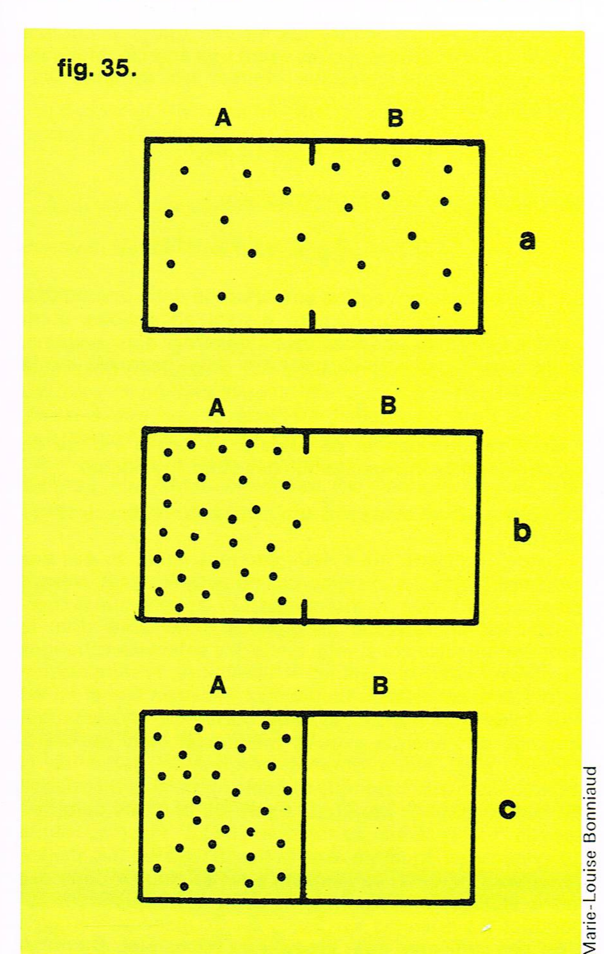
C'est Boltzmann qui, en 1870, eut l'idée de relier l'entropie, qui est un concept macroscopique, aux propriétés moléculaires d'un système. La description de l'état macroscopique d'un système ne permet pas de rendre compte du très grand nombre d'états microscopiques dans lequel il se trouve. De plus, ces états microscopiques (ou micro-états) varient continuellement en fonction du temps (dans un gaz, par exemple, ces variations sont dues aux collisions entre les molécules).

Prenons l'exemple d'un gaz contenu dans un récipient [*fig.* 35 (a)], le nombre de molécules étant de l'ordre de 10^{20}. A l'équilibre, la densité est uniforme; en particulier, chaque partie du récipient A et B contient la moitié des molécules. Bien entendu, ce n'est pas exactement la moitié, car il y a de petites fluctuations (quand le nombre de molécules est de l'ordre de 10^{20}, les fluctuations sont de l'ordre de 10^{10}). Il est très improbable qu'à un instant donné, par suite de fluctuations, toutes les molécules se trouvent dans la partie A [*fig.* 35 (b)]. Cela peut arriver si on les repousse à l'aide d'un piston [*fig.* 35 (c)].

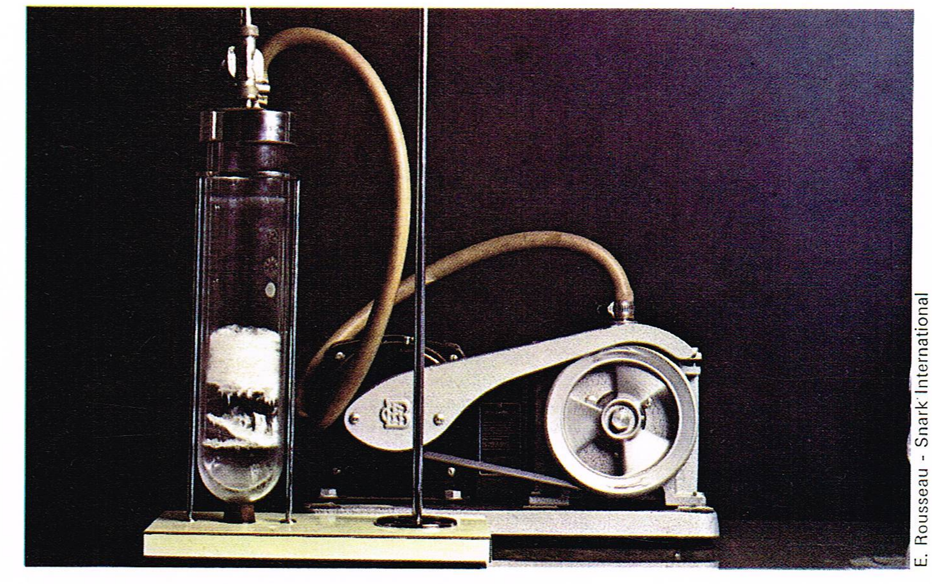
En ôtant très rapidement le piston, le gaz est tout d'abord dans l'état décrit par la *fig.* 35(b), mais il occupera très rapidement tout l'espace [*fig.* 35(a)] avec une densité uniforme, aux petites fluctuations près. Il faudrait attendre un temps considérablement long par rapport à l'âge de l'Univers pour que les fluctuations soient observables à l'échelle macroscopique; de plus, elles seraient très brèves. C'est pourquoi nous négligerons ces fluctuations.

La détente d'un gaz dans le vide est un exemple typique de processus *irréversible*. Abandonné à lui-même, un gaz initialement dans l'état (b) [*fig.* 35], va évoluer vers l'état (a), mais l'inverse ne se produira pas.

La différence entre l'état initial et l'état final est la suivante : dans l'état final, on a une moins bonne connaissance du système, car on ne sait pas si une molécule est dans le compartiment A ou le compartiment B, alors qu'on est sûr qu'elle est dans le compartiment A à l'état initial. On peut dire que, dans l'état final, le système est moins *ordonné* que dans l'état initial.



▲ Figure 35 a, b, c : schéma du comportement des molécules de gaz dans un récipient.



▲ *Appareillage servant à l'expérience sur la solidification de l'azote liquide par dépression afin de passer par le* **point triple** *de l'azote (— 210 °C); à ce point, le corps se présente sous les trois phases liquide, solide et gazeuse en même temps.*

L'entropie d'un système est une mesure du degré de *désordre* de ce système. Plus le désordre d'un système est grand, plus son entropie est grande.

Prenons l'exemple d'un cristal monoatomique sublimé en vapeur. Dans l'état initial, le cristal se présente sous la forme d'un solide, et les atomes vibrent autour de leur position d'équilibre, tout en restant régulièrement espacés. Dans l'état final au contraire, les atomes se déplacent dans tout l'espace occupé par la vapeur.

Rappelons que l'entropie est une fonction d'état, elle ne dépend pas de la manière dont on est passé de l'état initial à l'état final.

Les états accessibles

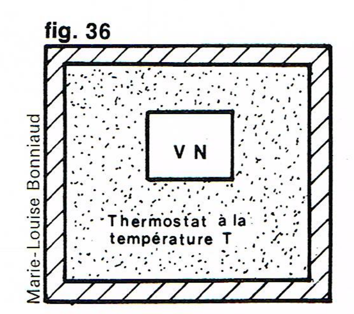
Soit un système comportant N molécules que nous prendrons, pour simplifier, toutes identiques. L'état macroscopique de ce système peut être défini de différentes manières qui dépendent des contraintes qu'il subit : le volume d'un gaz dans un récipient dont les parois sont rigides est constant; si l'une des parois du récipient est un piston mobile avec la pression extérieure constante, la pression du gaz à l'intérieur du récipient est maintenue constante. Il peut exister aussi une contrainte de température. Nous allons traiter pour commencer le cas de systèmes isolés, ou *systèmes microcanoniques*.

A l'équilibre, un système isolé se trouve dans un état macroscopique déterminé par l'énergie E, le volume V et le nombre N de particules, c'est-à-dire par l'ensemble (E, V, N). Hors d'équilibre, il faut utiliser, en plus, d'autres variables macroscopiques. Par exemple, dans le cas d'un gaz parfait, on doit préciser la densité de particules n : (nombre de particules par unité de volume) $[x, y, z, t]$, en chaque point de coordonnées (x, y, z), à chaque instant t, ou plutôt la densité *moyenne* dans des intervalles finis de volume et de temps. A l'équilibre, ces variables supplémentaires ont des valeurs bien définies; pour un gaz en équilibre, la densité de particules est donnée par $n = \frac{N}{V}$.

Généralement, on appelle les variables supplémentaires α_1, α_2, ... et un état macroscopique est déterminé pour simplifier l'écriture, par (E, V, N, α).

Comme on l'a déjà dit, la description d'un micro-état est très compliquée, en raison du grand nombre de particules d'un système. Heureusement, on n'a pas besoin de connaître les micro-états, mais uniquement de savoir comment ils correspondent à l'état macroscopique d'énergie E avec la précision δE. La conservation de l'énergie impose que l'énergie totale du système soit comprise entre E et $E + \delta E$. On appelle *états accessibles* du système les états tels que l'énergie soit comprise entre ces limites.

fig. 36



▲ *Figure 36 : le système de* N *particules et de volume* V *est en contact avec un thermostat à la température* T.

Postulat fondamental

Un système dans un état macroscopique donné peut se trouver dans l'un ou l'autre de ces états accessibles. Si le système a, à un instant donné, des probabilités égales de se trouver dans chacun de ses états accessibles, on peut admettre qu'il en sera de même à des instants ultérieurs. On dit qu'un tel système garde un *ensemble statistique invariable dans le temps* et qu'il est en équilibre. Cette propriété constitue le postulat fondamental de la thermodynamique statistique et peut s'énoncer ainsi :

Un système isolé est en équilibre s'il a des probabilités égales de se trouver dans chacun de ses états accessibles et réciproquement.

Calcul de probabilité

Le postulat fondamental de l'équiprobabilité permet le calcul statistique de toutes les propriétés indépendantes du temps d'un système en équilibre. En principe, ces calculs sont très simples. Considérons ainsi un système en équilibre, et notons Ω le nombre total d'états accessibles. Suivant notre postulat, la probabilité de trouver le système dans chacun de ses états accessibles est alors la même et, par conséquent, simplement égale à $1/\Omega$. (La probabilité de trouver le système dans un état qui n'est pas accessible est évidemment zéro.) Supposons maintenant que nous nous intéressions à un certain paramètre y du système ; par exemple, y pourrait être le moment magnétique du système ou sa pression. Quand le système est dans un état particulier, le paramètre y prend une certaine valeur bien définie. Énumérons les différentes valeurs possibles de y et notons-les $y_1, y_2, ..., y_n$. Parmi les états accessibles au système, il y aura alors quelques états pour lesquels le paramètre prend la valeur particulière y_i. La probabilité $\mathbf{P}_i$ pour que le paramètre prenne la valeur y_i est alors simplement égale à la probabilité pour que le système se trouve parmi les Ω_i états caractérisés par cette valeur y_i. Par conséquent, on obtient $\mathbf{P}_i$ en sommant $1/\Omega$ (la probabilité de trouver le système dans l'un quelconque de ses états accessibles) sur les Ω_i états où y prend la valeur y_i, c'est-à-dire que $\mathbf{P}_i$ est essentiellement Ω_i fois plus grand que $1/\Omega$ probabilités de trouver le système dans chacun de ses états accessibles. On a donc :

$$\mathbf{P}_i = \frac{\Omega_i}{\Omega}$$

La valeur moyenne du paramètre y est alors, par définition, donnée par :

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i y_i = \frac{1}{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \Omega_i y_i$$

où la sommation porte sur toutes les valeurs possibles de y. La dispersion de y (ou écart type) peut être calculée de façon analogue. Tous les calculs statistiques sont ainsi essentiellement aussi simples que ceux qui interviennent dans le problème du jeu de pile ou face.

Nombre d'états accessibles d'un système macroscopique

Considérons un système macroscopique avec des paramètres extérieurs donnés, ainsi que ses niveaux d'énergie. Nous noterons l'énergie totale du système E. Pour faciliter le comptage des états, nous grouperons ces états par énergie en divisant l'échelle d'énergie en petits intervalles de même largeur δE. δE est supposé très petit à l'échelle macroscopique (c'est-à-dire très petit devant l'énergie totale du système et petit devant la précision de n'importe quelle mesure macroscopique de son énergie). D'un autre côté, δE est supposé très grand à l'échelle microscopique (c'est-à-dire beaucoup plus grand que l'énergie d'une seule particule du système et aussi, par conséquent, beaucoup plus grand que la séparation de deux niveaux d'énergie adjacents du système). Un intervalle quelconque δE contient ainsi un très grand nombre d'états possibles du système. Nous introduirons la notation :

Ω (E) : nombre d'états d'énergies comprises entre E et E + δE

Le nombre d'états Ω (E) dépend de la largeur δE de l'intervalle élémentaire choisi. Puisque E est macroscopiquement très petit, Ω (E) doit être simplement proportionnel à δ (E), c'est-à-dire que nous pouvons écrire :

$$\Omega(E) = \mathbf{d}(E)\,\delta E$$

où **d** (E) est indépendant de la largeur δE. (La quantité **d** (E) est appelée *densité d'états* parce qu'elle est égale au nombre d'états par unité d'énergie pour une énergie donnée E.) Puisque l'intervalle δE contient un grand nombre d'états, Ω (E) change assez peu quand on passe d'un intervalle d'énergie à l'intervalle adjacent. Par conséquent, Ω (E) peut être considéré comme une fonction variant continûment de l'énergie E. Nous examinerons plus spécialement la variation de Ω (E) avec l'énergie E pour un système macroscopique.

Remarquons, en passant, qu'il est possible d'obtenir Ω (E) si l'on connaît la quantité

Φ (E) : nombre total d'états ayant une énergie *inférieure* à E.

Le nombre Ω (E) d'états ayant une énergie comprise entre E et E + δE est alors simplement donné par :

$$\textbf{(35)} \qquad \Omega(E) = \Phi(E + \delta E) - \Phi(E) = \frac{d\Phi}{dE}\,\delta E$$

Particule dans une boîte à une dimension

Montrons sur un exemple très simple comment on peut compter le nombre d'états.

Considérons une particule unique de masse m libre de se déplacer dans une boîte à une dimension de longueur L. Les niveaux d'énergie possibles de ce système sont alors :

$$\textbf{(36)} \qquad E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\,mL^2}\,\mathbf{n}^2$$

où $\mathbf{n} = 1, 2, 3, 4, ...$ comme on le montre en mécanique quantique, m la masse de la particule et $\hbar$ la constante de Planck divisée par 2π. Le coefficient de $\mathbf{n}^2$ est très petit si L est de dimension macroscopique. Le nombre quantique **n** est alors très grand pour les énergies rencontrées dans les cas intéressants. D'après **(36)**, la valeur **n** pour une énergie E donnée est :

$$\mathbf{n} = \frac{L}{\pi\hbar}(2\,mE)^{1/2}$$

Puisque des états quantiques successifs correspondent à des valeurs de **n** différentes de une unité, le nombre total Φ (E) d'états quantiques ayant une énergie inférieure à E, ou un nombre quantique inférieur à **n**, est alors simplement égal à $(\mathbf{n}/1) = \mathbf{n}$. Soit :

$$\Phi(E) = \mathbf{n} = \frac{L}{\pi\hbar}(2\,mE)^{1/2}$$

(35) conduit alors au résultat suivant :

$$\Omega(E) = \frac{L}{2\,\pi\hbar}(2\,m)^{1/2}\,E^{-1/2}\,\delta E$$

Un calcul analogue peut être effectué dans une boîte à trois dimensions. Le nombre d'états accessibles étant comme l'entropie une mesure du désordre d'un système, Boltzmann a eu l'idée de relier ces deux quantités par la relation :

$$S = k \operatorname{Log} \Omega$$

Cette relation permet de calculer l'entropie à partir de la connaissance microscopique des états du système.

Équilibre d'un système en contact avec un thermostat

Jusqu'à présent, nous nous sommes limité au cas des systèmes isolés. Le système qui nous intéresse à présent est en contact avec un thermostat. On rappelle que le thermostat est un réservoir de grandes dimensions dont la température reste constante, quels que soient les échanges de chaleur avec le système. A l'équilibre, la température du système est celle du thermostat, mais son énergie n'est plus fixée (on appelle *système fermé* un système qui échange de l'énergie avec le thermostat mais pas de la matière, c'est-à-dire dont le nombre de particules N reste constant). L'ensemble système fermé plus thermostat est isolé comme le montre la *figure* 36 et forme ce qu'on appelle un *système canonique*. L'état macroscopique du système en équilibre avec le thermostat est fixé par les variables T, V et N. Le système peut se trouver dans des micro-états qu'on numérote 1, 2, ... r, auxquels correspondent les énergies $E_1, E_2, ... E_r$. En général, l'énergie n'est pas suffisante pour préciser un micro-état. De nom-

breux micro-états peuvent posséder la même énergie et différer par d'autres caractéristiques.

Choisissons un intervalle δE plus petit que l'intervalle minimal entre deux niveaux E_i et E_{i+1}. Un tel intervalle contiendra au plus un seul niveau d'énergie, mais il correspondra à plusieurs états différents du système. Reprenons les résultats obtenus dans le cas d'un système isolé.

La probabilité P_r pour que le système soit dans l'état r avec l'énergie E_r est proportionnelle au nombre d'états accessibles du thermostat avec bien entendu l'énergie totale du système plus le thermostat constante et égale à E_0. Le thermostat a une énergie comprise entre $E_0 - E_r$ et $E_0 - E_r + \delta E$. Il y a $\Omega_2 (E_0 - E_r)$ états accessibles au thermostat :

$$P_r = C^{te} \cdot \Omega_2 (E_0 - E_r)$$

Dans la parenthèse, nous avons omis V et N qui sont des constantes. La somme des probabilités étant égale à 1, l'inverse de la constante vaut $\sum_r \Omega_2 (E_0 - E_r)$:

D'où $$P_r = \frac{\Omega_2 (E_0 - E_r)}{\sum_r \Omega_2 (E_0 - E_r)}$$

En utilisant la relation $S = k \operatorname{Log} \Omega$, l'expression peut s'écrire :

$$P_r = C^{te} \cdot \exp [S_2 (E_0 - E_r)/k]$$

L'énergie du thermostat est grande par rapport aux valeurs E_r, donc $E_0 \gg E_r$.

En faisant un développement limité du premier ordre, on écrit :

$$\frac{1}{k} S_2 (E_0 - E_r) = \frac{1}{k} S_2 (E_0) - \frac{1}{k} \frac{\partial S_2 (E_0)}{\partial E_0} E_r$$

Par définition, on appelle *paramètre de température* :

$$\beta = \frac{1}{k} \frac{\partial S_2 (E_0)}{\partial E_0}$$

β vaut $1/kT$ où T est la *température absolue* exprimée en degrés Kelvin. On obtient alors :

$$\frac{1}{k} S_2 (E_0 - E_r) = \frac{1}{k} S_2 (E_0) - \beta E_r$$

Le premier terme du membre de droite étant une constante, P_r s'écrit :

$$P_r = C^{te} \cdot e^{-\beta E_r}$$

L'inverse de la constante vaut $Z = \sum_r e^{-\beta E_r}$. Z est appelé *fonction de partition* du système.

(37) $$P_r = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_r}$$

L'équation **(37)** est le résultat final, on l'appelle *distribution de Boltzmann*. Elle donne *la probabilité pour qu'un système en contact avec un thermostat à la température* T *(c'est-à-dire avec le paramètre de température* $\beta = 1/kT$*) soit dans l'état d'énergie* E_r. La fonction de partition Z est d'une importance fondamentale dans l'étude des systèmes à température constante. Par exemple, on peut relier l'énergie moyenne du système $\bar{E}$ à la fonction de partition Z

(38) $$\bar{E} = \sum_r P_r E_r = \frac{\sum_r E_r e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} = -\frac{\partial \operatorname{Log} Z}{\partial \beta}$$

Pour obtenir la dernière égalité de l'équation **(38)**, on remarque que le numérateur de la troisième est la dérivée changée de signe du dénominateur par rapport à β (la dérivée de Log x vaut $1/x$).

La dérivée partielle par rapport à β se fait en maintenant E_r constant. En effet, les niveaux d'énergie E_r ne dépendent pas de la température qui est un *paramètre externe*.

L'énergie libre

On montre en thermodynamique statistique qu'on peut relier l'entropie aux probabilités P_r par la relation :

(39) $$S = -k \sum_r P_r \operatorname{Log} P_r$$

Montrons d'abord qu'on retrouve dans le cas d'un système isolé un résultat déjà obtenu. Soit Ω (E, V, N) le nombre d'états accessibles d'énergie entre E et $E + \delta E$; la probabilité P_r de trouver le système dans l'un de ces états accessibles est $P_r = 1/\Omega$. La probabilité de trouver le système dans un état hors de l'intervalle δE est nulle. La somme $\sum_r$ conduit au résultat qu'on connaît déjà :

$$S = -k \frac{1}{\Omega} \sum_r \operatorname{Log} \frac{1}{\Omega} = +k \operatorname{Log} \Omega$$

(on a effectué Ω fois la somme $- \operatorname{Log} \frac{1}{\Omega}$).

Prenons maintenant le cas du système canonique : en portant $P_r = e^{-\beta E_r}/Z$ dans **(39)**, on obtient :

$$S = k \operatorname{Log} Z + E/T$$

En introduisant une nouvelle fonction d'état, *l'énergie libre de Helmholtz* $F = E - TS$, on obtient la relation :

$$F = -kT \operatorname{Log} Z$$

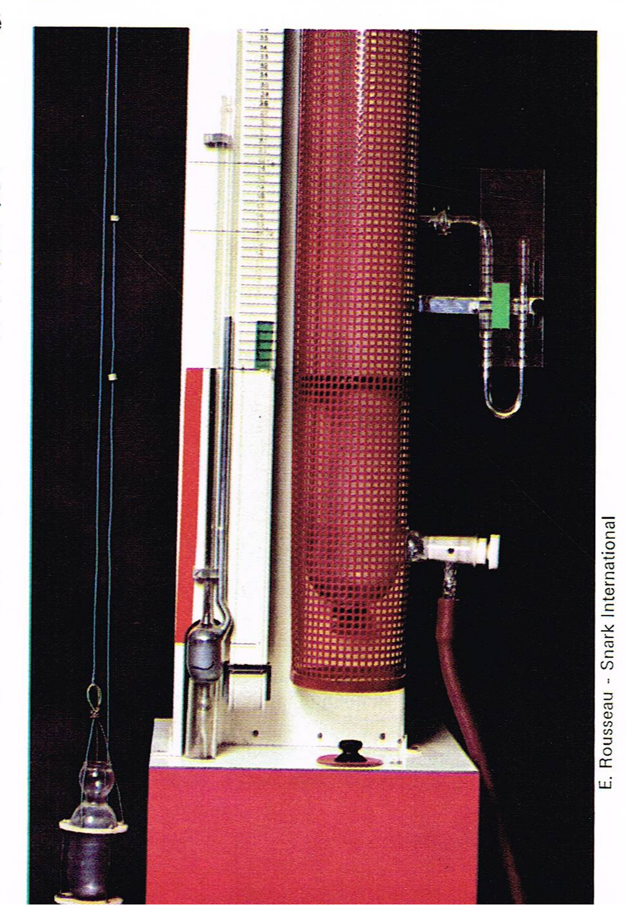
La relation entre l'énergie libre F et la fonction de partition Z est aussi importante dans les systèmes canoniques que la relation $S = k \operatorname{Log} \Omega$ dans les systèmes microcanoniques.

On a voulu montrer dans ce qui précède qu'on pouvait aussi bien définir des fonctions d'état entropie, énergie interne, énergie libre, et des variables comme la température absolue en thermodynamique classique qu'en thermodynamique statistique ; on verra bientôt qu'il en est de même pour la pression.

Théorie cinétique des gaz parfaits

On a déjà parlé des gaz parfaits en thermométrie. Nous allons reprendre en détail les propriétés de ces gaz en utilisant les notions de thermodynamique statistique qui viennent d'être exposées.

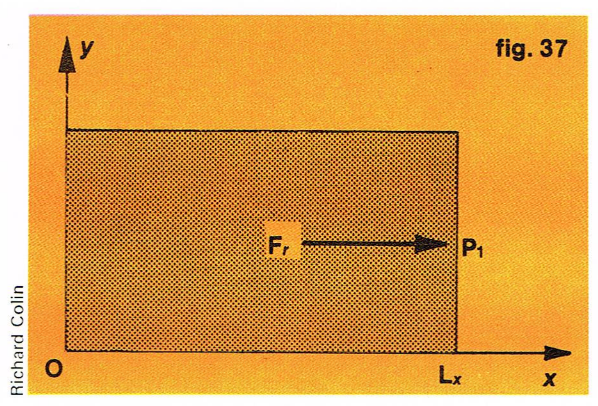
Les gaz parfaits sont constitués de molécules animées d'un mouvement désordonné, chacun de ces mouvements obéissant aux lois de la mécanique classique. Le volume occupé par le grand nombre de molécules est faible par rapport au récipient qui les contient. On suppose aussi que les *collisions* entre les molécules sont élastiques et de durée négligeable, et qu'entre deux collisions les molécules se déplacent suivant un mouvement rectiligne et uniforme.



E. Rousseau - Snark International

◀ ***Les gaz parfaits :* appareillage pour la vérification expérimentale de la loi de Mariotte.**

▶ *Figure 37 : la boîte contient un gaz parfait dont l'une des molécules dans l'état r exerce sur la paroi P_1 une force F_r parallèle à l'axe Ox.*



Pression moyenne d'un gaz parfait

Nous allons calculer la pression qu'exerce un gaz parfait sur les parois du récipient qui le contient, d'une part en fonction de la température absolue T, d'autre part en fonction de la vitesse des molécules, ce qui nous permettra ensuite, en comparant les deux résultats, de déduire une relation entre la vitesse des molécules et la température absolue du récipient.

Relation entre la pression et la température

Calculons d'abord la pression en utilisant la distribution canonique.

Il est très facile de mesurer expérimentalement la pression moyenne (c'est-à-dire la force moyenne par unité de surface) exercée par un gaz sur les parois du récipient qui le contient. Il est donc particulièrement intéressant de calculer la pression moyenne exercée par un gaz parfait. Soit F la force dans la direction x exercée par une molécule sur la paroi P_1 (c'est-à-dire la paroi définie par $x = L_x$) du récipient contenant le gaz (*fig.* 37). Notons F_r la valeur de cette force quand la molécule est dans un état quantique r d'énergie ε_r. La force F_r peut être reliée facilement à l'énergie ε_r. En fait, supposons que la paroi P_1 du récipient soit déplacée très lentement vers la droite d'une quantité dL_x. Au cours de ce processus, la molécule exercera sur la paroi une quantité de travail $F_r dL_x$ qui doit être égale à la diminution $-d\varepsilon_r$ de l'énergie de la molécule. Ainsi

$$F_r dL_x = -d\varepsilon_r$$

ou **(40)**
$$F_r = -\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial L_x}$$

Nous avons écrit ici une dérivée partielle pour indiquer que les autres dimensions L_y et L_z sont maintenues constantes.

La force *moyenne* $\bar{F}$ exercée par une molécule sur la paroi est alors donnée par le calcul de la moyenne de la force F_r pour tous les états possibles r de la molécule. Ainsi

(41)
$$\bar{F} = \sum_r \mathbf{P}_r F_r = \frac{\sum_r e^{-\beta\varepsilon_r}\left(-\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial L_x}\right)}{\sum_r e^{-\beta\varepsilon_r}}$$

où nous avons utilisé l'expression $e^{-\beta\varepsilon_r}/Z$ pour la probabilité $\mathbf{P}_r$ de trouver la molécule dans un état r. La relation **(41)** peut être simplifiée en remarquant que le numérateur est la dérivée divisée par $-\beta$ de la fonction de partition Z :

(42)
$$\bar{F} = \frac{1}{\beta Z}\frac{\partial Z}{\partial L_x} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \operatorname{Log} Z}{\partial L_x}$$

Cette relation générale peut maintenant être appliquée au résultat obtenu pour Log Z dans le cas d'une molécule monoatomique. Dans ce cas, un calcul assez complexe donne :

$$\operatorname{Log} Z = \operatorname{Log} V - \frac{3}{2}\operatorname{Log}\beta + 3\operatorname{Log} b$$

où b est une constante qui dépend de la molécule. Comme $V = L_x L_y L_z$, une dérivation partielle donne

(43)
$$\bar{F} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \operatorname{Log} Z}{\partial L_x} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \operatorname{Log} V}{\partial L_x} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{L_x}$$

Puisque le gaz est parfait, les molécules se déplacent sans s'influencer sensiblement les unes les autres. Par conséquent, la force normale *totale* moyenne (c'est-à-dire la force dans la direction x) exercée sur la paroi P_1 par toutes les molécules du gaz est obtenue en multipliant la force moyenne $\bar{F}$ exercée par une molécule par le nombre total N de molécules dans le gaz. En divisant ce résultat par la surface $L_y L_z$ de la paroi, on obtient alors la pression moyenne P exercée par le gaz sur la paroi. La relation **(43)** conduit ainsi au résultat :

(44)
$$\bar{P} = \frac{N\bar{F}}{L_y L_z} = \frac{N}{L_y L_z}\frac{kT}{L_x} = \frac{N}{V}kT$$

Ainsi

(45)
$$\bar{P}V = NkT$$

où $V = L_x L_y L_z$ est le volume du récipient.

Si N est égal au nombre d'Avogadro, V est alors le volume molaire et **(45)** s'écrit PV = RT.

Relation entre la pression et la vitesse moyenne

Soit une boîte cubique d'arête l, contenant une molécule (*fig.* 38). Soit P_1 et P_2 ses faces perpendiculaires à Ox, et soit à un instant donné V_x la composante suivant Ox de la vitesse de la molécule, qui vient frapper la face P_1 (*fig.* 39).

Le choc étant parfaitement élastique (la molécule va rebondir avec une composante de vitesse suivant Ox égale à $-V_x$, les autres composantes étant inchangées), la quantité de mouvement cédée à la paroi dans le choc est donc : $2\,mV_x$. La molécule met un temps $\frac{2\,l}{V_x}$ pour faire l'aller-retour (puisque les collisions ont une durée négligeable). Donc elle frappe P_1, $\frac{V_x}{2\,l}$ fois par seconde. Par seconde, la molécule cède à P_1 une quantité de mouvement

$$2\,mV_x \cdot \frac{V_x}{2\,l} = m\frac{V_x^2}{l}$$

Si la boîte contient N molécules identiques, et si nous négligeons d'abord les collisions entre elles, la quantité de mouvement cédée à la paroi par seconde, c'est-à-dire la force exercée par le gaz sur la paroi, sera :

$$F = \frac{m}{l}\left(V_{1x}^2 + V_{2x}^2 + V_{3x}^2 + \dots + V_{Nx}^2\right)$$

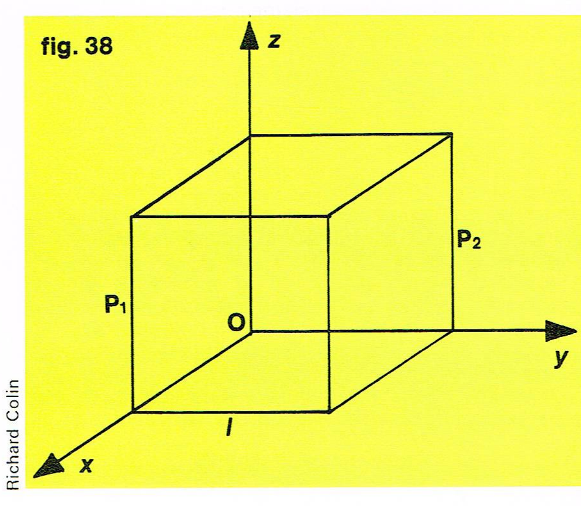
$\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ..., $\vec{V}_N$ étant les vitesses des N molécules et V_{1x}, V_{2x}, ..., V_{Nx} leurs composantes suivant Ox.

La pression P sera donc :

$$P = \frac{F}{S} = \frac{F}{l^2} = \frac{m}{l^3}\left(V_{1x}^2 + \dots + V_{Nx}^2\right)$$

Soit n le nombre de molécules par unité de volume : on a donc $N = l^3 n$, c'est-à-dire $l^3 = \frac{N}{n}$. Reportons dans l'expression de P :

$$P = mn\left(\frac{V_{1x}^2 + \dots + V_{Nx}^2}{N}\right)$$



▶ *Figure 38 : la boîte cubique d'arête l contient une molécule.*

L'expression $\frac{V_{1x}^2 + ... + V_{Nx}^2}{N}$ est la moyenne de V_x^2 pour toutes les molécules : notons-la $\overline{V_x^2}$.

Nous avons donc : $\bar{P} = mn\overline{V_x^2}$.

Si nous voulons avoir une idée de la vitesse moyenne des molécules, la première méthode qui se présente est de faire la somme de toutes ces vitesses et de la diviser par N. Seulement cette somme sera toujours nulle en raison du mouvement désordonné des molécules et ne nous donnera donc aucune information sur les valeurs absolues des vitesses.

Aussi est-on amené à faire la moyenne des carrés des modules des vitesses, qu'on note $\overline{V^2}$:

$$\overline{V^2} = \frac{V_1^2 + V_2^2 + ... + V_N^2}{N}$$

On décide alors de poser que cette moyenne est égale à V_q^2, V_q ayant donc les dimensions d'une vitesse : V_q est appelée « *vitesse quadratique moyenne* » des molécules, et on a :

$$V_q = \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2 + ... + V_N^2}{N}} = \sqrt{\overline{V^2}}$$

Il ne faut pas confondre $\overline{V^2}$ et $(\bar{V})^2$, cette dernière quantité étant nulle.

Pour une molécule quelconque, on a : $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$

Donc, en moyenne, on aura : $\overline{V^2} = \overline{V_x^2} + \overline{V_y^2} + \overline{V_z^2}$, mais le caractère désordonné du mouvement impose que toutes les directions sont équivalentes.

On a donc : $\overline{V_x^2} = \overline{V_y^2} = \overline{V_z^2} = \frac{\overline{V^2}}{3}$

reportons dans l'expression trouvée pour P, il vient :

$$P = \frac{1}{3} nm\overline{V^2}$$

Nous avons négligé les collisions entre les molécules, mais cela ne modifie pas le résultat. En effet, ces collisions sont élastiques, le moment linéaire et l'énergie cinétique totale des deux molécules sont conservés, et le résultat trouvé reste valable.

D'autre part, la pression calculée sur la face P_1 est évidemment la même en tous les points de la boîte (en négligeant le poids du gaz) et serait la même dans une boîte de forme quelconque.

Considérons maintenant une mole de gaz, c'est-à-dire $\mathcal{N}$ molécules ($\mathcal{N}$ étant le nombre d'Avogadro). Si cette mole de gaz occupe un volume V, le nombre n de molécules par unité de volume sera $n = \mathcal{N}/V$, ce qui donne :

$$P = \frac{1}{3}\frac{\mathcal{N}}{V} m\overline{V^2}$$

ou

$$PV = \frac{1}{3} \mathcal{N} m\overline{V^2}$$

Or, d'après l'équation d'état des gaz parfaits (PV = RT pour une mole) :

$$RT = \frac{1}{3} \mathcal{N} m\overline{V^2}$$

On peut faire apparaître ainsi une relation entre l'énergie cinétique moyenne de translation d'une molécule et la température T en degrés Kelvin :

$$\frac{1}{2} m\overline{V^2} = \frac{3}{2} kT$$

il en résulte la conséquence importante suivante : à la même température, toutes les molécules ont la même énergie cinétique moyenne de translation, même si elles ont des masses différentes, c'est-à-dire indépendamment de la nature du gaz. En d'autres termes, *l'énergie interne d'un gaz parfait* ne dépend que de la température. Dans un mélange de deux gaz (les masses des molécules étant respectivement m_1 et m_2), les vitesses quadratiques moyennes des molécules seront donc telles que :

$$\frac{1}{2} m_1 V_{q_1}^2 = \frac{1}{2} m_2 V_{q_2}^2$$

soit :

$$\frac{V_{q_2}}{V_{q_1}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

Énergie interne d'un gaz parfait

On vient de voir que l'énergie cinétique moyenne de translation d'une molécule vaut $\frac{3}{2} kT$.

C'est jusqu'à présent la seule forme d'énergie permise par notre modèle. L'énergie interne d'une mole ($\mathcal{N}$ molécules) de gaz vaut donc, d'après ce modèle :

$$\bar{E} = \frac{3}{2} \mathcal{N} kT = \frac{3}{2} RT$$

Or, nous savons que la chaleur spécifique molaire à volume constant C_V est telle que :

$$d\bar{E} = C_V dT$$

Nous en déduisons donc que : $C_V = \frac{3}{2} R$.

Ce résultat se révèle exact expérimentalement pour les gaz monoatomiques, et faux pour les autres gaz. On peut l'expliquer ainsi : ce qui est égal à $\frac{3}{2}$ RT, c'est l'énergie cinétique de translation. Or celle-ci n'est égale à l'énergie interne que pour un gaz dont les molécules ne possèdent pas d'autre moyen d'emmagasiner de l'énergie. C'est le cas pour les molécules ponctuelles de notre modèle. C'est aussi le cas pour les molécules d'un gaz monoatomique. Mais pour les autres, il va falloir tenir compte de toutes les manières d'emmagasiner de l'énergie.

Équipartition de l'énergie

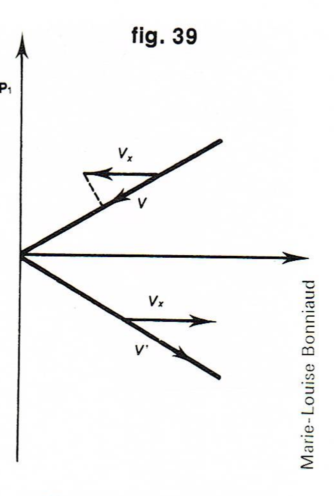
Les molécules ponctuelles rigides de la théorie cinétique ne peuvent avoir que de l'énergie cinétique de translation. Mais si nous considérons des molécules formées de plusieurs atomes, nous pourrons les faire tourner, et emmagasiner de l'énergie cinétique de rotation. Nous pouvons aussi cesser de nous borner aux molécules rigides, et faire vibrer les atomes.

Ainsi, l'énergie mécanique totale d'une telle molécule contiendra plusieurs termes résumés dans le tableau II et qui, bien qu'ayant des origines différentes, ont la même valeur moyenne qui ne dépend que de la température.

Degrés de liberté

On appelle *degré de liberté* une manière d'emmagasiner de l'énergie cinétique. Par exemple, une molécule monoatomique a trois degrés de liberté (translation suivant Ox, Oy et Oz). Une molécule diatomique en a cinq (les trois de translation, plus deux correspondant à des rotations autour d'axes parallèles à Oy et Oz, si la molécule est parallèle à Ox). Une molécule rigide ayant un nombre d'atomes supérieur à 2 aura six degrés de liberté.

fig. 39



▲ ***Figure 39 : la molécule contenue dans la boîte de la figure 38 subit un choc sur la paroi P_1.***

▼ ***Tableau II : l'énergie mécanique totale d'une molécule est la somme de plusieurs énergies.***

Tableau II
L'énergie mécanique totale d'une molécule est la somme de plusieurs énergies

Énergie	Valeur
de translation suivant l'axe Ox	$\frac{1}{2} m V_x^2$
de rotation autour d'un axe parallèle à Ox	$\frac{1}{2} I \omega_x^2$
de vibration de deux atomes	$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} V^2$
potentielle de vibration des atomes	$\frac{1}{2} \alpha x^2$

Tableau III Chaleur spécifique des gaz			
Gaz	**Monoatomique**	**Diatomique**	**Polyatomique**
Nombre de degrés de liberté	**3**	**5**	**6**
C_V	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{6}{2}R = 3R$
$C_P = C_V + R$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	$\frac{8}{2}R = 4R$
$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{5} = 1,4$	$\frac{4}{3}$

▲ ***Tableau III : chaleur spécifique des gaz.***

Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de variables nécessaires pour déterminer la position de la molécule ; ainsi, une molécule monoatomique est bien définie par ses coordonnées x, y, z : 3 degrés de liberté. Une molécule diatomique sera définie par les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un atome, et deux des coordonnées de l'autre (x_2, y_2), car la connaissance de la distance des deux atomes permet de calculer z_2 : 5 degrés de liberté.

Nous avons vu précédemment que chaque degré de liberté doit avoir, à une température donnée, une énergie cinétique moyenne invariable. Comme l'énergie cinétique moyenne de translation (3 degrés de liberté) vaut :

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{3}{2}kT$$

il correspond à chaque degré de liberté le tiers de cette énergie :

$$e = \frac{1}{2}kT$$

Une molécule ayant f degrés de liberté aura donc une énergie interne $\bar{e} = \frac{f}{2}kT$.

Une mole d'un gaz (dont chaque molécule a f degrés de liberté) aura donc une énergie interne $\bar{E} = \mathcal{N}\left(\frac{f}{2}kT\right)$,

soit : $$E = \frac{f}{2}RT \quad \text{et} \quad C_V = \frac{f}{2}R$$

Chaleurs spécifiques des gaz parfaits

Les résultats pour les molécules rigides sont résumés dans le tableau III.

Si f est le nombre de degrés de liberté, l'énergie cinétique de la mole sera $\frac{f}{2}RT$, donc :

$$C_V = \frac{f}{2}R \quad C_P = \frac{f}{2}R + R = \frac{f+2}{2}R$$

Dans le cas de molécules non rigides, il faut tenir compte des degrés de liberté de vibration. Mais l'expérience montre qu'une molécule ne vibre qu'à partir d'une certaine température : le nombre de degrés de liberté dépend donc de la température, ce qui est en contradiction avec la théorie cinétique. Cela provient de ce que la théorie cinétique est fondée sur les lois de Newton, et que nous arrivons ici à une de leurs limites de validité : celle des petites dimensions.

La distribution des vitesses de Maxwell

Prenons plus particulièrement une molécule d'un gaz en contact thermique avec un thermostat à la température T. La distribution canonique est applicable à cette molécule qu'on supposera monoatomique. L'énergie de cette molécule est, en négligeant l'action du champ de pesanteur :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^2}{m}$$

$\vec{p}$ étant la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{V}$ de la molécule de masse m.

L'état de la molécule est décrit par les trois coordonnées de position x, y, z et les trois coordonnées de quantité de mouvement p_x, p_y et p_z. Cherchons la probabilité pour que la molécule ait des coordonnées comprises entre x et $x + dx$, y et $y + dy$, z et $z + dz$, p_x et $p_x + dp_x$, p_y et $p_y + dp_y$, p_z et $p_z + dp_z$. Ces intervalles pour les variables de position et de quantité de mouvement définissent dans ce qu'on appelle l'espace des phases un volume qu'on appellera $d^6\nu$ et qui vaut

$$d^6\nu = dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z$$

En utilisant la distribution canonique, la probabilité pour que la molécule se trouve dans le volume $d^6\nu$ est proportionnelle à :

$$e^{-1/2\beta mV^2}\,d^6\nu$$

On peut exprimer la probabilité précédente en utilisant la vitesse au lieu de la quantité de mouvement :

$$V^2 = p^2/m^2;$$

le volume défini est $d\nu' = dx\,dy\,dz\,dV_x\,dV_y\,dV_z$ et la probabilité est proportionnelle à $e^{-1/2\beta mV^2}\,d^6\nu'$.

A partir de cette probabilité, on peut déduire un certain nombre de résultats intéressants. En particulier, on peut chercher parmi les N molécules du gaz parfait le nombre de molécules ayant une vitesse comprise entre V et $V + dV$, c'est-à-dire la quantité $f(V)\,d^3V$. On l'obtient en multipliant $e^{-1/2\beta mV^2}\,d^6\nu'$ par le nombre total N et en divisant cette quantité par $dx\,dz\,dy$:

(46) $$dN = f(V)\,d^3V = Ce^{-1/2\beta mV^2}\,d^3V$$

La relation **(46)** est appelée *distribution des vitesses de Maxwell.* On remarquera qu'elle ne dépend pas de la position (x, y, z) des molécules, mais uniquement de leur vitesse. La constante C se détermine par une condition de normalisation : la somme de toutes les expressions précédentes doit être égale à N,

soit avec $$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

$$N = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2\,\beta mV_x^2}\,dV_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2\,\beta mV_y^2}\,dV_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2\,\beta mV_z^2}\,dV_z$$

On trouve

$$C = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$

Dans l'expression dN ci-dessus, l'extrémité du vecteur vitesse $\vec{V}$ peut se trouver n'importe où à l'intérieur du volume $4\pi V^2 dV$ limité par deux sphères de rayon V et $V + dV$. Finalement, la *distribution maxwellienne du module des vitesses* s'écrit :

$$dN = \frac{N}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{2m}{kT}\right)^{3/2} e^{-1/2\,\beta mV^2}\,V^2 dV$$

L'expression dN/dV présente un maximum : quand V croît, le facteur exponentiel décroît, mais V^2 croît. La vitesse pour laquelle dN/dV est maximal est appelée *vitesse la plus probable* et s'obtient en annulant la dérivée de (dN/dV) [*fig.* 40]. Elle a pour valeur :

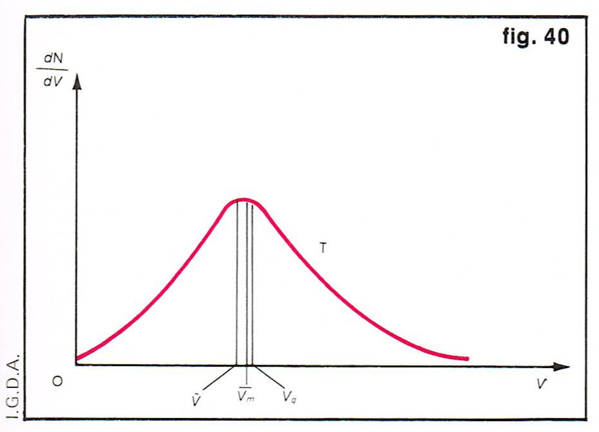
$$\tilde{V} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Quant à la vitesse quadratique moyenne, rappelons qu'elle vaut :

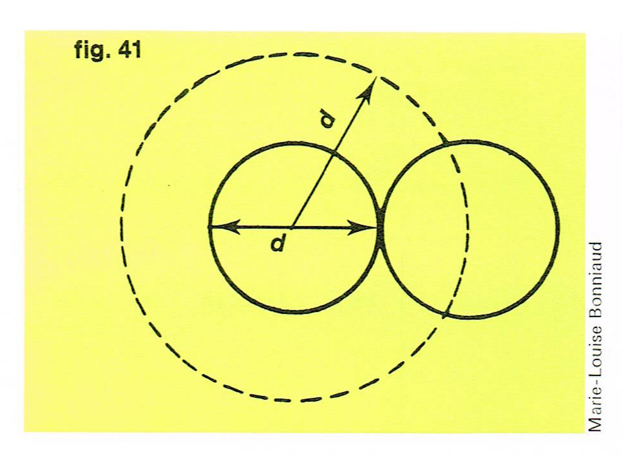
$$V_q = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Il ne faut pas confondre V_q avec la vitesse moyenne qui est nulle et la valeur moyenne de la vitesse qui vaut :

$$V_m = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}$$



I.G.D.A.



Marie-Louise Bonniaud

◀ *A gauche, figure 40 : distribution maxwellienne des vitesses. A droite, figure 41 : sphère de protection des molécules.*

On remarque que les expressions de V, V_q et V_m sont toutes trois proportionnelles à $(kT/m)^{1/2}$. Les vitesses augmentent avec la température, et, pour une température donnée, elles diminuent quand la masse moléculaire augmente. Calculons à titre d'exemple la vitesse quadratique moyenne de molécule d'azote dont la masse molaire vaut 28 g. A la température ordinaire T = 300 °K, V_q vaut environ 500 m/s.

Ce nombre est de l'ordre de grandeur de la vitesse du son dans l'azote.

Chaleur spécifique des solides

Il peut sembler étonnant qu'on parle maintenant de la chaleur spécifique des solides alors qu'on est en train de traiter des propriétés des gaz parfaits. Cependant, comme nous allons le voir, on peut utiliser ici le théorème de l'équipartition de l'énergie à condition que la température T soit suffisamment élevée. Soit un corps solide simple constitué de N atomes. Chaque atome a dans le solide une position d'équilibre stable, l'ensemble formant un réseau cristallin. Chacun des atomes peut cependant se déplacer légèrement autour de sa position d'équilibre. La force de rappel (due aux atomes voisins et nulle à l'équilibre) est proportionnelle en première approximation au déplacement. Le mouvement de l'atome est celui d'un oscillateur harmonique à trois dimensions. Son énergie suivant la direction x, par exemple, s'écrit :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}x + \frac{1}{2}\alpha x^2$$

où m est la masse de l'atome et α la constante de rappel.

En moyenne, chacun des degrés de liberté a l'énergie $\frac{1}{2}k$.

Soit, pour $\bar{\varepsilon}_x$, deux fois $\frac{1}{2}kT$. De même, $\bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}_z = kT$.

L'énergie moyenne d'un atome est alors :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y + \bar{\varepsilon}_z = 3\,kT$$

Pour une mole de solide contenant $\mathcal{N}$ (nombre d'Avogadro) atomes, l'énergie est :

$$\bar{E} = 3\,\mathcal{N}kT = 3\,RT$$

Rappelons que la chaleur spécifique molaire vaut par définition :

$$C_V = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_V$$

Soit ici : $C_V = 3$ R. Remarquons que ce résultat est très général, puisqu'il ne dépend ni de la masse atomique, ni de la constante de rappel, ni de la température. Il est connu sous le nom de loi de Dulong et Petit et s'énonce ainsi : *La chaleur spécifique molaire des solides est indépendante de la température et égale à 3 R à condition que la température soit suffisamment élevée.*

Une théorie due à Einstein montre que la loi de Dulong et Petit est valable pour des températures $T > \theta$ ou $\theta = \frac{\hbar\omega}{k}$; $\hbar$ est la constante de Planck divisée par 2π et ω la pulsation de l'atome.

Pour le cuivre, par exemple, θ = 230 °K. Cette température θ est appelée *température d'Einstein*. Lorsque T est inférieure à θ, et décroît, Einstein a montré que C_V décroît également. A la limite, C_V tend vers zéro quand T tend vers zéro.

Les gaz réels

Libre parcours moyen

La loi de Boyle-Mariotte (PV = RT) conduit, lorsque la pression n'est plus très faible, à des conséquences absurdes : lorsque la pression P croît, le volume V décroît et à la limite tend vers zéro, à température constante. En fait, lorsque la pression n'est plus très faible, on ne peut plus considérer que les molécules sont ponctuelles. Dans le cas de molécules monoatomiques, imaginons qu'on puisse les comparer à de petites sphères solides de diamètre d. Un choc entre deux molécules se produit quand la distance entre leurs centres est égale à d. Une molécule ne laisse pas pénétrer une autre molécule à l'intérieur d'une *sphère de protection* de rayon d (*fig.* 41). Bien entendu, la réalité est beaucoup moins simple, même pour des molécules monoatomiques, cependant en dessous d'une certaine distance entre les centres, r_0, les forces répulsives deviennent rapidement croissantes, et r_0 est de l'ordre de ce qui permet d'utiliser le modèle ci-dessus. Pour les molécules polyatomiques, on peut aussi définir une sphère de protection.

Les molécules subissent entre elles des collisions supposées élastiques. Une molécule qui vient de subir une collision change de vitesse et de direction et se propage en ligne droite jusqu'à ce qu'elle subisse une nouvelle collision. Le segment de trajectoire parcouru entre deux collisions s'appelle *libre parcours moyen*.

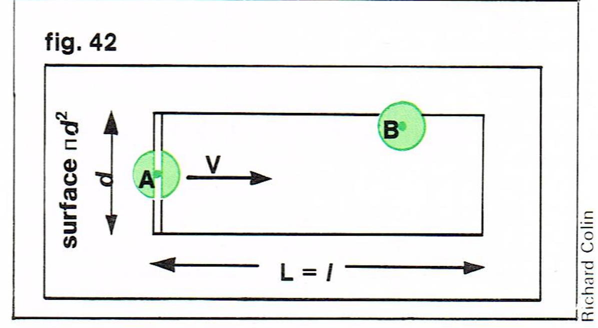
Pour calculer le libre parcours moyen, faisons le raisonnement suivant. Considérons une molécule A qui, en se déplaçant, rencontrera les molécules qui ne sont pas entièrement à l'extérieur du cylindre de base πd^2 (*fig.* 42). Dans un cylindre de longueur L, il y a, si N est le nombre de molécules dans le volume total V, $\frac{N}{V}\cdot\pi d^2 L$. Si L est égale au libre parcours moyen l, la molécule subira un seul choc, c'est-à-dire qu'il n'y a dans le cylindre qu'une seule autre molécule :

$$1 = \frac{N}{V}\cdot\pi d^2 l$$

D'où la valeur du libre parcours moyen :

$$l = \frac{V}{N\pi d^2}$$

En fait, ce calcul est simplifié puisqu'on a supposé la molécule B immobile, ce qui n'est pas le cas. Un calcul plus rigoureux donne :



Richard Colin

◀ *Figure 42 : la molécule A va heurter la molécule B dont le centre est à l'intérieur d'un volume de section πd^2.*

Tableau IV Coefficients *a* et *b* de Van der Waals (rapportés à une kilomole)								
Gaz	He	Hg	H_2	O_2	N_2	CO_2	HCl	H_2O
10^{-4} *a* en $N.m^4$	0,34	29	2,5	14	13	36	37	54
10^3 *b* en m^3	23	55	26	32	38	43	41	31

▲ ***Tableau IV : coefficients a et b de Van der Waals (rapportés à une kilomole).***

$$l = \frac{V}{4/3\ \pi d^2}$$

ce qui ne change pas l'ordre de grandeur de l. On remarque que le libre parcours moyen diminue quand le volume des molécules augmente ainsi que leur dimension, ce qui se comprend facilement puisque, dans ce cas, les chocs sont plus nombreux. Donnons un ordre de grandeur de l : à la pression atmosphérique et à la température ordinaire, le libre parcours moyen est d'environ 10^{-7} m pour des molécules d'un rayon de 3 Å ; à une pression de 10^{-6} atm, il vaut environ 10 cm.

Équation d'état de Van der Waals

Dans le cas de gaz réels, il faut tenir compte du volume des molécules et des forces exercées par les molécules les unes sur les autres. Ce qui amène à introduire la notion de *pression interne* a/V^2 et de *covolume b*. L'équation suivante a été proposée il y a un siècle par Van der Waals :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

a et b sont des constantes qui varient suivant les gaz et sont déterminées expérimentalement. On remarque, en comparant les valeurs fournies par le tableau IV que, pour l'hélium et l'azote, le covolume b est du même ordre ; par contre, la pression interne est quarante fois plus faible pour l'hélium, dont les molécules sont sphériques et dépourvues d'affinité chimique, que pour l'azote.

Essayons de tracer les isothermes $P = f(V)$ comme on l'a déjà fait pour les gaz parfaits. Il y a deux formes d'isothermes (*fig.* 43) séparées par une isotherme qui possède un *point d'inflexion à tangente parallèle à l'axe des abscisses*. Pour déterminer les coordonnées du point d'inflexion (P_c, V_c) ainsi que la température de l'isotherme T_c, il faut écrire que la dérivée première et la dérivée seconde de

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$$

sont nulles, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = \frac{2\ RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0$$

On tire des trois équations précédentes les coordonnées du point d'inflexion et la température critique :

$$V_c = 3\,b \qquad T_c = \frac{8\,a}{27\,bR} \qquad P_c = \frac{a}{27\,b^2}$$

En introduisant les notations

$$V_r = \frac{V}{V_c} \qquad T_r = \frac{T}{T_c} \qquad P_r = \frac{P}{P_c}$$

où P_r, V_r et T_r sont respectivement la pression, la température et le volume *réduits*, l'équation de Van der Waals prend la forme *réduite :*

$$\left(P_r + \frac{3}{V_r^2}\right)(3\,V_r - 1) = 8\,T_r$$

Cette équation d'état réduite ne dépend plus de la nature du gaz. Nous aurons l'occasion de reparler de l'équation de Van der Waals dans l'étude des changements de phase.

Changements de phase

Généralités

Tout corps peut exister sous différentes formes qu'on appelle *phases* et qui correspondent à des types différents d'assemblage de molécules. Une substance peut exister sous trois phases, *solide*, *liquide* ou *gazeuse* (la phase gazeuse est parfois appelée vapeur). L'eau, par exemple, peut exister sous forme de glace, de liquide ou de vapeur. La phase solide est la plus complexe, car il en existe plusieurs formes correspondant à des structures cristallines différentes. Selon la *température* et la *pression* auxquelles il est soumis, un corps apparaîtra dans l'une ou l'autre de ses phases. Quand on fait varier la pression ou la température, une phase peut se transformer en une autre phase (*fig.* 44). Ainsi, en fondant, un solide donne un liquide ; ce même liquide donne en se vaporisant une vapeur.

Il peut arriver que deux phases coexistent, on dit alors qu'elles sont en *équilibre*. Prenons l'exemple d'une masse d'étain qu'on fait fondre dans un creuset, puis qu'on laisse refroidir. La température mesurée en plongeant la soudure chaude d'un thermocouple dans le creuset est initialement de 300 °C environ, elle décroît, puis se stabilise aux environs de 230 °C dès que la phase solide apparaît. Le palier de la *figure* 45 correspond à la coexistence de la phase

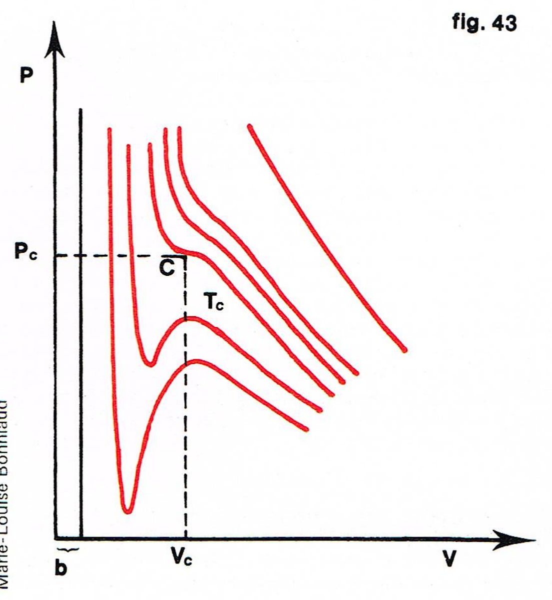
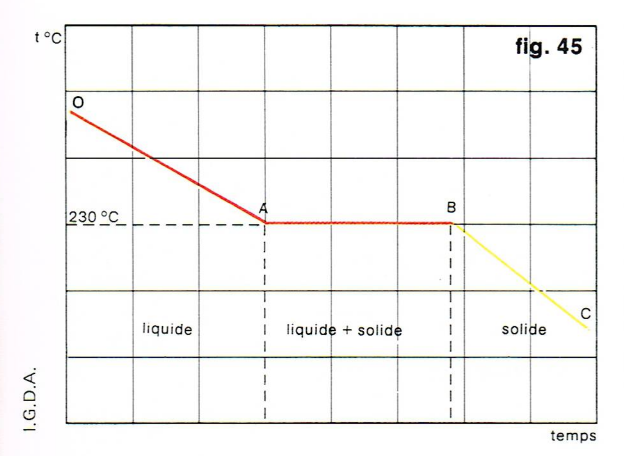


fig. 44

vapeur
condensation
sublimation
vaporisation
liquéfaction ou condensation
fusion
solidification
solide
liquide
Richard Colin

▶ ***A gauche, figure 43 : isothermes de Van der Waals. A droite, figure 44 : les différents changements de phase.***



◀ ***Figure 45 : courbe de refroidissement de l'étain fondu.***

solide et de la phase liquide. Quand tout l'étain est devenu solide, la température décroît à nouveau.

Prenons l'exemple plus général d'un corps pur qui peut exister sous deux phases 1 et 2, N_1 molécules étant dans la phase 1 et N_2 dans la phase 2 ($N_1 + N_2 = C^{te}$). Pour une température et une pression données, on peut se demander si la phase 1 existe seule ($N_2 = 0$) ou si la phase 2 existe seule ($N_1 = 0$) ou bien encore si les deux phases existent ($N_1 \neq 0$, $N_2 \neq 0$). Pour répondre à cette question, il faut d'abord introduire des critères d'équilibre des systèmes à température et à pression constantes.

Équilibre d'un système en contact avec un thermostat

Soit un système A en contact avec un thermostat A′ dont la température T′ et la pression P′ sont constantes. L'ensemble $A^* = A + A'$ forme un système isolé d'énergie E^* (*fig.* 46). Le nombre d'états accessibles Ω^* du système complet est le produit du nombre d'états accessibles Ω et Ω' des systèmes A et A′ respectivement : $\Omega^* = \Omega\Omega'$. D'après la relation entre l'entropie et le nombre d'états accessibles $S = k \text{ Log } \Omega$:

(47) $$S^* = k \text{ Log } \Omega^* = k \text{ Log } \Omega + k \text{ Log } \Omega' = S + S'$$

Supposons que le thermostat A′ reçoive (du système A) la quantité de chaleur Q′. Sa variation d'entropie est, puisque T′ est constante :

$$\Delta S' = \frac{Q'}{T'}$$

L'énergie moyenne de A′ varie de $\Delta E'$ et, d'après le premier principe :

$$Q' = \Delta E' - W'$$

Le travail W′ reçu par le thermostat A′ est dû à la variation de volume ΔV de A, donc pour A′ la variation de volume est $-\Delta V'$ et

$$W' = -P'(-\Delta V) = P'\Delta V$$

D'autre part, l'énergie totale $E + E'$ étant constante, on a $\Delta E' = -\Delta E$. Finalement, en différentiant la relation **(47)**

$$\Delta S^* = \Delta S + \Delta S' = \Delta S - \frac{(\Delta E + P'\Delta V)}{T'} = -\frac{-T'\Delta S + \Delta E + P'\Delta V}{T'}$$

Introduisons pour simplifier une nouvelle fonction

(47bis) $$G = E - T'S_1 + P'V_1$$

La fonction G est appelée *énergie libre de Gibbs* ou *enthalpie libre* du système A à pression P′ et température T′ constante. ΔG a pour valeur :

$$\Delta G = \Delta E - T'\Delta S + P'\Delta V$$

D'où la relation entre la variation d'entropie ΔS^* du système total isolé A et la variation d'enthalpie libre ΔG du système A

$$\Delta S^* = -\frac{\Delta G}{T'}$$

Entropie d'un système isolé à l'équilibre

Calculons le nombre d'états accessibles de A tels que l'énergie de A soit comprise entre E et $E + \delta E$. A étant à l'équilibre, tous les états ont la même probabilité. On cherche donc, parmi tous les états Ω, les états Ω (E) tels que A ait une énergie comprise entre E et $E + \delta E$. A′ a alors l'énergie $E' = E - \delta E$ et un nombre d'états accessibles $\Omega'(E^* - E)$. Le nombre d'états accessibles du système est alors :

(48) $$\Omega^*(E) = \Omega(E)\,\Omega'(E^* - E)$$

La probabilité pour A d'avoir une énergie comprise entre E et $E + \delta E$ est

(49) $$\mathbf{P}(E) = \frac{\Omega^*(E)}{\Omega^*_{total}}$$

ou Ω^*_{total} est constant et représente le nombre d'états accessibles total.

Calculons le maximum de **P** (E) ou plutôt, parce que c'est plus commode, de Log **P** (E). Ce maximum a lieu pour

$$\frac{\partial \text{ Log } \mathbf{P}(E)}{\partial E} = 0$$

Soit [d'après les relations **(48)** et **(49)**] :

(50) $$\frac{\partial \text{ Log } \Omega(E)}{\partial E} - \frac{\partial \text{ Log } \Omega'(E^* - E)}{\partial E'} = 0$$

Or, d'après la relation entre le paramètre de température et l'entropie :

$$\frac{1}{kT} = \frac{1}{k}\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial \text{ Log } \Omega(E)}{\partial E}$$

et de même :

$$\frac{1}{kT'} = \frac{\partial \text{ Log } \Omega'(E^* - E)}{\partial E'}$$

On déduit de ces relations la propriété très importante suivante : lorsque les systèmes A et A′ sont en équilibre thermique, leurs températures T et T′ sont égales et, dans ce cas, la relation **(50)** est vérifiée, c'est-à-dire que **P** (E) est maximal. Il en est de même de Ω^* (E) puisque Ω^*_{total} est une constante. En utilisant de plus la relation $S^* = k \text{ Log } \Omega^*(E)$, on arrive au résultat :

A l'équilibre, l'entropie d'un système isolé est maximale.

Enthalpie libre

Revenons maintenant à la relation $\Delta S^* = -\Delta G/T'$ qui montre que l'entropie S^* du système A^* croît quand l'enthalpie libre G du sous-système A décroît. L'*entropie maximale* S^* de A^* correspond donc à une valeur *minimale* de l'enthalpie libre G. On arrive à cette conclusion :

Quand un système est en équilibre à température et pression constantes, sa fonction enthalpie libre est minimale.

Un calcul analogue montre que, lorsqu'on impose uniquement une température constante, un système est en équilibre lorsque la fonction énergie libre F est minimale ($F = E - TS$).

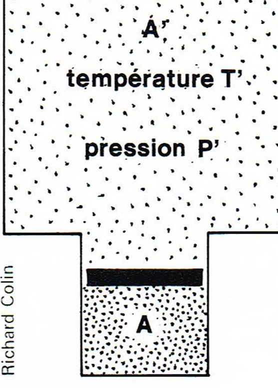
Équilibre entre phases

Considérons un système constitué de deux phases distinctes séparées dans l'espace, et une substance constituée d'un seul type de molécules. Par exemple, ces phases pourraient être un solide et un liquide, ou un liquide et un gaz. En général, nous les noterons phase 1 et phase 2, respectivement. Nous examinerons ce système à une température constante quelconque T et une pression P imposées par le contact avec une source ayant les valeurs correspondantes de température et de pression. A l'exception de petites fluctuations (qui ne nous intéressent pas pour le moment), les deux phases de la substance en équilibre sont toujours à une température T et à une pression P. Nous noterons N_1 le nombre de molécules de la substance sous la forme de phase 1 et N_2 le nombre de molécules sous la forme de phase 2. D'après la conservation de la matière, le nombre total N de molécules doit, naturellement, rester constant, quelle que soit la manière dont les molécules se distribuent entre les deux phases. Nous avons donc :

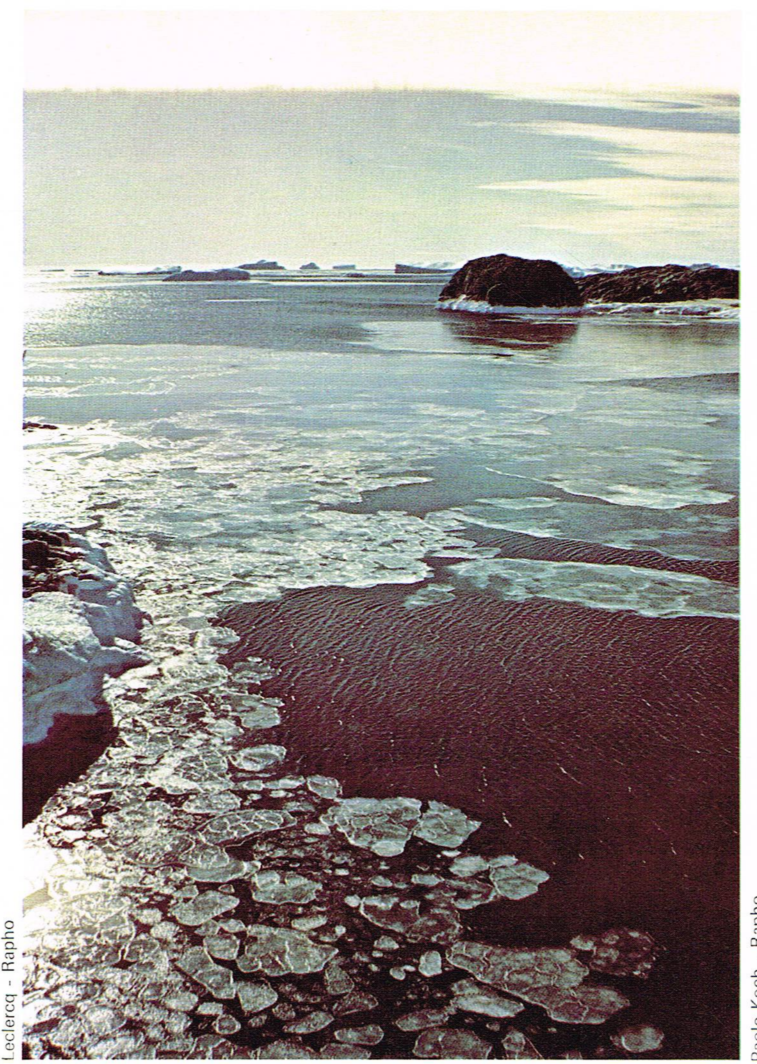
(50bis) $$N_1 + N_2 = C^{te}$$

Les questions intéressantes, comme nous l'avons vu, sont alors les suivantes : à l'équilibre, à une température donnée T et à une pression P, la phase 1 sera-t-elle seule présente, ou la phase 2, ou les deux simultanément ?





▲ ***Figure 46 : le système* A *est en contact avec un thermostat* A′ *à la température* T′ *et à la pression* P′ *constantes.***



Leclercq - Rapho

Paolo Koch - Rapho

▲ ***Équilibre entre phases : à gauche, début de gel de la mer en terre Adélie ; à droite, éruption du Grand Geyser à Yellowstone Park (U. S. A.) ; cette éruption se produit lorsque la colonne d'eau, soulevée par les vapeurs chaudes profondes, entre en ébullition.***

Puisque la température T et la pression P sont maintenues constantes, toutes ces questions peuvent se réduire à l'étude de l'enthalpie libre G du système. Cette enthalpie libre peut être considérée comme une fonction de N_1 et de N_2. Notre formulation générale des conditions d'équilibre affirme alors que les paramètres N_1 et N_2 doivent prendre des valeurs telles que G soit minimal, où G est défini par la relation **(47bis)**. Nous avons donc :

(51) $$G = \bar{E} - TS + PV = \text{minimum}$$

L'énergie moyenne totale $\bar{E}$ du système est ici simplement égale à la somme des énergies moyennes des deux phases, l'entropie totale S du système est égale à la somme des entropies des deux phases et le volume total V du système est égal à la somme des volumes des deux phases. Il en résulte donc que :

$$G = G_1 + G_2$$

où G_1 est l'enthalpie libre de la phase 1 et G_2 celle de la phase 2.

Mais à une température et à une pression données, l'énergie moyenne, l'entropie et le volume d'une phase particulière sont simplement proportionnels à la quantité de phase présente. On peut donc écrire $G_1 = N_1 g_1$ et $G_2 = N_2 g_2$; g_i (T, P) est l'enthalpie libre par molécule de phase *i* à la température T et à la pression P données et caractérise les propriétés intrinsèques de la *i*-ième phase, quelle que soit la quantité présente. G s'écrit donc :

$$G = N_1 g_1 + N_2 g_2$$

où g_1 et g_2 dépendent de T et de P, mais ne dépendent pas des nombres N_1 ou N_2.

Si les deux phases coexistent en équilibre, N_1 et N_2 doivent être tels que G soit minimal en accord avec **(51)**. G doit donc rester constant pour des variations infinitésimales de N_1 et N_2, c'est-à-dire :

$$dG = g_1 dN_1 + g_2 dN_2 = 0$$

ou $$(g_1 - g_2)\, dN_1 = 0$$

puisque la conservation de la matière exprimée par **(47bis)** entraîne $dN_2 = dN_1$. Nous obtenons donc comme condition nécessaire pour la coexistence des deux phases en équilibre la condition suivante :

(52) $$g_1 = g_2$$

Quand cette condition est satisfaite, le transfert d'une molécule d'une phase à l'autre ne change pas la valeur de G qui a bien l'extrémum désiré.

Revenons maintenant à l'enthalpie libre G plus en détail. L'enthalpie libre par molécule g_i (T, P) de chaque phase étant une fonction bien définie caractérisant la phase particulière *i* à la température et à la pression données, nous pouvons alors énoncer les résultats suivants :

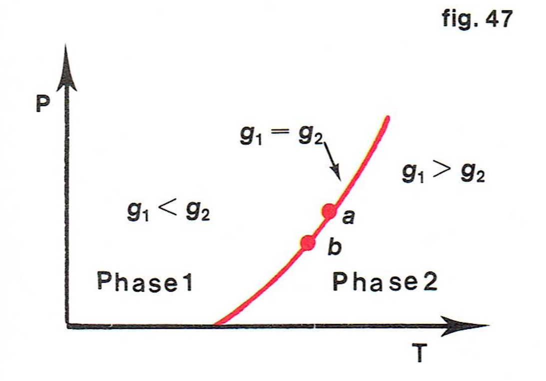
Si T et P sont tels que $g_1 < g_2$, alors la valeur minimale de G est obtenue si toutes les N molécules de la substance se transforment en phase 1 pour $G = Ng_1$. Seule la phase 1 peut alors exister en équilibre stable.

Si T et P sont tels que $g_1 > g_2$, alors la valeur minimale de G est obtenue si toutes les N molécules de la substance se transforment en phase 2 pour $G = Ng_2$. Seule la phase 2 peut alors exister en équilibre stable.

Si T et P sont tels que $g_1 = g_2$, les deux phases coexistent. La valeur G reste alors constante quand N_1 varie. Le lieu des points où T et P sont tels que la condition **(52)** est vérifiée représente alors la *courbe d'équilibre des phases* le long de laquelle les deux phases peuvent coexister en équilibre. Cette courbe, sur laquelle $g_1 = g_2$, divise le plan (PT) en deux régions : dans l'une $g_1 < g_2$ et la phase 1 est la seule stable, et dans l'autre $g_1 > g_2$ et la phase 2 est la seule stable.

Il est possible de caractériser la courbe d'équilibre des phases par une équation différentielle. Dans la *figure* 47,

fig. 47



Marie-Louise Bonniaud

◀ ***Figure 47 : sur la courbe d'équilibre ($g_1 = g_2$) tracée dans le diagramme P, T, les deux phases coexistent.***

considérons un point quelconque, *a* par exemple, situé sur la courbe d'équilibre des phases et correspondant à une température T et à une pression P. La condition **(52)** entraîne alors :

(53) $$g_1\,(T, P) = g_2\,(T, P)$$

Équation de Clausius-Clapeyron

Considérons maintenant un point voisin, tel que *b*, situé aussi sur la courbe d'équilibre des phases et correspondant à une température $T + dT$ et à une pression $P + dP$. La condition entraîne alors :

(54) $$g_1\,(T + dT, P + dP) = g_2\,(T + dT, P + dP)$$

En retranchant **(53)** de **(54)**, nous obtenons donc la condition :

(55) $$dg_1 = dg_2$$

où dg_i est la variation d'enthalpie libre par molécule de phase *i* si cette phase passe d'une température T et d'une pression P au point *a* à une température $T + dT$ et à une pression $P + dP$ au point *b*.

Mais d'après la définition de G, l'enthalpie libre par molécule de phase *i* est simplement :

$$g_i = \frac{G_i}{N_i} = \frac{E_i - TS_i + PV_i}{N_i}$$

ou $$g_i = \bar{\varepsilon}_i - Ts_i + Pv_i$$

où $\bar{\varepsilon}_i = E_i/N_i$ est l'énergie moyenne, $s_i = S_i/N_i$ est l'entropie, et $v_i = V_i/N_i$ est le volume par molécule de phase *i*. Par conséquent :

(56) $$dg_i = d\bar{\varepsilon}_i - Tds_i - s_i dT + Pdv_i + v_i dP$$

Mais l'expression du premier principe nous permet de relier la variation d'entropie ds_i à la quantité de chaleur absorbée par la phase dans cette transformation, c'est-à-dire :

$$Tds_i = d\bar{\varepsilon}_i + Pdv_i$$

Nous obtenons donc simplement :

$$dg_i = -s_i dT + v_i dP$$

En appliquant ce résultat à chaque phase, **(56)** devient :

$$-s_1 dT + v_1 dP = -s_2 dT + v_2 dP$$
$$(s_2 - s_1)\,dT = (v_2 - v_1)\,dP$$

ou

(57) $$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta s}{\Delta v}$$

où $\Delta s = s_2 - s_1$ et $\Delta v = v_2 - v_1$

La relation **(57)** est appelée *équation de Clausius-Clapeyron*.

Considérons un point quelconque de la courbe d'équilibre des phases à une température T et à la pression correspondante P. L'équation **(57)** relie alors la pente d'équilibre des phases en ce point à la variation d'entropie Δs, par molécule, quand la courbe est traversée en ce point, c'est-à-dire quand un changement de phase se produit à cette température et à cette pression. Notons que, si l'on considère une quantité *arbitraire* de N molécules de la substance, les variations d'entropie et de volume sont simplement données par $\Delta S = N\Delta s$, $\Delta V = N\Delta v$. **(57)** peut donc se mettre également sous la forme :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

Puisqu'il y a une variation d'entropie associée à un changement de phase, une certaine quantité de chaleur doit être absorbée. La *chaleur latente de transformation* L_{12} est définie comme la quantité de chaleur absorbée quand une quantité donnée de phase 1 est transformée en phase 2 lorsque les phases coexistent en équilibre. Puisque la transformation se produit à la température constante T, la variation correspondante d'entropie est reliée à L_{12} par

$$\Delta S = \frac{L_{12}}{T}$$

où L_{12} est la chaleur latente à cette température. L'équation de Clausius-Clapeyron peut encore se mettre sous la forme :

(58) $$\frac{dP}{dT} = \frac{L_{12}}{T\Delta V}$$

Si V est le volume molaire, alors L_{12} est la chaleur latente molaire.

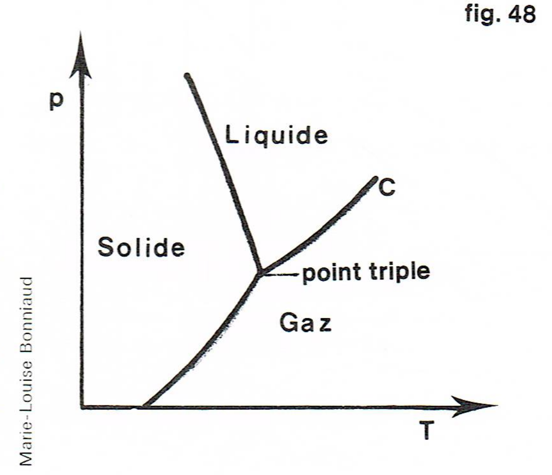
Si V est le volume par gramme, alors L_{12} est la chaleur latente par gramme.

Changement de phase d'un corps simple

Nous avons déjà remarqué que les corps simples peuvent exister sous trois phases différentes : solide, liquide et gaz. (Il peut aussi exister plusieurs phases solides avec différentes structures cristallines.) Les courbes d'équilibre entre ces trois phases peuvent être représentées sur un diagramme, pression-température, de la manière générale indiquée sur la *figure* 48. Ces courbes définissent sur le diagramme les régions correspondant au solide, au liquide, et au gaz. Puisque les trois courbes ne peuvent diviser le plan qu'en trois régions distinctes, elles doivent se couper en un point commun, appelé *point triple*. A cette température et à cette pression uniques, des quantités arbitraires des trois phases peuvent donc coexister en équilibre. (C'est la propriété qui rend le point triple de l'eau si commode pour définir une température standard reproductible.) Au point C, appelé *point critique*, la courbe d'équilibre liquide-gaz s'arrête. La variation de volume ΔV entre une quantité donnée de liquide et de gaz tend alors vers zéro. Au-delà du point C il n'y a plus de changement de phase, puisqu'il n'existe alors qu'une seule phase « fluide ». (La pression est devenue alors si grande que le gaz dense ne peut être distingué du liquide.)

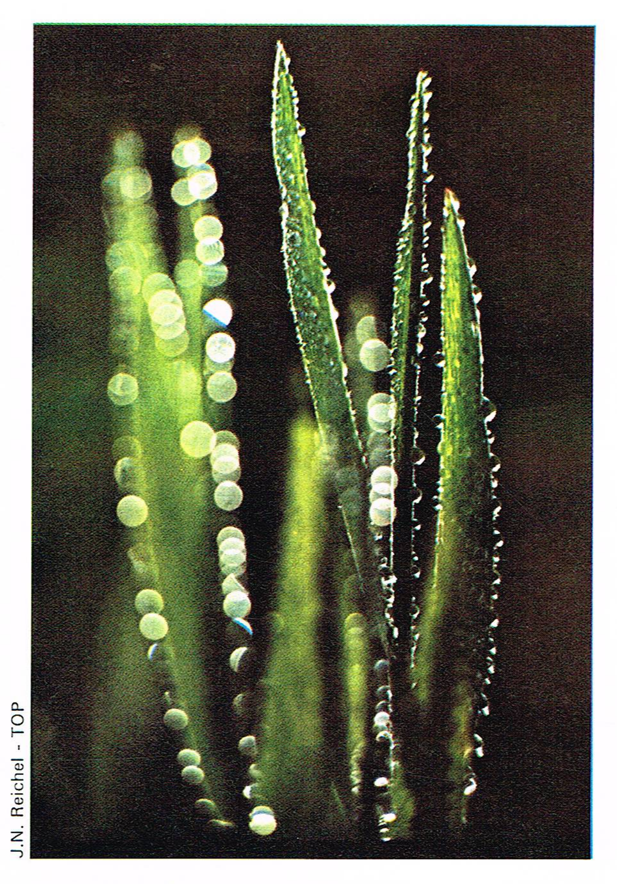
Quand une substance passe de sa forme solide (*s*) à sa forme liquide (*l*), son entropie (degré de désordre) s'accroît presque toujours (sauf dans le cas de l'hélium ^{3}He solide à très basse température). Par conséquent, la chaleur latente L_{sl} correspondante est positive, et une quantité de chaleur est absorbée par la transformation. Dans la plupart des cas, le solide augmente de volume au cours de la fusion, c'est-à-dire $\Delta V > 0$. Dans ce cas, l'équation de Clausius-Clapeyron montre que la pente de la courbe d'équilibre solide-liquide (c'est-à-dire la courbe de fusion) est positive. Il y a quelques substances, comme l'eau, qui

fig. 48



Marie-Louise Bonniaud

◀ ***Figure 48 : diagramme des courbes de changement de phase d'un corps pur ; au point C, appelé point critique, la courbe d'équilibre liquide-gaz s'arrête.***



▶ *La rosée est une vapeur qui, à la fraîcheur du matin, perle en gouttelettes très fines sur les végétaux.*

J.N. Reichel - TOP

se contractent lors de la fusion, c'est-à-dire $\Delta V < 0$. Pour celles-ci, la pente de la courbe de fusion doit donc être négative (comme sur la *fig.* 48).

Calcul approché de la pression de vapeur

L'équation de Clausius-Clapeyron peut être utilisée pour obtenir une expression approchée de la pression de vapeur en équilibre avec un liquide (ou un solide) à la température T. Cette pression est appelée *pression de vapeur* du liquide (ou du solide) à cette température. L'équation **(58)** appliquée à une mole de la substance donne :

(59)
$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T\Delta V}$$

où $L = L_{12}$ est la chaleur latente de vaporisation par mole et V le volume molaire. Soit 1 l'indice de la phase liquide (ou solide) et 2 celui de la vapeur. Nous avons alors :

$$\Delta V = V_2 - V_1 \approx V_2$$

puisque la vapeur est beaucoup moins dense que le liquide (ou le solide) : $V_2 \gg V_1$. Supposons également que la vapeur puisse être considérée comme un gaz parfait, c'est-à-dire que son équation d'état pour une mole soit simplement :

$$PV_2 = RT$$

alors :

$$\Delta V \approx V_2 = \frac{RT}{P}$$

Avec ces approximations, **(59)** devient :

(60)
$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dT} \approx \frac{L}{RT^2}$$

Généralement, L est approximativement indépendant de la température. **(60)** peut alors être intégré immédiatement, ce qui donne :

$$\text{Log } P = -\frac{L}{RT} + C^{te}$$

ou :

(61)
$$P \approx P_0\, e^{-L/RT}$$

où P_0 est une certaine constante.

Nous voyons ainsi que la variation de la pression de vapeur en fonction de la température est déterminée par la valeur de la chaleur latente. Cette chaleur latente est approximativement l'énergie nécessaire pour dissocier une mole de liquide (ou de solide) en molécule individuelle largement séparée. Elle doit donc être plus grande que l'énergie thermique RT par mole si le liquide (ou le solide) doit être une phase non dissociée. Puisque $L \gg RT$, la pression de vapeur donnée par **(61)** est donc une fonction très rapidement croissante de la température T.

Notons qu'il serait possible de calculer la pression de vapeur à partir du premier et du second principe. En fait, la connaissance de la constitution microscopique de chaque phase nous permet de calculer le nombre d'états accessibles à cette phase. Son entropie comme son énergie moyenne peuvent donc être déterminées pour calculer l'enthalpie libre par mole en fonction de T et de P. La condition d'équilibre fondamentale :

$$g_1(T, P) = g_2(T, P)$$

donne alors une équation qui permet de tirer P en fonction de T. On peut donc trouver une expression qui relie la pression de vapeur à la température sans faire intervenir de constante de proportionnalité inconnue (telle que P_0). Des calculs microscopiques de cette sorte ont effectivement été réalisés dans ces cas simples.

Application de l'équation de Van der Waals

L'équation de Van der Waals dont on a déjà parlé représente assez correctement les isothermes des gaz réels. La « continuité » des états gazeux et liquide conduit à chercher si la même équation d'état est applicable au liquide.

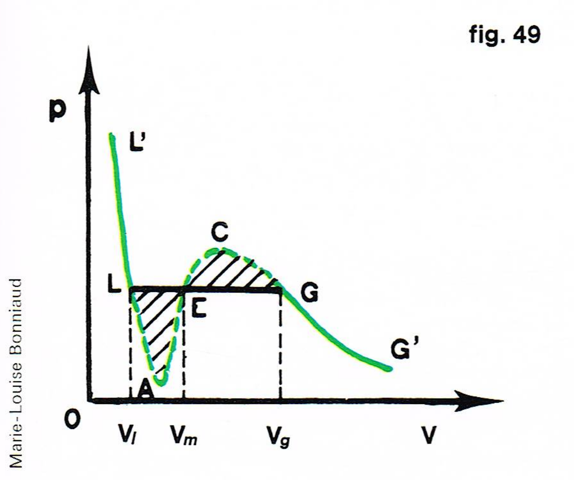
Pour des températures supérieures à la température critique, les isothermes de Van der Waals ont une pente toujours négative $(\partial P/\partial V)_T < 0$ et une forme qui se rapproche des isothermes expérimentales. Par contre, pour des températures inférieures à la température critique, les



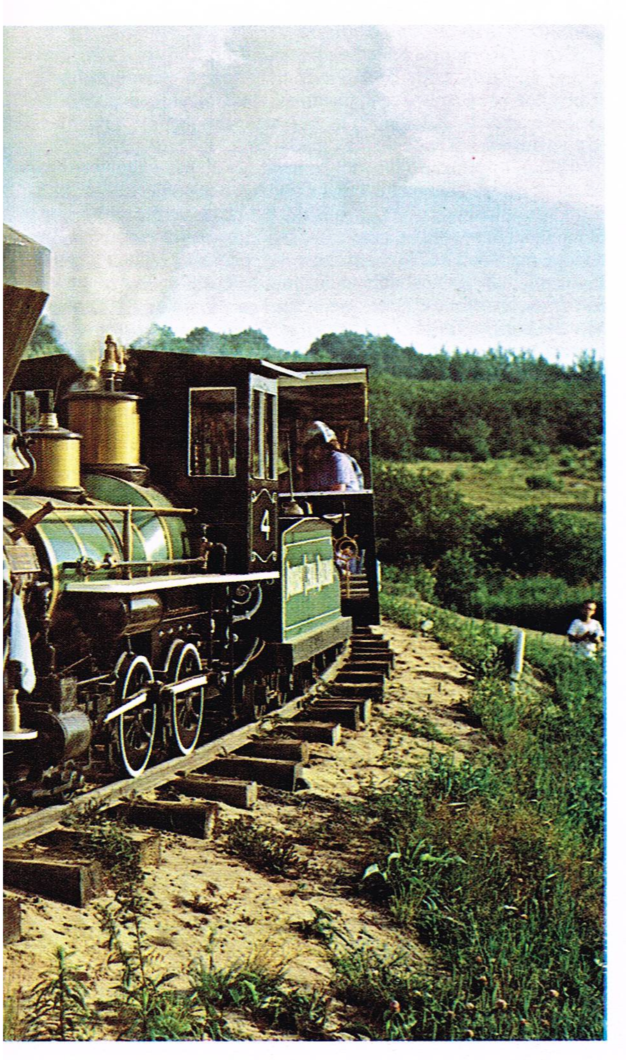
▶ *La locomotive à vapeur, une application des lois de la thermodynamique.*

Serraillier - Rapho

isothermes de Van der Waals ne fournissent pas le palier de vaporisation LG de la *figure* 49. La portion AC de l'isotherme de Van der Waals est inobservable. Elle correspondrait à un domaine où la pression et le volume augmenteraient en même temps $[(\partial P/\partial V)_T > 0]$, ce qui est irréalisable. En revanche, les débuts des portions LA et GC de l'isotherme sont observables comme états *métastables*. Le palier de vaporisation LG coupe l'isotherme théorique de façon que les deux aires hachurées soient égales. On peut l'expliquer de la façon suivante : imaginons que le fluide décrive le cycle isotherme réversible LAECGL. D'après le second principe, le travail doit être nul. Or, ce travail est représenté par la différence des aires hachurées de la *figure* 49.







▲ ***A gauche, figure 49 : isotherme de Van der Waals et palier de liquéfaction. Ci-dessus, les gouttelettes visibles sur ce verre de boisson fraîche proviennent de la condensation de la vapeur d'eau sur les parois froides.***

Les statistiques quantiques

Formulation du problème statistique

Il existe trois statistiques : celle de *Fermi-Dirac*, que suivent en particulier les électrons, celle de *Bose-Einstein*, qui s'applique notamment aux *photons*, et celle de *Maxwell-Boltzmann*, qui ne correspond à aucun système physique mais qui constitue la limite commune des deux autres statistiques et peut s'appliquer à des systèmes de particules à des températures pas trop basses.

Considérons un gaz constitué de N particules identiques contenues dans un volume V à la température T. Nous allons utiliser les notations suivantes : les états d'énergie d'une particule seront numérotés avec l'indice r ou s, et l'énergie d'une particule dans un état r sera appelée ε_r, n_r sera le nombre de particules dans l'état r. Les états d'énergie de tout le gaz seront notés par l'indice R. Avec ces notations, en négligeant les interactions entre particules, l'énergie du système quand il est dans l'état R avec n_1 particules dans l'état $r = 1$, n_2 dans l'état $r = 2$... s'écrit :

$$E_R = n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + ... = \sum_r n_r\varepsilon_r \quad (62)$$

On a, d'autre part, la relation entre les n_r et N :

$$n_1 + n_2 + n_3 + ... = \sum_r n_r = N \quad (63)$$

Exprimons maintenant la fonction de partition du gaz.

$$Z = \sum_R e^{-\beta E_R} = \sum_R e^{-\beta(n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + ...)} \quad (64)$$

La somme ci-dessus se fait sur toutes les valeurs de R, c'est-à-dire sur toutes les valeurs des nombres n_1, n_2, n_3. Puisque $\exp[-\beta(n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + ...)]$ est la probabilité relative de trouver le gaz dans un état particulier où n_1 particules sont dans l'état 1, n_2 particules dans l'état 2..., on peut écrire le nombre moyen de particules $\bar{n}_s$ dans l'état s :

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_R n_s \exp[-\beta(n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + ... + n_s\varepsilon_s + ...)]}{\sum_R \exp[-\beta(n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + ...)]} \quad (65)$$

En remarquant que le numérateur est la dérivée multipliée par $-\beta$ de Z par rapport à ε_s, on obtient :

(66) $$\bar{n}_s = -\frac{1}{\beta}\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_s} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \operatorname{Log} Z}{\partial \varepsilon_s}$$

Ainsi, le nombre moyen de particules $\bar{n}_s$ ayant l'énergie ε_s peut s'exprimer en fonction de Z comme la plupart des grandeurs thermodynamiques.

Statistiques de Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein et Fermi-Dirac

Statistique de Maxwell-Boltzmann

On considère dans ce cas que les particules sont *discernables :* une permutation entre deux particules ayant des énergies différentes fournit un nouvel état du gaz, même si les nombres $(n_1, n_2, n_3, ...)$ sont inchangés. Dans cette statistique, il ne suffit pas de savoir *combien* de particules sont dans un état r mais aussi *quelles* particules sont dans cet état. n_r peut prendre les valeurs $n_r = 1, 2, 3, ...$ à condition que la somme satisfasse la condition :

(67) $$\sum_r n_r = N$$

Statistique de Fermi-Dirac

Les particules qui suivent cette statistique s'appellent des *fermions*. Elles sont *indiscernables*, et il suffit de connaître la distribution $(n_1, n_2, ...)$ sans se préoccuper de savoir quelles sont les particules qui se trouvent dans tel ou tel état r. La condition **(63)** doit être satisfaite, mais le nombre de particules n_r est égal à zéro ou à un :

$$n_r = 0, 1$$

Statistique de Bose-Einstein

Les particules qui suivent cette statistique sont appelées *bosons* et sont également *indiscernables*. Il suffit alors de connaître la distribution $(n_1, n_2, n_3, ...)$, n_r peut varier de 1 à N, mais la condition **(63)** doit être satisfaite.

Nous allons étudier maintenant un cas particulier de la statistique de Bose-Einstein qui permet de comprendre le rayonnement thermique.

Statistique des photons

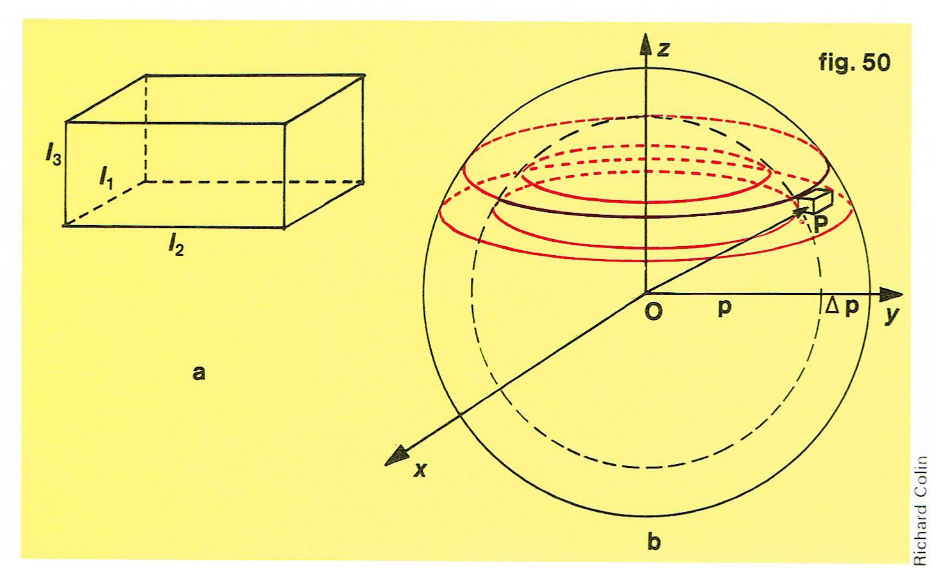
Énergie des photons

Un rayonnement électromagnétique qui se propage dans le vide peut être constitué par des *photons* se déplaçant à la vitesse $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Chacun de ces photons transporte une énergie $E = h\nu$ où h est la constante de Planck. La masse d'un photon au repos est nulle. Par suite de son mouvement, le photon doit être affecté d'une masse relativiste donnée par la formule d'Einstein $E = mc^2$

où $$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

D'autre part, le photon est considéré comme porteur d'une quantité de mouvement :

$$\mathbf{p} = mc = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$



▼ **Figure 50 : *le photon est enfermé dans un parallélépipède de volume $l_1\, l_2\, l_3$ (a), sa quantité de mouvement est comprise entre* p *et* p + Δp (b).**

Au cours d'un choc avec une surface, il y a variation de la quantité de mouvement, soit par modification de la trajectoire, soit par absorption du photon, et, par conséquent, création d'une *pression de radiation*.

Distribution de Planck

Dans le cas des photons, le nombre total de particules d'un système n'est pas fixé. En effet, les parois du récipient peuvent émettre ou absorber des photons, et la contrainte **(63)** n'est plus valable. Calculons le nombre moyen $\bar{n}_s$ en utilisant la formule :

$$\bar{n}_s = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \operatorname{Log} Z}{\partial \varepsilon_s} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_s}$$

$$\operatorname{Log}\left[\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta n_1 \varepsilon_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\beta n_2 \varepsilon_2} \; ... \sum_{n_s=0}^{\infty} e^{-\beta n_s \varepsilon_s}\right]$$

$$= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \operatorname{Log}\left[\sum_{n_s=0}^{\infty} e^{-\beta n_s \varepsilon_s}\right]$$

On remarque que la somme qui apparaît dans le Log est une série géométrique infinie dont le premier terme vaut 1 et dont la raison est $e^{-\beta\varepsilon_s}$. On peut donc calculer $\sum_{n_s=0}^{\infty} e^{-\beta n_s \varepsilon_s}$:

$$\sum_{n_s=0}^{\infty} e^{-\beta n_s \varepsilon_s} = 1 + e^{-\beta\varepsilon_s} + e^{-2\beta\varepsilon_s} + ... = \frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon_s}}$$

D'où : $$\bar{n}_s = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_s}[\operatorname{Log}(1 - e^{-\beta\varepsilon_s})] = \frac{e^{-\beta\varepsilon_s}}{1 - e^{-\beta\varepsilon_s}}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par $e^{-\beta\varepsilon_s}$, on obtient la *distribution de Planck :* $n_s = \dfrac{1}{e^{\beta\varepsilon_s} - 1}$

Densité d'énergie des photons

Considérons une enceinte parallélépipédique, de dimensions l_1, l_2, l_3 (*fig.* 50a) et maintenue à température T. Soit Δn le nombre de photons de fréquence comprise entre ν et $\nu + \Delta\nu$. Calculons le nombre g de leurs états de mouvement possibles. Pour cela, le plus simple est d'utiliser le principe d'indétermination d'Heisenberg qu'on peut résumer ainsi : une des conséquences de la mécanique quantique est l'impossibilité de connaître exactement à un même instant la position et la quantité de mouvement d'une particule. D'où le principe d'indétermination d'Heisenberg : si x est l'abscisse d'une particule, $\mathbf{p}_x$ la projection de sa quantité de mouvement sur l'axe Ox, ces deux grandeurs sont affectées, dans une mesure simultanée, des incertitudes δ_x et $\delta\mathbf{p}_x$ dont le produit est de l'ordre de la constante de Planck h :

$$\delta_x \cdot \delta\mathbf{p}_x = h$$

Choisissons trois axes de coordonnées parallèles aux trois arêtes de l'enceinte. Un photon de fréquence comprise entre $\vec{\nu}$ et $\vec{\nu} + d\vec{\nu}$ a une quantité de mouvement comprise entre $\vec{\mathbf{p}}$ et $\vec{\mathbf{p}} + d\vec{\mathbf{p}}$ dont la grandeur est déterminée par la relation $\mathbf{p} = \dfrac{h\nu}{c}$; l'extrémité P du vecteur représentatif est située entre les deux sphères de rayon **p** et $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$ (*fig.* 50b), donc à l'intérieur d'un volume égal à $4\pi\mathbf{p}^2\Delta\mathbf{p}$.

Par ailleurs, dire que ce photon est enfermé dans un parallélépipède, revient à imposer aux trois coordonnées de sa position les incertitudes :

$$\delta_x = l_1 \qquad \delta_y = l_2 \qquad \delta_z = l_3$$

et, par conséquent, les coordonnées de sa quantité de mouvement sont affectées des incertitudes :

$$\delta\mathbf{p}_x = h/l_1 \qquad \delta\mathbf{p}_y = h/l_2 \qquad \delta\mathbf{p}_z = h/l_3$$

Au total, il est impossible de distinguer entre eux des états dont les quantités de mouvement sont telles que les extrémités P des vecteurs représentatifs sont situées à l'intérieur d'un volume égal à :

$$\delta\mathbf{p}_x\,\delta\mathbf{p}_y\,\delta\mathbf{p}_z = \frac{h^3}{l_1\, l_2\, l_3} = \frac{h^3}{V}$$

V, volume de l'enceinte.

Comme il existe pour l'onde électromagnétique deux vibrations distinctes à plan de polarisation rectangulaire, le nombre d'états réellement distincts les uns des autres pour un photon de quantité de mouvement comprise entre **p** et **p** $+ \Delta$**p** est donc égal à :

$$(68) \qquad g = 2\,\frac{4\,\pi \mathbf{p}^2 \Delta \mathbf{p}}{h^3/V} = \frac{8\,\pi V}{h^3}\,\mathbf{p}^2 \Delta \mathbf{p}$$

et, en remplaçant **p** par sa valeur $\left(\frac{h\nu}{c}\right)$:

$$(69) \qquad g = \frac{8\,\pi V}{c^3}\,\nu^2 \Delta\nu$$

La formule **(69)** a été établie dans le cas d'une enceinte parallélépipédique. On a pu démontrer qu'elle est valable pour une enceinte de forme quelconque, sous réserve de certaines conditions aux limites (en particulier, pas d'anfractuosités dont les dimensions soient de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde).

Par ailleurs, les photons suivant la statistique de Bose-Einstein, la probabilité pour qu'un photon ait l'énergie $h\nu$ est égale à $1/(e^{h\nu/kT} - 1)$. Donc :

$$(70) \qquad \Delta n = \frac{g}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{8\,\pi V}{c^3}\,\frac{\nu^2 \,\Delta\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

où h est la constante de Planck, déjà définie, et où k est la constante de Boltzmann.

Chaque photon possédant une énergie $h\nu$, la densité d'énergie rayonnante dans la bande de fréquence (ν, $\nu + \Delta\nu$) est alors :

$$(71) \qquad U_\nu \Delta\nu = h\nu\,\frac{\Delta n}{V} = \frac{8\,\pi h \nu^3 \Delta\nu}{c^3\,(e^{h\nu/kT} - 1)}$$

Si l'on repère les rayonnements par leur longueur d'onde λ au lieu de leur fréquence ν, il vient en remarquant que $\nu = \frac{c}{\lambda}$ et que $\Delta\nu = - c\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ et en posant $U_\nu \Delta\nu = U_\lambda \Delta\lambda$ l'expression de la densité d'énergie :

$$(72) \qquad U_\lambda = \frac{8\,\pi h c \lambda^{-5}}{(e^{hc/k\lambda T} - 1)}$$

Le rayonnement thermique

Définition

On appelle rayonnement ou, plus généralement, radiation une propagation d'énergie ne nécessitant pas l'intervention d'un milieu matériel. Cette propagation peut donc s'effectuer dans le vide ainsi que dans certains milieux matériels dits « transparents » aux types de rayonnements considérés. Certaines radiations sont de nature corpusculaire (électrons, neutrons, ions, etc.), d'autres, de nature électromagnétique (photons). C'est uniquement dans le cadre de l'interaction de ces derniers avec la matière que nous nous plaçons. Un corps qui reçoit ou qui émet un rayonnement donné est un transformateur d'énergie.

— Dans le cas de la source, si l'énergie émise est empruntée uniquement à l'énergie calorifique, on dit que *le rayonnement est thermique* ou qu'il s'effectue par *incandescence*. Mais il est des cas où l'énergie rayonnée est empruntée à des sources autres que thermiques : fluorescence, chimioluminescence, électroluminescence, triboluminescence, etc.

— De même, le récepteur peut transformer l'énergie reçue en chaleur mais aussi, en partie, en d'autres formes d'énergie : chimique (photochimie), électromagnétique (fluorescence), émission d'électrons (effet photo-électrique), etc.

Aussi bien du côté source que du côté récepteur, nous ne considérerons ici que les échanges de chaleur par l'intermédiaire du rayonnement thermique. Ce sont d'ailleurs ceux qui, sur le plan industriel, sont les plus importants.

Mécanisme de transfert de chaleur par rayonnement

Le mécanisme du transfert de chaleur par rayonnement fait donc intervenir dans le cas général : une source matérielle S qui transforme une partie de son énergie calorifique en émettant un rayonnement électromagnétique; un milieu M où se transmet tout ou partie de ce rayonnement; un récepteur *matériel* R qui absorbe tout ou partie du rayonnement qui l'atteint et le convertit en chaleur.

Nous insistons sur le terme « matériel » : la chaleur est une catégorie d'énergie liée à la matière. Il n'y a pas de chaleur en dehors de la matière; à l'inverse, le milieu M où se transmet l'énergie de rayonnement peut être le vide.

Il convient de noter que, dans le cas des rayonnements purement thermiques, source et récepteur ne jouent pas des rôles foncièrement différents. Le récepteur émet également vers la source, et celle-ci absorbe plus ou moins l'énergie qui lui parvient. Il s'établit donc un bilan énergétique faisant intervenir ces deux transformations d'énergie, émission et absorption : la source S dont la température est plus élevée que celle du récepteur R perd finalement sous forme de rayonnement une énergie supérieure à celle qu'elle absorbe; le récepteur, au contraire, absorbe plus d'énergie qu'il n'en émet. Si l'ensemble S-R est, par ailleurs, énergétiquement isolé, S se refroidit progressivement, alors que R se réchauffe. Lorsque les températures se sont égalisées, l'échange de chaleur ne cesse pas pour autant, mais il y a égalité entre ce que chacun des deux corps envoie sur l'autre et en reçoit; l'équilibre thermique se maintient par compensation.

Par ailleurs, l'émission et l'absorption sont des phénomènes complètement indépendants l'un de l'autre. S émet de l'énergie qui peut être absorbée par R, mais son émission est entièrement indépendante de la présence de R; elle resterait identiquement la même si on enlevait R. L'émission de S peut être modifiée par R mais seulement de façon indirecte : absorbant une partie de l'énergie de rayonnement émise par R, le corps S se refroidit moins vite; à chaque instant, sa température moyenne est plus élevée qu'elle n'aurait été en l'absence de R; S émet donc plus que s'il avait été seul. Mais une même élévation de température, quelle qu'en eût été la cause, aurait conduit au même résultat.

Enfin, l'émission et l'absorption sont des phénomènes produits à l'échelle moléculaire; atomes, molécules, convenablement excités, émettent des photons, perdant ainsi une partie de leur énergie, ou en absorbent, parvenant alors à un niveau d'énergie plus élevé. Toute substance étant absorbante pour le rayonnement qu'elle émet, les photons issus des régions intérieures d'un corps n'auront la possibilité d'en sortir que pour une matière peu compacte : un gaz, par exemple, dont les molécules sont éloignées les unes des autres. Dans les états condensés, solides ou liquides, un photon émis par un atome aura toutes les chances de rencontrer un autre atome qui l'absorbera, à moins que l'émission n'ait eu lieu au voisinage immédiat de la surface. Le rayonnement qui sort d'un corps compact prend effectivement naissance dans une couche superficielle très mince : on schématise en admettant que c'est la surface qui émet. Dans ce cas, l'absorption est, elle aussi, un phénomène superficiel. Pour les gaz et dans quelques cas particuliers, celui de certaines flammes par exemple, il faut introduire une émission et une absorption en volume.

Le corps noir

Lorsqu'un flux d'énergie tombe sur un corps, une partie est absorbée, le reste étant soit réfléchi, soit transmis. Appelons F_i le flux incident et F_a le flux absorbé, et définissons le *facteur d'absorption* $\alpha = F_a/F_i$. α dépend de la nature du corps, de l'état de sa surface, de sa température et de la direction du flux incident. Le facteur d'absorption dépend aussi de la composition spectrale du rayonnement. Si celui-ci est monochromatique, de longueur d'onde λ, on définit un *facteur d'absorption monochromatique* α_λ pour la longueur d'onde λ.

α (ou α_λ) est un nombre sans dimension au plus égal à l'unité. Pour les corps très transparents ou très réfléchissants, il est voisin de zéro. Par contre, si le corps absorbe intégralement toutes les radiations qu'il reçoit, le facteur d'absorption est égal à un, et le corps est appelé *corps noir*.

Formule de Planck

Il est commode dans l'étude du rayonnement d'utiliser l'*angle solide* autour d'un point, qui vaut $4\,\pi$ stéradians pour tout l'espace, et d'autre part la vitesse de la lumière, ce qui nous amène à relier la densité d'énergie U_λ à une nouvelle grandeur, la luminance L_λ :

$$U_\lambda = \frac{4\,\pi L_\lambda}{c}$$

A l'aide de la relation **(72)**, on peut écrire la *formule de Planck :*

(73) $$L_\lambda = \frac{2\,hc^2\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda T} - 1} = \frac{C_1\lambda^{-5}}{e^{C_2/\lambda T} - 1}$$

Les valeurs numériques de C_1 et C_2 sont :

$$C_1 = 12 \cdot 10^{-17}\ \text{W} \cdot \text{m}^2$$
$$C_2 = 1{,}4 \cdot 10^{-12}\ \text{m} \cdot {}^\circ\text{K}$$

et la luminance L_λ s'exprime en $\text{W/m}^3 \cdot \text{st}$.

Formule de Rayleigh et de Wien

Lorsque le produit λT tend vers l'infini, on peut développer l'exponentielle de **(73)** en série :

$$e^{C_2/\lambda T} = 1 + C_2/\lambda T + \frac{1}{2}\,(C_2/\lambda T)^2$$

On trouve alors la formule de Rayleigh :

$$L_\lambda = \frac{C_1}{C_2}\frac{T}{\lambda^4}\left(1 - \frac{1}{2}\,C_2/\lambda T\right)$$

soit à la limite :

$$L_\lambda = \frac{C_1}{C_2}\,\lambda^{-4}T$$

Examinons maintenant le cas où la longueur d'onde tend vers zéro, l'exponentielle $e^{C_2/\lambda T}$ croît, et on peut négliger 1 au dénominateur. La formule de Planck donne alors un résultat obtenu expérimentalement par Wien :

$$L_\lambda = C_1\lambda^{-5}\,e^{-C_2/\lambda T}$$

Loi de Stefan-Boltzmann

Dans le cas du corps noir (repéré avec l'indice ^{0}), on a :

$$L^0 = \int_0^\infty L^0_\lambda\,d\lambda$$

Le calcul peut se faire sans difficultés. Soit :

$$L^0 = C_1\int_0^\infty \frac{\lambda^{-5}d\lambda}{e^{C_2/\lambda T} - 1}$$

le résultat de l'intégrale peut se trouver dans les tables numériques, et on obtient sans difficultés :

$$L^0 = \frac{\pi^4}{15}\frac{C_1}{C_2^4}\,T^4$$

La luminance L^0 et donc la densité d'énergie U varient comme la *puissance quatrième de la température.* C'est la *loi de Stefan-Boltzmann.*

Application : les pyromètres optiques

Les définitions de l'échelle centigrade normale et de l'échelle thermodynamique de Kelvin, qui s'y rattache comme nous le savons, sont valables quelle que soit la température ; mais la mesure de cette dernière à l'aide d'un des thermomètres que nous avons étudiés n'est possible, nous l'avons vu, que si elle n'est pas trop élevée.

Les lois du rayonnement du corps noir ont été vérifiées expérimentalement jusqu'à 1 200 ou 1 500 °C : il paraît légitime de les extrapoler, du côté des très hautes températures, ces lois ayant des bases théoriques bien établies. On peut donc, d'après des mesures faites sur le rayonnement d'un « corps noir » incandescent, évaluer sa température, et cela d'autant plus aisément que les lois de ce rayonnement ont, en fonction de la température *absolue* T, des expressions relativement simples.

Les appareils servant à ces mesures sont appelés *pyromètres optiques;* on peut les classer en trois groupes.

— *Pyromètres à filament disparaissant.* Ils font intervenir une mesure visuelle au voisinage d'une longueur d'onde connue.

La *figure* 51a représente schématiquement l'un des types d'appareils les plus répandus, dit « à filament disparaissant » ; la lentille L forme, de la surface rayonnante du corps noir S, une image S′ dans le plan d'un filament de lampe à incandescence F ; en agissant sur le rhéostat Rh et en observant l'ampèremètre A, on maintient constant le courant d'alimentation, et par suite la luminance. L'œil observe à travers l'oculaire L′ et un verre rouge R, laissant passer (compte tenu de la sensibilité spectrale de l'œil) une bande spectrale étroite, de longueur d'onde « effective » λ.

Le filament F, masquant en partie l'image S′, apparaît, selon les cas, plus sombre ou plus clair que cette image, et semble disparaître (d'où le nom de l'instrument) lorsque sa luminance, pour la longueur d'onde λ, est justement égale à celle de S′. Cette dernière a pour valeur le produit de la luminance de S par le *facteur de transmission* τ de l'optique interposée (τ est par définition le rapport, inférieur à 1, du flux transmis au flux incident).

τ est lui-même le produit d'une constante de l'instrument par un facteur connu, réglable à volonté entre certaines limites, selon la position relative de deux prismes (coins) de verre fumé K et K′ (*fig.* 51b). L'ensemble de ces coins équivaut en effet à une lame à faces parallèles, dont la transmission est d'autant plus faible qu'elle est plus épaisse.

L'instrument permet donc, par pointés successifs sur des corps noirs aux températures T_0, et T inconnue, de déterminer le rapport $\frac{L}{L_0}$ des luminances correspondantes, pour la longueur d'onde λ.

De la formule de Wien, on déduit :

$$\frac{L}{L_0} = \exp\frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)$$

D'où $$\text{Log}\,\frac{L}{L_0} = \frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)$$

et

(74) $$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} - \frac{\lambda}{C_2\log e}\log\frac{L}{L_0}$$

en faisant apparaître le logarithme décimal

$$\log(L/L_0) = \text{Log}\,(L/L_0)\cdot\log e$$

On choisit généralement pour T_0 la température de solidification de l'or (1 336 °K) ; λ est, par exemple, égal à 665 millimicrons et nous avons vu qu'on attribue à C_2 la valeur $1{,}4 \cdot 10^{-12}$ m · °K.

Si la lumière est bien monochromatique, son absorption par le système KK′ se fait de telle façon que des épaisseurs successives égales absorbent la même fraction du flux reçu : le facteur de transmission est donc fonction exponentielle décroissante de l'épaisseur, qui est elle-même fonction linéaire du déplacement relatif de K par rapport à K′, compté perpendiculairement à l'arête des deux coins (*fig.* 51b). On en déduit sans peine que, si x est la valeur lue pour ce déplacement lorsque le filament F « disparaît », la relation **(74)** peut s'écrire sous la forme simple :

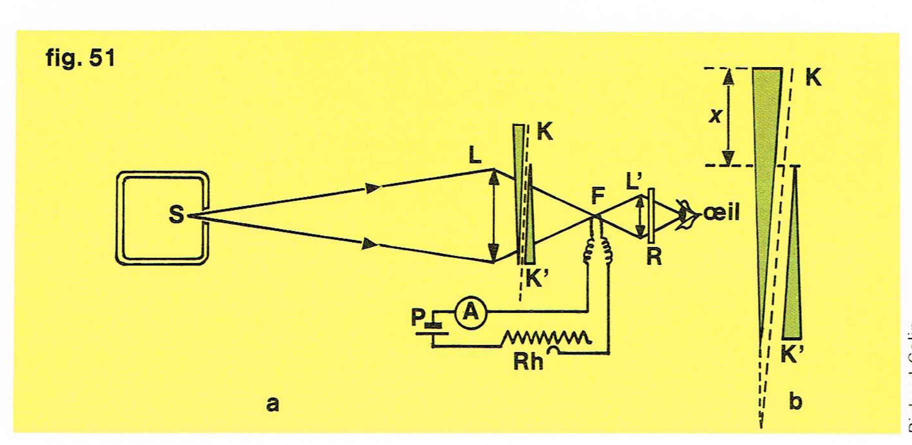
$$\frac{1}{T} = a + bx$$

a et b étant deux constantes de l'instrument.

La précision des mesures au pyromètre à filament disparaissant peut atteindre, au voisinage de 1 800 °K (par exemple), 5° dans l'industrie, et jusqu'à 0,2° pour les mesures de haute précision. L'incertitude sur le rattachement à l'échelle normale résulte de l'incertitude sur la valeur de C_2 et sur les pointés faits à T_0 : elle ne semble pas supérieure à 2° vers 1 800 °K.

— *Pyromètres à rayonnement total.* Si l'on concentre, à l'aide d'une lentille ou d'un miroir convenable, tout le rayonnement émis par un corps noir à T °K, sur un récepteur thermique R, celui-ci s'échauffe jusqu'à ce que la chaleur qu'il perd compense exactement celle qu'il gagne par absorption du rayonnement. L'échauffement de R,

▼ Figure 51 : pyromètre à filament disparaissant.



Richard Colin

qui est, par exemple, un thermocouple très sensible, recouvert d'une mince plaquette noircie, augmente avec la température T, et peut servir à la mesurer.

La loi de Stefan n'est pas applicable au rayonnement absorbé par R, car la transmission par la lentille ou le miroir ainsi que le facteur d'absorption du récepteur varient avec la longueur d'onde, donc avec la composition spectrale du rayonnement, et par suite avec T. Les pyromètres dits « à rayonnement total » doivent donc être étalonnés par pointés directs sur des corps noirs à température connue, ou par comparaison avec un pyromètre monochromatique auquel est applicable la formule **(74)**.

Ces appareils présentent, pour certaines applications, un risque d'erreur important, tenant à l'absorption des radiations infrarouges par le gaz carbonique et la vapeur d'eau qui peuvent être présents en plus ou moins grande quantité dans l'atmosphère, entre la source et le récepteur. Leur précision est nettement inférieure à celle des pyromètres monochromatiques. Ils ont en revanche l'intérêt de ne pas exiger un « équilibrage photométrique » assez difficile (tel que le contrôle de la disparition d'un filament) ; ils peuvent même être rendus enregistreurs, d'où leur emploi fréquent dans l'industrie.

La *figure* 52 représente une *lunette pyrométrique* de Fery ; la lentille A est en fluorine ou en verre aussi transparent que possible à l'infrarouge. (Lorsqu'on la remplace par un miroir, l'instrument devient un *télescope pyrométrique*.) Le récepteur R est une plaquette d'argent noircie collée sur une soudure d'un couple fer-constantan. En faisant varier l'orientation du pyromètre et, au moyen d'une crémaillère, la distance AR, on amène l'image de la source étudiée à être exactement dans le plan de R, et à déborder de tous côtés la plaquette, ce dont on s'assure à l'aide de l'oculaire B. De cette façon, la distance de la source n'intervient pas (pourvu qu'elle ne soit pas trop grande). Le millivoltmètre *m*V, indicateur ou enregistreur, est gradué directement en températures.

— *Pyromètres à coloration*. Des ouvriers très exercés peuvent parfois apprécier la température d'un four « à la vue », à moins de 100 degrés près, l'élément d'appréciation étant, plutôt que la luminance, la couleur du rayonnement émis : à 700 °C, le rayonnement émis est rouge sombre ; à 1 300 °C, il est orange, et, à 1 500 °C, blanc éblouissant.

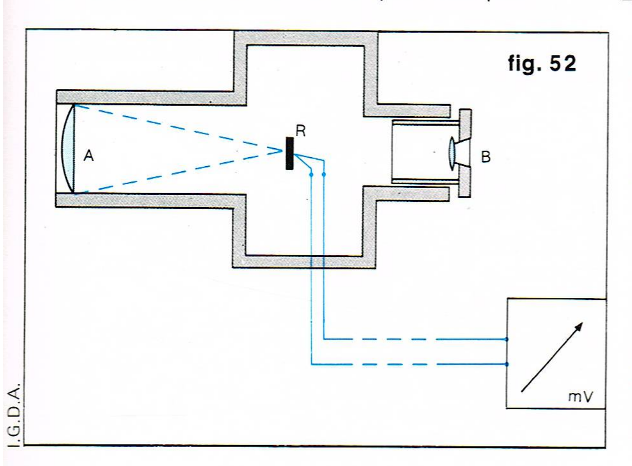
Cette variation de couleur est due à la déformation progressive des isothermes, dont le maximum se déplace vers les courtes longueurs d'onde quand T augmente.

On a cherché à rendre ces évaluations plus sûres en éclairant l'une des plages d'un photomètre par la lumière d'un corps noir à T^0, l'autre par celle d'une lampe à incandescence parcourue par un courant électrique dont on règle l'intensité *i* de façon à obtenir la même couleur sur les deux plages. Le contrôle d'identité de couleur n'est d'ailleurs précis que si l'on réalise en même temps une égalité de luminance. La relation $i = f$ (T), établie empiriquement à l'aide de températures connues, permet ensuite de déterminer une température inconnue.

On peut aussi déterminer le rapport des flux émis par le corps noir dans des bandes spectrales déterminées, l'une rouge et l'autre bleue par exemple : ce « rapport rouge-bleu » est une fonction décroissante de T. Ces méthodes, fondées sur la variation de la répartition spectrale du rayonnement, ont surtout servi jusqu'ici à caractériser le régime de fonctionnement des lampes électriques.

Louis Courteville - TOP

▲ *La couleur du rayonnement émis est un élément d'appréciation de la température ; le métal est porté au rouge, puis au blanc.*



◀ *Figure 52 : schéma d'un pyromètre à radiation totale.*

Thermodynamique des phénomènes irréversibles

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressé uniquement aux systèmes en équilibre. Nous allons maintenant donner quelques notions de thermodynamique des phénomènes irréversibles. Il s'agit d'une branche de la thermodynamique qui s'applique à des systèmes qui ne peuvent atteindre l'équilibre, car ils sont soumis à des contraintes qui les en empêchent.

Comme on l'a vu, le premier principe de la thermodynamique affirme la conservation de l'énergie : l'accroissement de l'énergie d'un système est égal à l'énergie qu'il a reçue. Le second principe indique qu'un système isolé évolue vers un état d'équilibre qui correspond à l'entropie maximale, c'est-à-dire au plus grand désordre.

Contrairement à l'énergie, l'entropie ne se conserve pas ; son accroissement dS est la somme de deux termes :

$$(75) \qquad dS = d_eS + d_iS$$

La quantité d_eS représente la contribution du milieu extérieur sous la forme d'un échange d'entropie (pour un système isolé, $d_eS = 0$) ; d_iS désigne l'entropie créée au sein du système. D'après le second principe, d_iS n'est jamais négatif :

$d_iS = 0$ Transformations réversibles

$d_iS > 0$ Transformations irréversibles

Toute la thermodynamique des phénomènes irréversibles est fondée sur le *bilan d'entropie* associé à $d_iS > 0$.

Bilan entropique

Nous allons nous intéresser maintenant à la variation de l'entropie d'un système au cours du temps. Ce qu'on appelle le *taux de production d'entropie* $\frac{dS}{dt}$ est d'après la relation **(75)** le résultat d'un bilan entropique contenant deux termes, un terme d'échange $\frac{d_eS}{dt}$ qui exprime le *flux d'entropie* de l'extérieur vers le système et un terme $\frac{d_iS}{dt}$ qui exprime la production d'entropie à l'intérieur du système :

$$(76) \qquad \frac{dS}{dt} = \frac{d_eS}{dt} + \frac{d_iS}{dt}$$

La relation ci-dessus est absolument générale, et le second principe de la thermodynamique ne concerne que le deuxième terme qui satisfait la condition :

$$(77) \qquad \frac{d_iS}{dt} \geqslant 0$$

où l'égalité correspond à des transformations réversibles. A *l'état d'équilibre*, la production d'entropie est nulle $\left(\frac{d_iS}{dt} = 0\right)$.

Il ne faut surtout pas confondre états d'équilibre et états stationnaires. Un état stationnaire est caractérisé par le fait que les variables qui le caractérisent ne varient plus dans le temps, leurs dérivées par rapport au temps sont donc nulles.

Ainsi, à l'état stationnaire, $\frac{dS}{dt} = 0$. Un état stationnaire de non-équilibre est défini par $\frac{dS}{dt} = 0$ et $\frac{d_iS}{dt} > 0$. On a alors $\frac{d_eS}{dt} < 0$. Si, en valeur absolue, d_eS/dt est plus grand que d_iS/dt, on a alors $dS/dt < 0$: un système peut ainsi avoir une entropie décroissante au cours du temps sans violer pour autant le second principe. Cela peut s'appliquer aux organismes vivants en développement : la diminution d'entropie qui accompagne leur développement, c'est-à-dire leur organisation croissante, n'est pas contradictoire avec le second principe, l'ensemble organisme vivant et environnement constitue un système isolé que nous avons appelé Univers et dont l'entropie augmente. Tandis que l'entropie de l'organisme vivant diminue, celle de l'environnement qui se dégrade augmente.

Relation entre flux et forces

Un système hors d'équilibre est soumis à des contraintes. Ces contraintes, qu'on appelle *forces* thermodynamiques, sont par exemple un gradient de température, un gradient de concentration, une affinité chimique. A ces forces sont associés des flux : flux de chaleur, de matière et vitesse de réaction chimique respectivement. On montre que la production d'entropie par unité de temps d'un système $\mathcal{P}$ (S) est liée aux flux J_α et aux forces X_α par la relation suivante :

$$(78) \qquad \mathcal{P}(S) = \frac{d_iS}{dt} = \int_V \sum_\alpha J_\alpha X_\alpha dV \geqslant 0$$

On utilise souvent la production d'entropie par unité de temps et de volume σ (S).

$$(79) \qquad \mathcal{P}(S) = \int_V \sigma(S)\, dV \qquad \sigma(S) = \sum_\alpha J_\alpha X_\alpha$$

A l'équilibre, un système n'est soumis à aucune force et à aucun flux $J_\alpha = 0$ et $X_\alpha = 0$, et aussi σ (S) = 0. Le fait qu'à l'équilibre les flux et les forces soient simultanément nuls nous permet d'écrire des *relations linéaires* entre eux :

$$(80) \qquad J_\alpha = \sum_\beta L_{\alpha\beta} X_\beta$$

les quantités $L_{\alpha\beta}$ sont appelées coefficients phénoménologiques et sont liées par les *relations d'Onsager :*

$$(81) \qquad L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha} \qquad (\alpha \neq \beta)$$

Minimum de production d'entropie

Quand un système est soumis à des contraintes extérieures, il ne peut atteindre un état d'équilibre. Prenons par exemple un système qui est le siège de deux phénomènes irréversibles caractérisés l'un par un flux de matière J_m associé à une force X_m (gradient de concentration), l'autre par un flux de chaleur J_{th} associé à une force X_{th} (gradient de température). La production d'entropie d'un tel système s'écrit :

$$(82) \qquad \mathcal{P}(S) = \frac{d_iS}{dt} = J_{th}X_{th} + J_mX_m \geqslant 0$$

Au voisinage de l'équilibre, on peut écrire des relations du type **(80)** :

$$(83) \qquad \begin{aligned} J_{th} &= L_{11}X_{th} + L_{12}X_m \\ J_m &= L_{21}X_{th} + L_{22}X_m \end{aligned}$$

Les coefficients L_{11} et L_{22} situés sur la diagonale principale de la matrice des coefficients sont liés à la conductivité thermique et à la diffusion respectivement. Les autres sont liés aux coefficients Dufour et de thermodiffusion. A l'état stationnaire de non-équilibre, le flux de matière est nul :

$$(84) \qquad J_m = L_{21}X_{th} + L_{22}X_m = 0$$

Quant à la production d'entropie, elle s'écrit en fonction des forces X_{th} et X_m :

$$(85) \qquad \mathcal{P} = \frac{d_iS}{dt} = L_{11}X_{th}^2 + 2\, L_{12}X_{th}X_m + L_{22}X_m^2 \geqslant 0$$

En dérivant partiellement **(86)** par rapport à X_m, il vient :

$$(86) \qquad \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial X_m}\right)_{X_{th}} = 2\, L_{12}X_{th} + 2\, L_{22}X_m = 2\, J_m$$

La production d'entropie étant une quantité positive, cette quantité passe par un minimum à l'état stationnaire. Dans cet état, comme $J_m = 0$:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial X_m}\right)_{X_{th}} = 0$$

Le théorème suivant, dû à Prigogine, et valable au voisinage de l'équilibre, peut s'énoncer ainsi :

A l'état stationnaire de non-équilibre, la production d'entropie est minimale.

Domaine non linéaire

Le théorème du minimum de la production d'entropie n'est valable qu'au voisinage de l'équilibre. Cette région est appelée *domaine linéaire* parce qu'on peut utiliser les relations linéaires **(80)**. Loin de l'équilibre, les relations **(80)** ne sont plus valables, on dit alors qu'on est dans le *domaine non linéaire*. Dans cette région, il peut apparaître des *instabilités* dans les états stationnaires qui s'accompagnent de structures appelées *structures dissipatives*.

BIBLIOGRAPHIE

BRUHAT G., *Thermodynamique,* Masson, 1968. - FLEURY P. et MATHIEU J.-P., *Chaleur, Thermodynamique, États de la matière,* Eyrolles, 1954. - GLANSDORFF P. et PRIGOGINE I., *Structure, Stabilité et Fluctuations,* Masson, 1971. - MANDL F., *Statistical Physics,* John Wileyand Sons Ldt., 1971. - REIF, F., *Physique statistique,* Armand Colin, 1972. - TERNY M., *la Mesure des températures au laboratoire et dans l'industrie,* Dunod, 1962.

ACOUSTIQUE

Le son résulte de la propagation d'une perturbation dans un milieu matériel. Pendant très longtemps, l'histoire des phénomènes sonores a été associée à celle de la musique, un art qui remonte aux tout débuts de l'évolution humaine et qui était déjà pratiqué par les Hindous, les Égyptiens et les Chinois plus de 4 000 ans avant l'ère chrétienne. C'est Pythagore, mathématicien de l'Antiquité grecque (VI[e] siècle avant J.-C.), qui est responsable des premières études « scientifiques » qui soient parvenues jusqu'à nous. Utilisant un appareillage très simple constitué d'une corde soumise à une tension mécanique constante dont la longueur pouvait être fixée en déplaçant deux pièces de bois, il constata que la hauteur (ou fréquence) des sons produits dépendait de la longueur de la corde de manière surprenante. En effet, le rapport des longueurs des deux cordes soumises à la même tension mécanique et qui produisait un son fondamental et son octave était exactement de deux. Curieusement, cette observation ouvrit la voie à une longue période de tentatives d'interprétations semi-mystiques du caractère arithmétique de la musique.

Ce n'est qu'au début du XVII[e] siècle que le père Mersenne établit un pont entre l'acoustique et l'art musical en définissant les hauteurs des sons constituant une gamme. Il prolongea pour cela les expériences de Pythagore en considérant l'influence de la tension mécanique de la corde sur la fréquence des sons émis. Cette étude est à la base du développement du piano moderne qui peut couvrir 7 octaves 1/4. En utilisant des cordes soumises à des tensions mécaniques égales, la corde la plus longue devrait être environ 150 fois plus longue que la corde la plus courte, ce qui, bien sûr, poserait quelques problèmes pratiques.

Environ deux siècles après Pythagore, le philosophe grec Aristote (IV[e] siècle avant J.-C.) proposa, dans une série d'études sur le son et la perception du son, une interprétation de la propagation du son dans l'air : « Tous les sons sont produits par la rencontre de corps avec d'autres corps ou de l'air avec des corps ; non pas que l'air prenne certaines formes comme d'aucuns le croient, mais parce qu'il est mis en mouvement d'une manière par laquelle, dans d'autres cas, les corps sont déplacés, soit par contraction, dilatation ou compression, soit encore quand il s'entrechoque avec le souffle ou avec la corde des instruments de musique. Car, quand sa partie la plus proche est frappée par le souffle qui vient à son contact, l'air est immédiatement mis en mouvement et pousse, de la même manière, l'air qui lui est adjacent, de sorte que le son se propage, sans perte de qualité, aussi loin que la perturbation de l'air est susceptible d'aller. En effet, bien que la perturbation prenne naissance en un point particulier, sa force s'étend sur une grande surface, comme font les vents qui soufflent des rivières ou de la terre... » (Aristote, *Sur l'âme*, II, 8).

Un élève d'Aristote, Aristoxène, écrivit plusieurs livres sur la musique et l'harmonie *(Éléments harmoniques; Sur le rythme)*. Cependant, la seule approche vraiment scientifique, de la période comprise entre celle de Pythagore et celle du père Mersenne et de Galilée (XVI[e] siècle), qui soit parvenue jusqu'à nous, est due à Marcus Vitruvius Pollio, communément appelé Vitruve, architecte romain du I[er] siècle avant J.-C. Il écrivit un long traité d'architecture *(De architectura)* et s'intéressa particulièrement à l'acoustique architecturale. Il signala les effets de renforcement ou de diminution des sons en divers points des théâtres. Ses travaux nous montrent en fait que ces derniers n'étaient pas aussi bons qu'on l'admet généralement ; Vitruve proposa même, afin d'en améliorer l'acoustique, de placer des vases en divers points des théâtres, afin de renforcer certains sons. Il proposa également d'incorporer des porte-voix au masque des acteurs.

Après Vitruve, suit une longue période d'obscurité. On édifie d'une part les cathédrales immenses ayant des temps de réverbération très longs qui, rendant inintelligibles les sons parlés, conduisent au rituel chanté, et d'autre part des palais somptueux aux tapisseries et tapis profonds qui produisent des temps de réverbération très courts et amènent les compositeurs à créer la musique de chambre.



Bulloz

▲ ***Pendant très longtemps, l'histoire des phénomènes sonores a été associée à celle de la musique ; ici, une stèle dédiée à Han Akhiti par le chanteur d'Amon (musée du Louvre).***

Au XVII[e] siècle, le père Mersenne (1588-1648) ainsi que Galilée (Galileo Galilei, 1564-1642) réabordèrent les études acoustiques de manière scientifique. Ainsi, Mersenne mesura la vitesse de propagation d'un son dans l'air en lisant le temps écoulé entre l'instant où un coup de fusil était tiré et l'instant où la détonation parvenait à l'expérimentateur.

Pierre Gassendi (1592-1655) reprit les expériences de Mersenne et les développa : il étudia l'influence de la taille du fusil ou du canon sur la vitesse de propagation du son. Il arriva ainsi à la conclusion que, contrairement aux idées d'Aristote, un son aigu ne se propage pas plus vite qu'un son grave.

Quelques années plus tard, William Derham (1657-1735) avait l'idée d'utiliser la vitesse de propagation du son pour déterminer la position d'un orage : on mesure le temps qui s'écoule entre la vision de l'éclair et l'audition du tonnerre ; en multipliant ce temps par la vitesse du son, on obtient la distance de l'orage.

E. Lessing - Magnum

▲ *Beaucoup de théâtres antiques, comme ce théâtre grec bâti près du temple d'Apollon à Athènes, sont des exemples de réalisations d'acoustique architecturale.*

▼ *A gauche, figure 1 -* a, *dispositif de Young : le stylet marqueur inscrit sur la face extérieure du cylindre en rotation l'image des vibrations;* b, *dans le phonautographe de Scott de Martinville, la source de vibrations est constituée d'un cornet terminé par une membrane. A droite, le disque de Savart.*

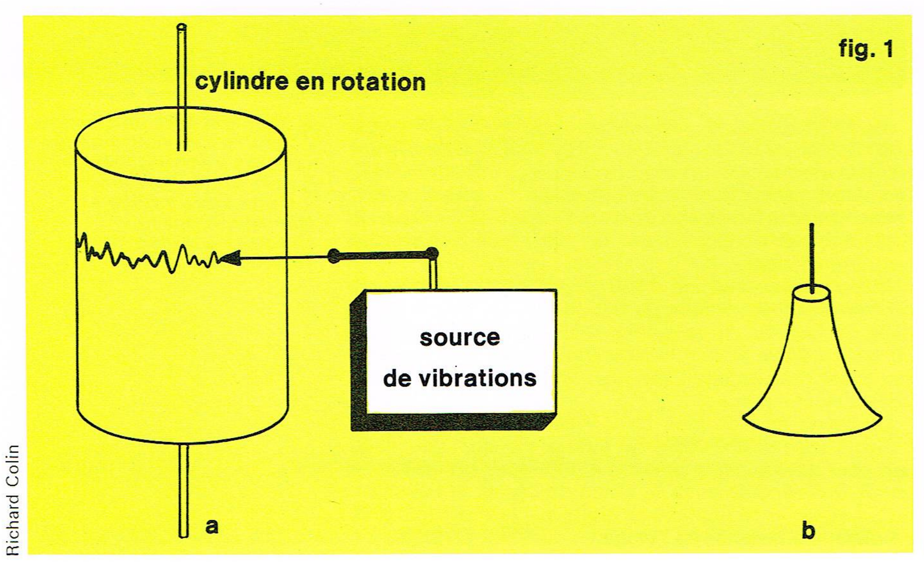
C'est aux environs de 1740 que Bianconi et La Condamine rapportèrent, indépendamment l'un de l'autre, l'influence de la température de l'air sur la vitesse de propagation du son. Le premier eut l'idée de mesurer cette vitesse au même endroit en été et en hiver. Le second opéra à la même époque de l'année, mais en deux endroits de température très différente.

En ce qui concerne les mesures de fréquences, on peut mentionner John Shore, trompettiste au service du roi George I[er] d'Angleterre, qui, en 1711, inventa le diapason. En fait, un standard de fréquence variable avait été imaginé par Stancari en 1706, lui-même directement inspiré par un dispositif réalisé par Robert Hooke en 1681. Une lame flexible venait s'appuyer sur une roue dentée animée d'un mouvement de rotation. Stancari montra que la fréquence du son émis pouvait être déduite du nombre de dents de la roue et de sa vitesse de rotation. Savart utilisa plus tard une telle roue pour déterminer la fréquence des sons.

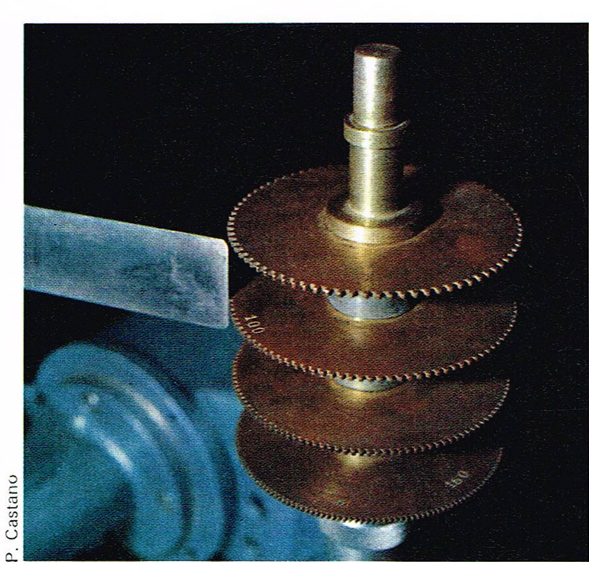
Sur le plan expérimental, les progrès furent lents au XVIII[e] siècle. En 1738, une commission de l'Académie des sciences remesura la vitesse du son. Sur le plan théorique, par contre, des progrès considérables furent réalisés en utilisant les théories mathématiques et les techniques de calcul développées par I. Newton (1642-1727) et G. Leibniz (1646-1716). Toute une série de mathématiciens très fameux, tels Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), Poisson (1781-1840), d'Alembert (1717-1783), Bernoulli (1700-1782), appliquèrent les méthodes nouvelles de calcul aux problèmes d'acoustique. Il faut attendre cependant le XIX[e] siècle pour voir le grand développement de l'acoustique.

En 1802, Ersnt Chladni (1756-1827) étudie la vibration de plaques, il localise les nœuds (minimum) et les ventres (maximum) de vibration à l'aide de sable fin. Il effectue également une étude approfondie des vibrations de tiges et de cordes.

En 1807, Thomas Young, médecin et physicien anglais (1773-1829), auteur de très nombreux travaux sur la vision, les phénomènes d'interférence et les vibrations, met au point un appareil qui permet de mesurer avec précision la fréquence des vibrations. Un cylindre noirci sur sa face extérieure tourne autour de son axe (*fig.* 1a). Un stylet, relié au corps animé des vibrations à mesurer,



Richard Colin



P. Castano

inscrit sur le cylindre une trace à partir de laquelle il est facile de déterminer la fréquence des vibrations, si la vitesse de rotation du cylindre est connue. Cette méthode inspire E. Scott de Martinville qui, en 1857, l'applique à la mesure des vibrations de l'air. Pour cela, il utilise un cornet terminé par un diaphragme (*fig.* 1b). C'est ce diaphragme qui sert de transformateur des vibrations de l'air en vibrations d'un stylet marqueur. Le « phonautographe », car tel était le nom de cet appareil, utilisait pour la première fois un diaphragme pour enregistrer un son. Inutile de dire que, depuis, les diaphragmes ont joué un rôle considérable dans les mesures acoustiques.

A la même époque, J. Leconte découvre qu'on peut utiliser une flamme pour déterminer l'intensité d'un son : la flamme d'un bec de gaz alimenté très faiblement est en effet très sensible aux déplacements de l'air produit par une onde sonore. Une variation de l'intensité de l'onde produit une modification très nette de la forme de la flamme.

De 1858 à 1862, K. R. Kœnig (1839-1901) développe le phonautographe de Scott et présente divers enregistrements à l'exposition de Londres de 1862. Il est intéressant de noter à ce propos que le phonographe d'Edison (1877) était probablement inspiré par le phonautographe de Scott. En 1909, D. C. Miller modifie le phonautographe en remplaçant le stylet marqueur et le cylindre noirci par un miroir tournant qui réfléchit un faisceau lumineux et le projette sur un film en translation rapide (*fig.* 2).

En partant d'une idée assez différente, Wheatstone invente le kaléidophone. Cet appareil comprend deux lames métalliques allongées flexibles montées l'une dans le prolongement de l'autre, mais dans des plans perpendiculaires. L'extrémité libre d'une des lames est fixée à un support rigide. Sur l'extrémité libre de l'autre lame, qui a la possibilité de se déplacer dans les directions perpendiculaires aux deux lames, est fixée une perle. Si cette perle est déplacée de sa position d'équilibre et est libérée, elle décrit un mouvement qui est la combinaison de deux mouvements périodiques. En éclairant fortement la perle, il est possible de projeter ce mouvement sur un écran. Cette méthode est développée par Lissajous qui publie en 1857 son célèbre *Mémoire sur l'étude optique des mouvements vibratoires*, dans lequel il décrit la manière de déterminer la différence de phase qui peut exister entre deux mouvements vibratoires.

Mais le XIXe siècle a vu et voit encore bien des développements. En 1819, Cagniard de La Tour invente la sirène. Seebeck la développe, puis plus tard Kœnig. En 1820, Biot met au point une méthode optique permettant de déterminer l'intensité d'une onde acoustique. Cette méthode est ensuite développée par Kundt et Mach. Elle utilise le fait qu'une lumière polarisée, transmise à travers un résonateur acoustique et observée à travers un second polariseur (analyseur), change d'intensité selon que l'on se trouve à un minimum ou à un maximum d'amplitude de vibration. Une autre méthode, développée par Tœpler et Boltzmann en 1870, utilise deux rayons lumineux issus d'une même source que l'on fait interférer sur un écran. Le premier rayon suit à travers de l'air normal un trajet réglable, et le second passe par un nœud de vibration d'une colonne d'air en vibration. Concernant les méthodes optiques, il faut signaler qu'en 1836, Plateau avait utilisé pour la première fois une méthode stroboscopique pour observer des mouvements très rapides. Tœpler généralisa la méthode dans un article célèbre.

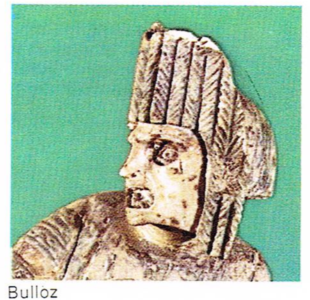
Mais le XIXe siècle est très fortement marqué par les deux hommes qui vont donner à l'acoustique ses lettres de noblesse : Hermann von Helmholtz (1821-1894) et lord Rayleigh (1842-1919).

Helmholtz occupe successivement les chaires de physiologie (Königsberg, 1848), anatomie (Bonn, 1855), physiologie (Heidelberg, 1858) et physique (Berlin, 1871). Ses contributions à l'optique et à l'acoustique relèvent surtout du domaine physiologique. Helmholtz exposa en particulier, dans un ouvrage célèbre *Sur les sensations des sons* (1862), la théorie de la sommation et de la différenciation des sons, la théorie des résonateurs, notamment des résonateurs sphériques qui portent son nom.

Il faut remarquer à ce propos que, jusqu'à la mise en évidence par Helmholtz du rôle des résonateurs en acoustique, l'oreille était le principal instrument d'analyse des sons complexes. Cela explique pourquoi les instruments de musique évoluaient principalement en s'appuyant sur des critères empiriques, en particulier celui du plaisir à l'écoute (ce qui, pour un instrument de musique, n'est pas nécessairement un défaut). Après Helmholtz, les fabricants d'instruments de musique ont adopté une approche plus scientifique, préfigurée par la collaboration qui existait entre Helmholtz et un fabricant de pianos.

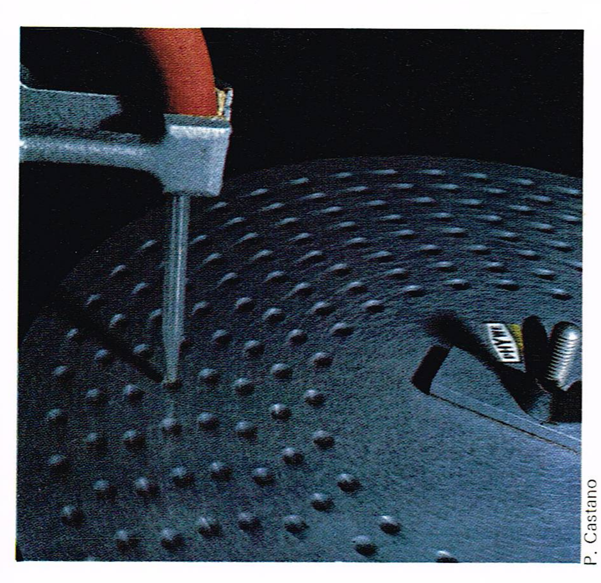
Kœnig, dont nous avons déjà parlé, et qui avait étudié avec Helmholtz à Königsberg, construisit un grand nombre d'instruments d'étude et de mesure, en particulier un sonomètre susceptible de fonctionner dans une gamme de fréquences s'étendant de 16 à 90 000 cycles par seconde, qu'il termina en 1897. C'est en utilisant cet instrument en source sonore qu'il conclut que la perception des sons par l'oreille humaine dépend de leur intensité et se trouve dans la région 13-17 500 cycles par seconde. Helmholtz montra alors que, pour un son de très basse fréquence, le fondamental peut être inaudible alors que les harmoniques sont audibles. Le maître et son élève restèrent cependant en désaccord en ce qui concerne la perception simultanée de deux sons par l'oreille. Pour Helmholtz, le timbre d'un son dépend seulement du nombre et de l'intensité relative des harmoniques qui accompagnent le fondamental, et ne dépend pas des différences de phase qui peuvent exister entre ces composantes. Kœnig, au contraire, affirme : « Les différences de phase entre les diverses composantes du son jouent un rôle très important sur le timbre des sons. »

Ces problèmes de la perception des sons et des impressions qu'ils sont susceptibles de procurer ont été, depuis, longuement étudiés. Ils constituent une part importante de l'acoustique, à savoir l'acoustique physiologique.

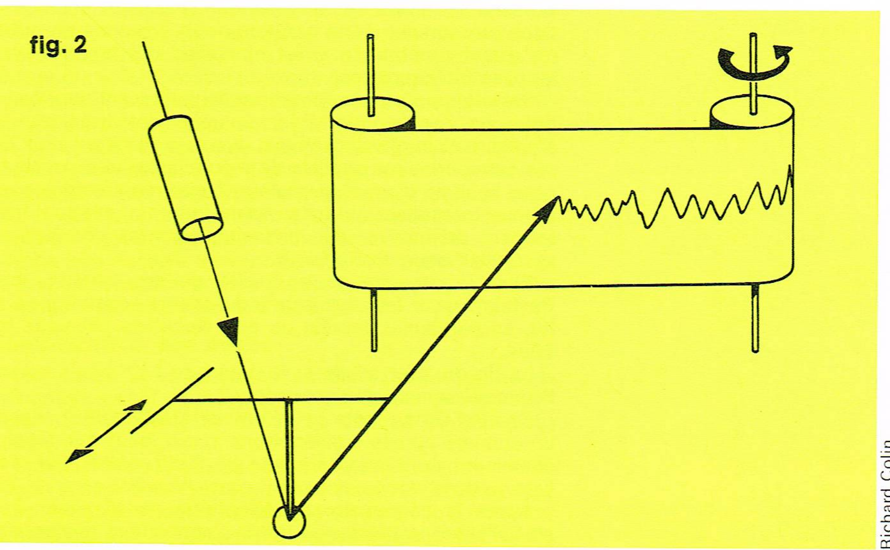


Bulloz

▲ ***Acteur romain portant un masque ; Vitruve avait proposé, afin d'améliorer l'acoustique, d'y incorporer un porte-voix.***



P. Castano



Richard Colin

▼ ***A gauche, la sirène de Seebeck. A droite, figure 2 ; dispositif de Miller : le faisceau lumineux, réfléchi sur le miroir tournant relié à la source de vibrations, inscrit une trace sur le film en translation rapide.***

▶ **Charles Cros** *(1842-1888), inventeur du paléophone qui précéda le phonographe d'Edison.*



Roger Viollet

Lord Rayleigh, né John William Strutt, était le fils aîné du second baron Rayleigh de Terling Place, dans le comté d'Essex en Angleterre. Après des études secondaires normales, il entra, à 20 ans, au Trinity College de Cambridge où il devint un élève d'E. J. Routh, fameux mathématicien appliqué. En 1868, après un voyage aux États-Unis d'Amérique, Rayleigh s'équipa en matériel scientifique. Il débuta ses recherches par des expériences sur l'électricité et les courants alternatifs. Son premier travail en acoustique, probablement inspiré par le livre de Helmholtz *Sur les sensations des sons*, concernait l'étude des fréquences de résonateurs. En 1871, Rayleigh épousa Evelyn Balfour, sœur d'Arthur James Balfour qui devait devenir célèbre comme penseur et comme chef de gouvernement. Après quelques ennuis médicaux, Rayleigh se rendit en Égypte en convalescence et c'est pendant un voyage en bateau sur le Nil, en 1872, que son ouvrage *Theory of Sound* vit le jour. Il est intéressant de remarquer que, durant la rédaction de la première partie de ce monumental ouvrage, Rayleigh ne pouvait avoir accès, pour des raisons évidentes, à une bibliothèque scientifique importante. Ce n'est qu'en 1877 que les deux volumes de la *Theory of Sound* furent publiés. Cet ouvrage faisait non seulement le point de l'état des connaissances en acoustique au moment de sa parution, mais il ouvrait en outre un grand nombre de voies nouvelles qui furent développées ultérieurement.

Rayleigh a eu une approche essentiellement mathématique de l'acoustique. Principalement intéressé par la physique et la physico-chimie, il a manifesté, en plus de ses extraordinaires qualités de théoricien, une exceptionnelle habileté d'expérimentateur. Nous retrouverons plus loin un instrument qui fut pendant longtemps le seul instrument de mesure des intensités sonores absolues, à savoir le disque de Rayleigh.

Pour la quantité et la qualité de ses travaux, lord Rayleigh reçut les plus grands honneurs scientifiques. Il fut, en particulier, lauréat du prix Nobel de physique en 1904.

La fin du XIXe siècle et le début du XXe siècle voient l'épanouissement de l'acoustique.

Charles Cros, poète et inventeur (1842-1888), décrit un appareil appelé « paléophone », qui, peut-être inspiré également du phonautographe de Scott, précède la réalisation du phonographe par Thomas Alva Edison en 1877.

Après la découverte du téléphone par Graham Bell en 1876, les problèmes de mesure acoustique deviennent très importants. Diverses techniques sont alors faites pour mettre au point un instrument de mesure des intensités sonores absolues. Pendant longtemps cependant, le disque de Rayleigh n'eut pas de concurrent sérieux. En 1917, E. C. Wente met au point, aux États-Unis, dans les laboratoires de l'American Telephone and Telegraph (ATT) and Western Electric Company, le microphone à condensateur. Il est important de réaliser que ce microphone est encore le plus employé comme microphone de référence, de mesure ou d'enregistrement professionnel. Il a donné naissance au microphone électrostatique à électret, qui, bénéficiant d'un grand nombre des qualités du microphone à condensateur et de peu de ses défauts, connaît actuellement une très grande vogue.

La même année, H. D. Arnold et I. D. Crandall, également des laboratoires de l'American Telephone and Telegraph Company, imaginent le thermophone qui peut être utilisé comme standard de pression sonore.

Ainsi, les deux premiers instruments de mesure de l'acoustique moderne sont nés.

En ce qui concerne les sources acoustiques, l'année 1920 voit la sortie, dans les laboratoires de la Bell Telephone aux États-Unis, d'écouteurs « de qualité », présentant une réponse assez régulière jusqu'à environ 4 000 cycles par seconde. Ces systèmes sont bientôt couplés à des cornets acoustiques : les haut-parleurs sont là.

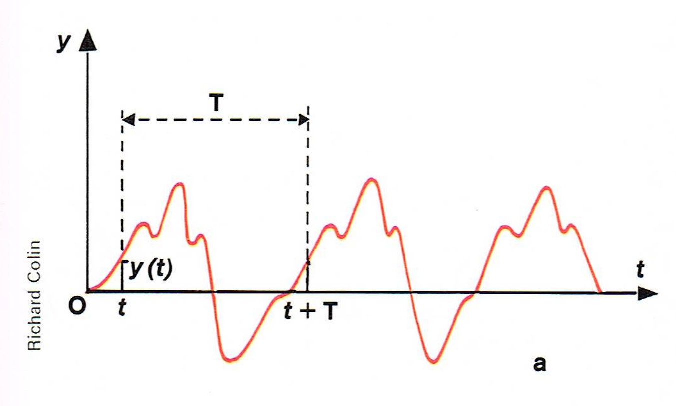
Au début du XXe siècle renaît un domaine particulier de l'acoustique, l'acoustique architecturale. W. C. Sabine anime pratiquement tout seul ce domaine jusqu'au début de la Première Guerre mondiale. Il réalise les premières études scientifiques de sonorisation des auditoriums. Il développe tout un ensemble de méthodes de mesure de l'absorption et de la réflexion des sons sur les murs des pièces. Au cours des années qui suivent, le développement des instruments de mesure (microphones à condensateur par exemple) et des sources sonores (haut-parleurs) donne véritablement à l'acoustique architecturale les instruments qui lui manquent pour en faire une branche à part entière de l'acoustique.

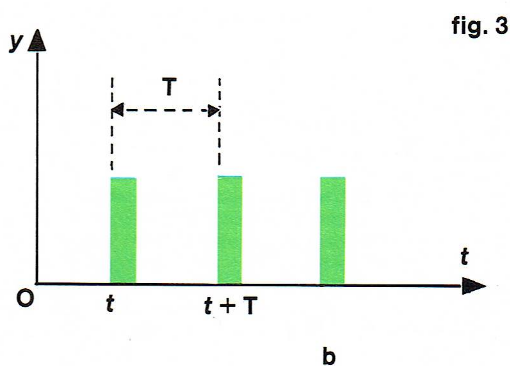
Aux environs de la Première Guerre mondiale, l'intérêt se porte sur les vibrations de fréquence plus élevée (au-dessus de 20 000 cycles par seconde), essentiellement en vue de la détection des sous-marins. Réalisant une idée de l'ingénieur russe Constantin Chilowski, Paul Langevin met en évidence, en 1915, au laboratoire d'électricité générale de l'École supérieure de physique et de chimie de la ville de Paris, la propagation d'ondes ultrasonores dans l'eau, en utilisant comme émetteur un transducteur électrostatique (condensateur chantant) et comme détecteur un pendule de torsion. L'année suivante, il a l'idée d'utiliser le phénomène de piézo-électricité découvert quelques années plus tôt par les frères Curie.

Dans les années qui suivent, de très nombreux dispositifs à ultrasons voient le jour dans le monde entier. En 1932, R. Lucas et P. Biquard en France, Sears et Debye aux États-Unis mettent en évidence, indépendamment, le phénomène de diffraction de la lumière par les ultrasons. Les recherches et applications s'accélèrent. Vers les basses fréquences, des systèmes capables de détecter des vibrations de fréquence inférieure à un dix-millième de cycle par seconde sont mis au point ; vers les hautes fréquences, après la première mise en évidence par E. H. Jacobsen, en 1966, d'émission et de détection d'ultrasons à des fréquences supérieures à 100 milliards de cycles par seconde, des phénomènes de plus en plus complexes sont mis en œuvre pour émettre et détecter ces ondes.

Les domaines d'application des ondes ultrasonores ne cessent de s'ouvrir, par exemple en navigation (détection sous-marine et communication sous-marine), en recherche pétrolière (sondage des sols, sismique), en contrôle industriel (visualisation des défauts, imagerie acoustique), en nettoyage industriel, en optique et en électronique (modulation des ondes lumineuses, traitement du signal), en recherche scientifique (comme outil d'étude de la matière) et en médecine (imagerie acoustique et chirurgie).

On peut avoir une idée du développement étonnant que connaissent actuellement dans le monde ces divers domaines de l'acoustique en regardant le nombre de chercheurs et de techniciens, de centres de recherche, de journaux scientifiques et techniques et de centres industriels qui leur sont consacrés.





◀ *Figure 3 ; mouvements périodiques : a, continu ; b, en impulsions ; T est la période du mouvement.*

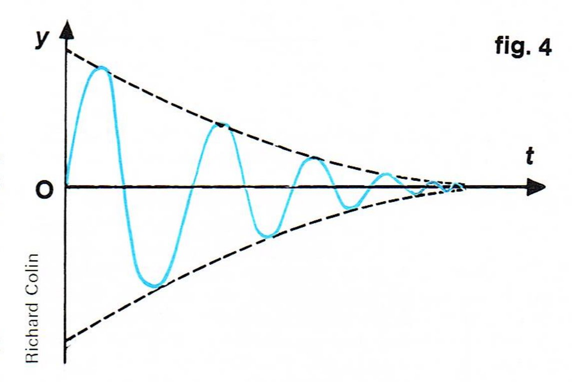
Théorie des ondes sonores

Les mouvements périodiques

Nous dirons de façon tout à fait générale que le mouvement d'un point est *périodique* quand il se répète à intervalles de temps égaux ; le mouvement de ce point peut être continu (*fig.* 3a) ou être formé d'une série d'impulsions discrètes (*fig.* 3b). Dans les deux cas, le point subit périodiquement le même déplacement y à partir de sa position d'équilibre ; nous pouvons exprimer la périodicité du mouvement en écrivant la relation mathématique simple :

$$y\ (t) = y\ (t + \mathrm{T})$$

où $y\ (t)$ est le déplacement du point à l'instant t, et $y\ (t + \mathrm{T})$ le déplacement après qu'un laps de temps T s'est écoulé. T est appelé période du mouvement et représente la durée d'une oscillation entière ; on la mesure en secondes. La fréquence f du mouvement est le nombre d'oscillations par unité de temps. Elle est reliée à la période T par la relation $f = \frac{1}{\mathrm{T}}$. La fréquence est mesurée en cycles par seconde ou hertz (Hz). Quand les vibrations sont atténuées par l'existence de phénomènes de frottements, le déplacement du point depuis sa position d'équilibre diminue de plus en plus au fur et à mesure que le temps s'écoule, et le mouvement est dit *périodique amorti* (*fig.* 4).



◀ *Figure 4 : mouvement périodique amorti.*

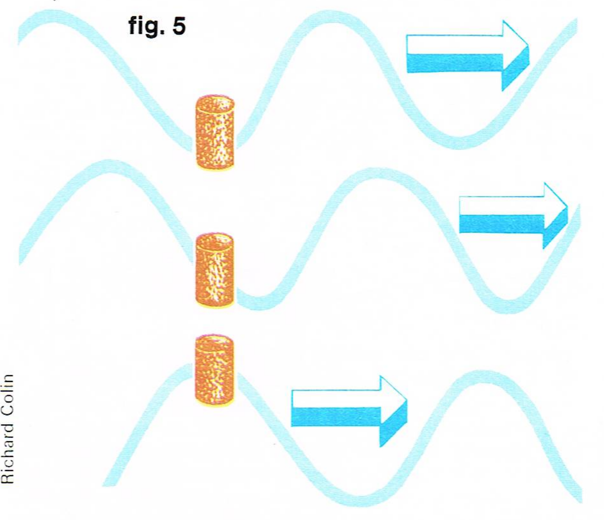
Propagation des ondes

Quand un point est soumis à une perturbation qui provoque une force de rappel ayant tendance à le ramener à sa position d'équilibre (force élastique), il oscille autour de cette position. Lorsque ce point matériel fait partie d'un milieu continu, il transmet cette perturbation dans le milieu aux autres points voisins qui se mettent à osciller à leur tour. En bref, tous les points du milieu atteints par cette perturbation ont un mouvement oscillant, on dit qu'il y a propagation d'une onde.

Les propriétés que doit posséder un milieu pour qu'il puisse y avoir propagation d'une onde de ce type sont des *propriétés mécaniques :* l'inertie et l'élasticité. Un milieu est inertiel (ou matériel) lorsque ses différents points possèdent une masse non nulle qui leur permet d'avoir un mouvement oscillatoire. L'élasticité est une propriété fondamentale qui fait qu'un milieu, après avoir subi une compression ou une dilatation, revient à sa configuration d'équilibre. Le paramètre qui représente l'inertie d'un milieu est la masse volumique ρ, alors que celui qui en décrit l'élasticité est la compressibilité χ.

La propagation d'une onde est caractérisée par le transport d'énergie et par l'absence de transport de matière. En fait les points du milieu changent d'énergie mais n'avancent pas avec l'onde, se contentant d'osciller autour de leur position d'équilibre.

Ainsi, les vagues de la mer ne transportent pas de matière, et si un objet atteint le rivage, c'est sous l'effet du vent et non pas sous l'effet des oscillations. Une confirmation de ce fait peut s'obtenir par l'expérience très simple suivante : on jette un morceau de liège sur l'eau calme d'un lac, puis on laisse tomber une pierre dans l'eau ; autour du point de chute des ondes concentriques se forment, qui rejoignent et dépassent le fragment de liège sans le déplacer horizontalement (*fig.* 5).



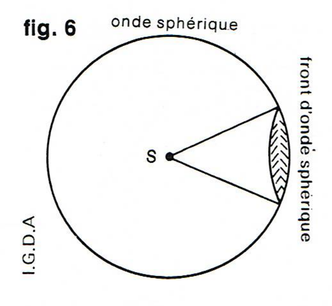
◀ *Figure 5 : le bouchon de liège oscille au gré des vagues autour de sa position d'équilibre.*

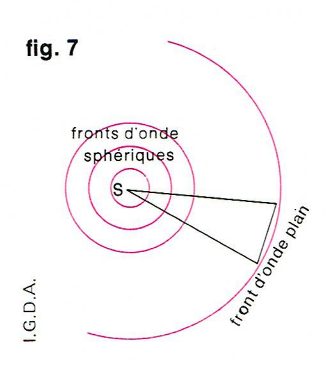
Toutefois, dans certains cas, la propagation d'une onde peut donner lieu à un véritable transport de matière. Cela se produit lorsque la perturbation du milieu matériel est tellement violente que les limites d'élasticité de ce milieu sont dépassées : c'est-à-dire lorsque la *loi de Hooke* n'est plus applicable. Cette loi implique que chaque point subit, vers sa position d'équilibre, une force de rappel proportionnelle à son déplacement x par rapport à cette position ($\mathrm{F} = kx$). La constante de rappel k est appelée constante élastique du milieu. Si le déplacement est trop grand, les points du milieu s'éloignent définitivement de leur position d'équilibre, donnant lieu à un véritable transport de matière. C'est ce qui se produit après l'explosion d'une bombe : on observe un véritable déplacement d'air. Dans ce cas, la sensation sonore produite n'est plus le résultat d'un mouvement périodique du milieu.

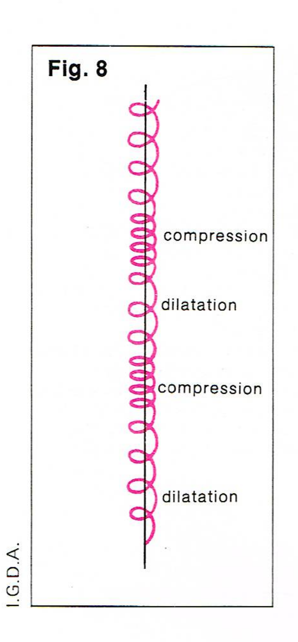
Classification des ondes

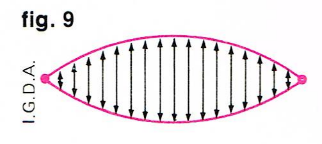
Les ondes sonores et, en général, toutes les ondes mécaniques sont classées selon leur forme ; nous définirons ici seulement les ondes sphériques et les ondes planes.

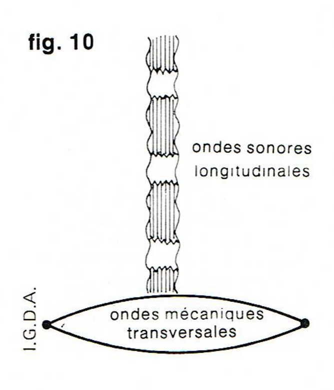
Considérons une source ponctuelle émettant une perturbation sonore dans l'espace environnant : si l'onde avance avec la vitesse v, après un laps de temps t elle a parcouru la distance $d = vt$. Si le milieu est homogène (de même











densité en tous ses points) et isotrope (mêmes propriétés élastiques dans toutes les directions), l'onde rejoint au même instant t tous les points situés à la distance d de la source. Le lieu des points atteints en même temps par l'onde s'appelle *surface d'onde*, et, dans le cas considéré, cette surface est une sphère centrée sur la source ponctuelle et de rayon d. Nous appellerons *rayon* toute droite issue de la source et perpendiculaire à la surface d'onde, et le *front d'onde* sera défini comme le profil d'une portion limitée de surface d'onde (*fig.* 6). En un point situé à une distance très grande de la source, on peut considérer, avec une bonne approximation, un front d'onde sphérique comme plan (*fig.* 7). On dira alors qu'on a une onde plane. Les ondes planes peuvent donc s'obtenir à partir d'ondes sphériques à grande distance de la source.

Si la source sonore est constituée de plusieurs sources ponctuelles, chacune émet une onde sphérique, et l'onde reçue par un observateur à une certaine distance de la source est la superposition des ondes sphériques émises par chaque point source; c'est pour cela que la surface d'onde apparaît déformée. Le même phénomène peut se rencontrer avec une source ponctuelle, mais lorsque le milieu de propagation n'est ni homogène ni isotrope; en effet, même si, au voisinage de la source, l'onde est sphérique, elle se déforme durant la propagation.

Ondes longitudinales et ondes transversales

On dit qu'une onde est *longitudinale* quand les particules du milieu dans lequel elle se propage vibrent dans la même direction que la direction dans laquelle l'onde avance (direction de propagation). Un exemple typique est fourni par les ondes sonores qui sont constituées par les dilatations et compressions alternées du milieu et sont donc toujours longitudinales. Un autre exemple se rencontre dans le cas d'un ressort suspendu verticalement; celui-ci oscille sous l'effet de son poids et de la force de rappel élastique. L'onde qui se propage est longitudinale (*fig.* 8).

En revanche, on dit qu'une onde est *transversale* quand la direction de vibration des particules du milieu est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. C'est le cas d'une corde vibrante, tendue entre deux points fixes, que l'on a pincée (*fig.* 9). On peut noter à ce propos un fait curieux : dans la corde d'une guitare, les vibrations sont transversales, mais elles transmettent à l'air environnant des ondes longitudinales qui produisent des sensations sonores (*fig.* 10).

Dans les solides, les ondes mécaniques peuvent être soit longitudinales, soit transversales, alors que, dans les fluides, elles sont longitudinales.

Propagation par ondes planes d'un ébranlement acoustique dans un fluide

Nous nous proposons de rechercher, pour les ondes planes longitudinales, une équation qui exprime, en fonction du temps et de la position, le déplacement des particules du milieu atteintes par une perturbation périodique. Nous voulons, de plus, mettre en évidence le rôle joué par l'inertie du milieu et par son élasticité dans le processus de propagation.

État d'un fluide

L'état d'un fluide (lorsqu'on néglige les phénomènes de viscosité) est entièrement défini par trois grandeurs : sa pression p, son volume V (ou sa densité) et sa température T.

En général, on connaît l'équation d'état du fluide, c'est-à-dire la relation qui existe entre la pression, le volume et la température; il suffit alors de connaître deux des grandeurs précédentes, la troisième se déduisant de l'équation d'état.

L'étude des propagations dans les solides est plus complexe, car les grandeurs définissant l'état mécanique (contraintes) sont au nombre de six, alors que, dans les fluides, la pression seule suffit.

Définissons à présent la *compressibilité*. Soit une certaine masse de fluide occupant un volume V sous une pression p. Lors d'un accroissement (positif) Δp de la pression, le fluide subira un accroissement ΔV (négatif) de volume. On désigne par compressibilité la quantité :

(1) $$\chi = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p}$$

Cette quantité est positive. Pour l'instant, nous n'avons pas précisé les conditions de la transformation Δp, ΔV. Elle peut, par exemple, s'effectuer à température constante (isotherme) ou sans échange de chaleur avec le reste du fluide (adiabatique).

Équation de D'Alembert

Considérons un tube rectiligne infini (pour pouvoir négliger les effets de réflexion des ondes à l'extrémité du tube) rempli d'un fluide homogène, par exemple l'air. A une extrémité de ce tube, un piston se meut alternativement vers l'avant et vers l'arrière, provoquant successivement des compressions et des dilatations du fluide. Dans l'approximation de l'onde plane, tous les points d'une même section transversale sont atteints en même temps par l'onde.

Pour calculer le déplacement des molécules d'air des différentes sections transversales du tube, considérons deux sections S_1 et S_2 séparées par la distance infinitésimale dx (agrandie par commodité dans le dessin de la *figure* 11). Soit Ox un axe parallèle à l'axe du tube, et soit x l'abscisse de S_1 et $x + dx$ celle de S_2. Quand, après avoir poussé le piston, la perturbation atteint les sections considérées, les molécules qui étaient immobiles en tous les points S_1 subissent un déplacement ξ sous l'effet de la perturbation, alors que celles de S_2 subissent le déplacement $\xi + d\xi$. Le volume dV_i compris initialement entre les deux sections est donné par :

(2) $$dV_i = Sdx$$

(où S est la surface de la section), alors que le volume final après le déplacement a pour valeur :

$$dV_f = S\,(x + dx + \xi + d\xi - x - \xi) = S\,(dx + d\xi)$$

La variation infinitésimale du volume dV_i est donnée par :

$$\Delta\,(dV_i) = dV_f - dV_i = Sd\xi$$

Cependant, $d\xi$ peut s'écrire aussi comme :

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x}\,dx$$

alors :

(3) $$\Delta\,(dV_i) = S\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,dx$$

Appliquons la définition de la compressibilité au volume dV_i :

(4) $$\chi = -\frac{1}{dV_i}\,\frac{\Delta\,(dV_i)}{\Delta p}$$

où Δp est la variation de pression produisant la variation de volume $\Delta\,(dV_i)$. En substituant les équations **(2)** et **(3)** dans **(4)**, on obtient :

$$S\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,dx = -\chi \Delta p S dx$$

d'où

(5) $$\Delta p = -\frac{1}{\chi}\,\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Or la force infinitésimale agissant sur le volume dV_i de fluide sous l'effet d'une variation infinitésimale de pression est :

$$dF = S\,(\Delta p_1 - \Delta p_2)$$

Et, en utilisant la relation **(5)** :

(6) $$\Delta p_1 - \Delta p_2 = -\frac{1}{\chi}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_2\right]$$

Nous savons que les valeurs d'une fonction en deux points voisins x_1 et x_2 de la variable sont liées au premier ordre par la relation :

$$f\,(x_2) = f\,(x_1) + (x_2 - x_1)\,\frac{\partial f}{\partial x}$$

qui, appliquée à **(6)**, la transforme en

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = -\frac{1}{\chi}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,(-dx)\right] = \frac{1}{\chi}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,dx$$

où nous avons choisi pour fonction $f\,(x)$ la fonction $\frac{\partial \xi}{\partial x}$.

La force infinitésimale résultante est donc donnée par :

(7) $$dF = \frac{1}{\chi}\,S\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,dx$$

D'après la loi fondamentale de la dynamique, la force appliquée à l'élément de fluide considéré est : $dF = dma$, où a est l'accélération de cet élément et dm sa masse. Celle-ci est reliée au volume dV_i et à la masse volumique du fluide ρ par $\rho = \frac{dm}{dV_i}$. En remarquant que $a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ on obtient

$$(8) \qquad dF = \rho dV_i \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

En égalant **(7)** et **(8)** on obtient :

$$\frac{1}{\chi} S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx$$

d'où l'on tire :

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \chi \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

L'équation **(9)** constitue la fameuse *équation de D'Alembert* qui relie le déplacement ξ d'un point du milieu à la position x et au temps t. On peut noter que, dans cette équation, apparaissent les deux paramètres caractéristiques de l'inertie ρ et de l'élasticité χ du milieu ; en particulier, le terme $\frac{1}{\chi \rho}$ a les dimensions du carré d'une vitesse, car les autres membres au dénominateur de **(9)** sont respectivement un déplacement et un temps au carré. On peut alors écrire :

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

où l'on a posé $\qquad v = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi}}$

Comme nous le verrons plus loin, v est la vitesse de propagation des ondes sonores dans le fluide, et elle est indépendante de la fréquence de l'onde : toutes les ondes, quelle que soit leur fréquence, se propagent dans le milieu à la même vitesse. La solution la plus générale de l'équation **(10)** est : $\xi (x, t) = f_1 (x - vt) + f_2 (x + vt)$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions, éventuellement différentes, des variables $x - vt$ et $x + vt$ respectivement. La première représente une onde dite progressive, qui avance selon le sens positif de l'axe des x, et la seconde une onde régressive qui avance dans le sens négatif de l'axe des x. Une onde sonore est donc la superposition d'une onde progressive et d'une onde régressive. On notera que dans la solution de l'équation **(10)**, x et t doivent toujours apparaître liés par une relation du type $x \pm vt$, par exemple $\text{Log}(x - vt)$, $(x + vt)^2$, $\frac{1}{x - vt}$ sont solutions de **(10)**, mais $x^2 + v^2t^2$, xvt, $\frac{x}{vt}$ ne le sont pas.

Vitesse de propagation de l'onde sonore

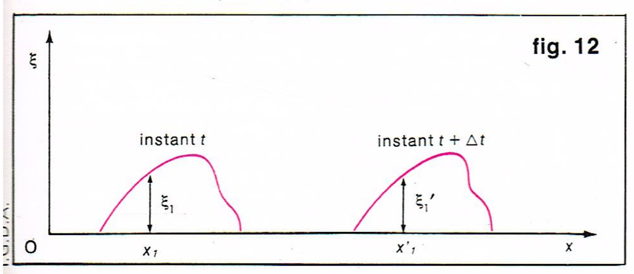
Nous nous proposons de démontrer à présent que v représente exactement la vitesse de propagation de l'onde, résultat que nous avons obtenu jusqu'à présent par de simples considérations dimensionnelles.

Considérons une onde dont le profil dans le plan (ξ, x) est à un instant t celui représenté sur la *figure* 12. Pour simplifier, supposons qu'il s'agit d'une onde progressive d'équation : $\xi (x, t) = f_1 (x - vt)$. Le déplacement d'un point d'abscisse x, à l'instant t, est donné par :

$$\xi_1 = f_1 (x_1 - vt)$$

après un intervalle de temps Δt, l'onde a avancé vers la droite, et le point qui se trouvait d'abord en x_1 se trouve en x_1'. Si le milieu est homogène et isotrope, et donc tel que l'onde avance sans subir de déformation de son profil, le déplacement en x_1' est :

$$\xi_1' = f_1 [x_1' - v (t + \Delta t)]$$



où v est resté inchangé, car il ne dépend que des propriétés du milieu. Mais si l'onde n'a pas changé de profil, on doit avoir :

$$\xi_1 = \xi_1'$$

et donc $\qquad x_1 - vt = x_1' - v (t + \Delta t)$

soit $\qquad x_1' - x_1 = v \Delta t$

Donc v représente la vitesse d'avancement de l'onde dans le sens positif de l'axe x. On peut arriver au même résultat par un raisonnement physique simple : quelle devrait être la vitesse d'un observateur se déplaçant le long de l'axe des x pour voir le signal inchangé. Nous avons vu que la déformation était une fonction de $(x - vt)$. Il suffit donc que l'observateur se déplace à $(x - vt)$ constant, c'est-à-dire à la vitesse v. Cette vitesse est appelée *vitesse de phase de l'onde*. Il est facile de vérifier par un raisonnement analogue que v représente aussi la vitesse d'avancement de l'onde régressive.

Dans le cas où le milieu dans lequel l'onde se propage est un gaz parfait, on peut calculer le coefficient de compressibilité χ à partir de l'équation d'état du gaz et en déduire la vitesse du son.

Si l'on suppose que les ébranlements sont isothermes, la condition pV = constante de la loi de Mariotte donne :

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = 0 \quad \text{d'où}$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{1}{p}$$

et la vitesse de propagation est :

$$(11) \qquad v_T = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi_T}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

Dans le cas de l'air pris dans les conditions normales (0 °C et pression de 760 mm de mercure), on en déduit :

$$v_T = 270 \text{ m/s}$$

Les expériences montrent que le son se propage dans l'air à une vitesse plus grande. On peut donc imaginer que l'ébranlement acoustique se propage de manière adiabatique et non pas isotherme.

Si l'on remarque que, par diminution de volume $(-\Delta V)$ effectuée rapidement, il y a élévation de température (échauffement adiabatique), l'accroissement Δp de la pression est plus élevé que par une compression isotherme. La compressibilité adiabatique χ_Q est donc plus petite que la compressibilité isotherme χ_T. On montre en thermodynamique que les deux compressibilités sont reliées par la relation suivante :

$$\chi_Q = \frac{1}{\gamma} \chi_T$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant. Ce rapport est toujours supérieur à l'unité.

La vitesse du son doit donc être, pour un ébranlement adiabatique :

$$(12) \qquad v_Q = \sqrt{\frac{p \gamma}{\rho}}$$

Dans le cas de l'air, $\gamma = 1{,}4$, et la nouvelle valeur calculée est en rapport satisfaisant avec l'expérience. La mesure de la vitesse du son est probablement la méthode la plus précise pour connaître le rapport γ des chaleurs spécifiques.

Historiquement, c'est Newton qui, le premier, trouva l'expression **(11)** donnant la vitesse du son. La démonstration de cette formule fut publiée dans le livre II des *Principia* en 1687, et, par une substitution convenable, Newton calcula que la vitesse du son dans l'air était de 968 pieds/s. Ce qui était beaucoup plus faible que la valeur trouvée expérimentalement. Quelque soixante-dix ans plus tard, Lagrange fit remarquer que l'analyse mathématique de Newton ne tenait pas convenablement compte des changements de compressibilité de l'air dus aux changements de température provoqués par la propagation des ondes sonores. En effet, c'est la compressibilité adiabatique et non isotherme qu'il faut utiliser, car les compressions et les dilatations dues à l'onde ont lieu trop rapidement pour que les conditions isothermes soient

fig. 11

S1 S2 O x x + ξ x + dx x + dx + ξ + dξ

I.G.D.A.

▲ ***Figure 11 : propagation d'une onde sonore plane dans un fluide homogène.***

◀ ***Page ci-contre, de haut en bas. Figure 6 : surface et front d'onde sphériques. Figure 7 : fronts d'onde plan et sphérique. Figure 8 : ondes longitudinales dans un ressort. Figure 9 : ondes transversales dans une corde vibrante. Figure 10 : ondes transversales dans une corde vibrante ; les vibrations de la corde transmettent à l'air environnant des ondes sonores longitudinales.***

◀ ***Figure 12 : une onde avance avec une vitesse v dans le sens de l'axe Ox, sans subir de déformation de son profil ; les deux courbes représentent les positions des deux profils aux instants t et t + Δt.***

▶ *Figure 13 : composition de la vitesse du vent $\vec{v}_a$ et de la vitesse $\vec{v}$ du son.*

réalisées. En fait, ce fut seulement une centaine d'années plus tard que le mathématicien français Pierre Laplace modifia les équations de Newton sur la base de l'argumentation de Lagrange (*Annales de chimie*, 1816) et aboutit à l'expression correcte **(12)**, qui était en accord avec les valeurs expérimentales usuelles.

Dans un gaz à des pressions moyennes ou faibles, il n'y a que de faibles interactions entre molécules en dehors des chocs moléculaires. On doit donc s'attendre à trouver que la vitesse de propagation du son est du même ordre de grandeur que la vitesse des molécules. De l'équation **(12)** on déduit, en introduisant le volume V_M de la molécule-gramme, que :

$$v_Q = \sqrt{\frac{pV_M\gamma}{\rho V_M}}$$

Or, d'après l'équation d'état des gaz parfaits, $pV_M = RT$ (R est la constante des gaz parfaits et T la température absolue). La quantité ρV_M représente la masse moléculaire du gaz. On aura donc :

$$v_Q = \sqrt{\frac{RT\gamma}{M}} \qquad \textbf{(13)}$$

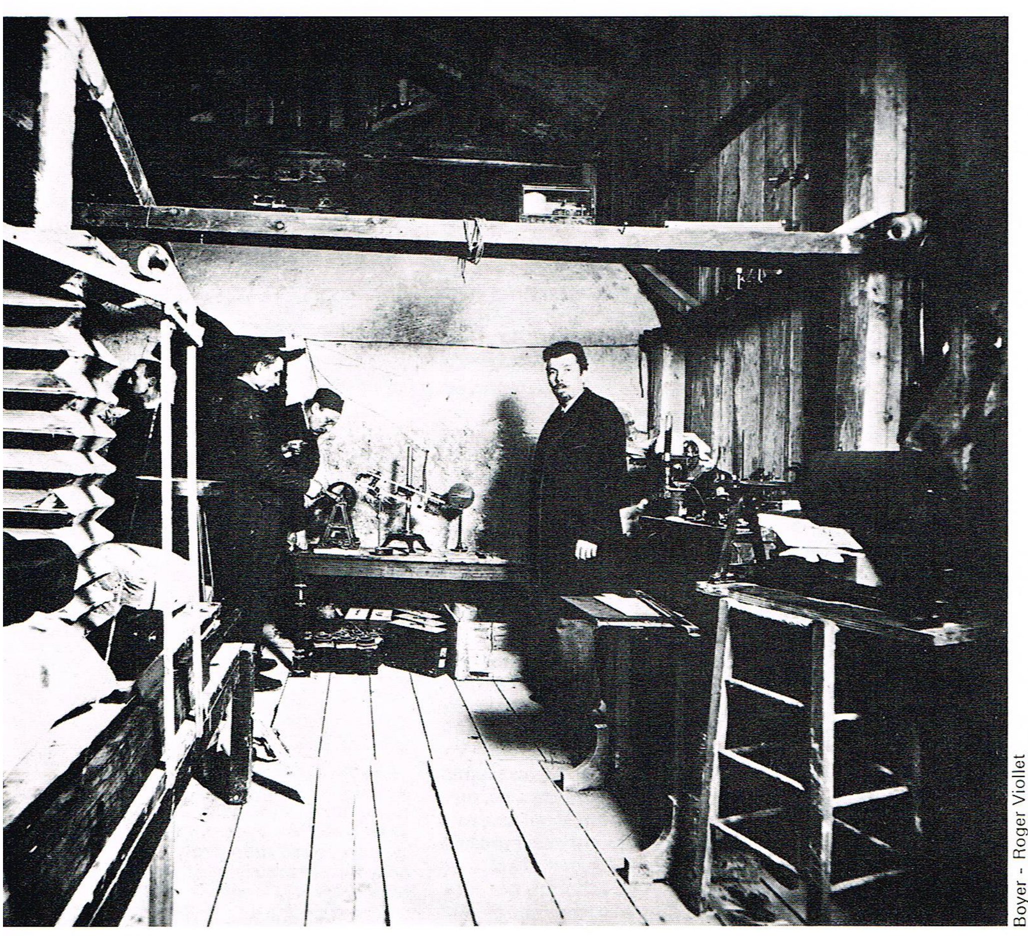
D'autre part, la vitesse quadratique moyenne avec laquelle les molécules d'un gaz parfait se meuvent par agitation thermique, a pour valeur, d'après la théorie cinétique des gaz :

$$v = \sqrt{\frac{3\,RT}{M}}$$

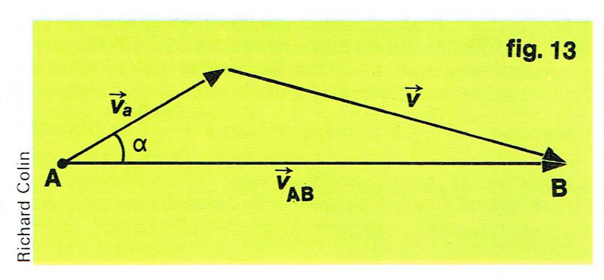
Or γ varie entre 1,66 (gaz monoatomiques) et 1,3 (gaz polyatomiques) ; la vitesse du son coïncide donc pratiquement avec la vitesse quadratique moyenne du gaz dans lequel il se propage, et cela permet d'interpréter le processus de propagation comme un transport d'énergie de la part des molécules du milieu.

L'absence de milieu matériel rend impossible la propagation d'une onde sonore : ce résultat peut se vérifier en mettant une sonnerie sous une cloche de verre et en faisant le vide dans celle-ci à l'aide d'une pompe ; au fur et à mesure que le vide devient plus poussé, le son de la sonnerie s'atténue, puis cesse complètement.

▼ *Le laboratoire artisanal de Violle et Vautier pour leurs expériences relatives à la vitesse du son : à gauche, soufflerie et grande flûte d'orgue ; au centre, un enregistreur graphique des vibrations d'un diapason.*



Boyer - Roger Viollet



Richard Colin

Mesures de la vitesse du son

Mesures faites à l'air libre

Dans ces méthodes (les plus anciennes), on mesure le temps nécessaire à une onde sonore pour se propager entre deux points A et B. Il est indispensable de tenir compte des différentes causes d'erreurs dues aux courants aériens, au rôle d'une température non uniforme des couches d'air, etc.

— Supposons qu'il existe un vent horizontal, régulier, de vitesse v_a formant un angle α avec la base de mesure AB (*fig.* 13). Aux points A et B sont placés des observateurs qui vont échanger des signaux sonores croisés. Soit v_{AB} la vitesse du son selon AB ; elle est due à la composition vectorielle de la vitesse v du son et de la vitesse v_a de l'air :

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v} + \vec{v}_a$$

Soit t_1 le temps nécessaire à l'onde sonore pour franchir la distance AB ; nous avons :

$$v_{AB} = \frac{AB}{t_1}$$

Compte tenu des relations entre côtés du triangle de la *figure* 13, on a :

$$v^2 = v_a^2 + v_{AB}^2 - 2\,v_{AB}\,v_a \cos\alpha$$

En général, la vitesse du vent est très petite vis-à-vis de la vitesse du son (la vitesse du son est de l'ordre de 1 200 km/h alors que, pour un vent très violent, la vitesse est de l'ordre de 120 km/h). On peut donc écrire :

$$v^2 = v_{AB}^2\left[1 - 2\frac{v_a}{v_{AB}}\cos\alpha + \frac{v_a^2}{v_{AB}^2}\right]$$

et calculer v en faisant un développement limité en $\frac{v_a}{v_{AB}}$

On trouve : $v = v_{AB}\left[1 - \frac{v_a}{v_{AB}}\cos\alpha\right]$

soit $v = v_{AB} - v_a \cos\alpha$.

De même, si le signal acoustique était émis de B et se propageait à la vitesse v_{BA}, on aurait :

$$v = v_{BA} + v_a \cos\alpha$$

La vitesse du son est donnée par la moyenne des deux mesures :

$$v = \frac{v_{AB} + v_{BA}}{2}$$

Donc, dans la mesure où le vent est régulier et permanent, son influence peut être éliminée par la méthode des signaux croisés.

— La vitesse du son dépend de la température ; celle-ci présente souvent de grandes variations dans les différentes couches d'air traversées par le son. Un phénomène d'incurvation des trajectoires (mirage acoustique) prend alors naissance. Le rayon de courbure de la trajectoire (qui est le rayon du cercle tangent à la trajectoire) dépend de la variation de la température par unité de longueur : $\frac{dT}{dl}$ et de la température absolue T suivant la loi :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\,T}\frac{dT}{dl}$$

où R est positif pour des trajectoires courbées vers le bas et négatif dans le cas contraire.

Pour une variation de température de 1 °C par mètre et pour une température de 27 °C (température absolue de 300 °K), le rayon de courbure des trajectoires est d'environ 600 mètres.

En règle générale, la température décroît quand l'altitude augmente, les trajectoires acoustiques sont donc

relevées vers le haut ; même pour des trajets peu importants, on peut observer une déviation sensible des trajectoires. Par exemple, pour un trajet de longueur $x = 100$ m et un rayon de courbure $R = 600$ m, on observe une déviation verticale de la trajectoire $h \simeq 8$ m (*fig.* 14).

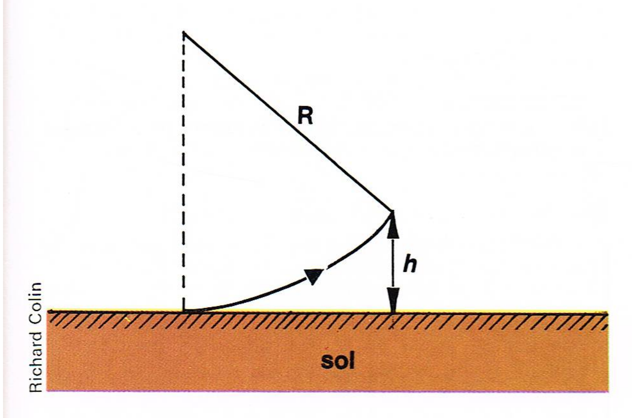
Il est courant d'observer que les sons lointains sont mieux perçus au sommet d'une tour qu'à son pied, ce qui est une conséquence du mirage acoustique. Pour les mêmes raisons, il est avantageux de surélever les sources sonores (cloche ou haut-parleur) que l'on veut faire entendre à grande distance.

Pour éviter d'être gêné par les effets de mirage acoustique lors de la mesure du son en plein air, on a intérêt à choisir un temps couvert qui s'accompagne d'un faible gradient de température.

Résultats des mesures faites à l'air libre

Dès 1738, des expériences furent effectuées par l'Académie des sciences en utilisant comme bases d'émission et de réception les observatoires de Paris, Fontenay et Montlhéry et en employant la méthode des signaux croisés.

fig. 14



◀ *Figure 14 : le phénomène du mirage acoustique.*

De ces expériences, on put tirer comme conclusion que la vitesse du son était indépendante de la pression atmosphérique [comme le montre la relation **(13)**] et qu'elle était quasi indépendante du degré d'humidité de l'air.

Ces mesures permirent aussi de vérifier que la vitesse du son augmentait avec la température [voir **(13)**] et mirent en évidence l'influence du vent (augmentation ou diminution de la vitesse apparente suivant le sens du vent). La valeur trouvée, exprimée en unités actuelles, était de 330 m/s à 0 °C.

En 1822, à la demande de Laplace, les expériences furent reprises entre Villejuif et Montlhéry (18 600 m) en évitant la portion urbaine située entre l'observatoire de Paris et Fontenay. Comme dans les expériences précédentes, la source sonore était réalisée par un coup de canon. On notait l'intervalle de temps qui séparait la perception de la lueur de celle du son. On trouva ainsi 340,8 m/s à 16 °C, soit 330 m/s à 0 °C.

Vers la même époque (1827), Colladon et Sturm déterminèrent sur le lac de Genève la vitesse du son dans l'eau et trouvèrent 1 435 m/s.

En 1864, Regnault reprit les mesures de vitesse du son en plein air (polygone de Satory) en utilisant des méthodes d'enregistrement électrique évitant les erreurs personnelles. La valeur trouvée était de 330,7 m/s à 0 °C.

Mesures faites dans des tuyaux

Dans le cas des tuyaux de large section, on peut admettre que la vitesse du son est la même qu'en milieu infini. L'état du fluide contenu dans le tuyau est mieux déterminé et les mesures plus précises. Le rôle du diamètre du tuyau est faible lorsque sa valeur est supérieure à plusieurs centimètres. Pour des tuyaux de très petits diamètres, l'influence du diamètre sur la vitesse devient notable à cause des phénomènes de viscosité et d'échanges thermiques entre les parois et l'air. La vitesse peut atteindre des valeurs aussi faibles que 220 m/s.

Les méthodes modernes de détermination de la vitesse du son dans des solides ou des liquides utilisent les ondes ultrasonores. Elles seront décrites plus loin.

Ondes sinusoïdales planes

Un cas très intéressant et très courant d'onde sonore est le cas des *ondes sinusoïdales* pour lesquelles le déplacement ξ des particules à partir de leur position d'équilibre peut être décrit par :

$$\xi(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \qquad (14)$$

pour une onde progressive se propageant vers les x positifs. A représente l'amplitude des oscillations, c'est-à-dire la valeur maximale du déplacement, et λ représente, comme nous allons immédiatement le démontrer, la périodicité spatiale de l'onde.

En remplaçant, dans l'équation **(14)**, x par $x + \lambda$, nous calculons le déplacement des particules atteintes par l'onde ayant parcouru la distance λ dans le sens des x positifs. Nous obtenons :

$$\xi(x + \lambda, t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x + \lambda - vt)$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\xi(x + \lambda, t) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + 2\pi\right] = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) = \xi(x, t)$$

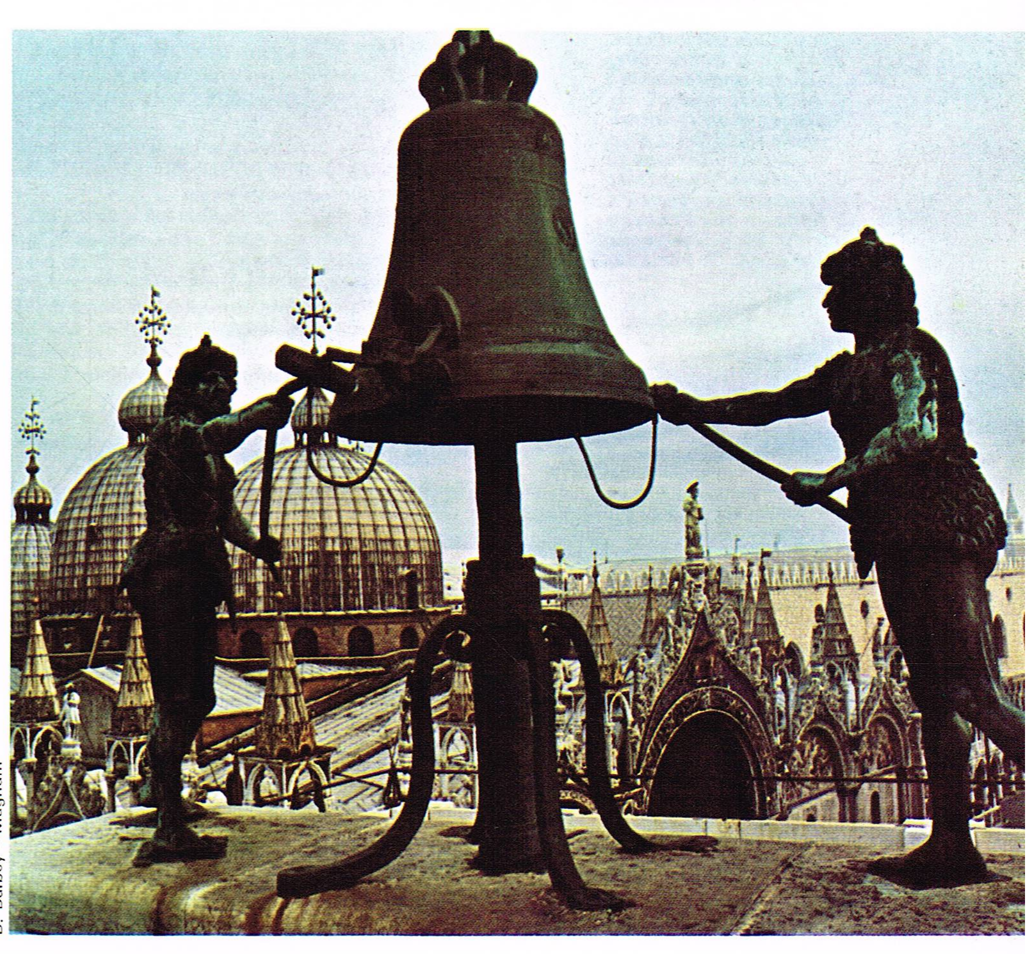
Nous démontrons ainsi qu'après avoir parcouru une distance égale à λ, l'onde a retrouvé la même configuration. λ représente la distance parcourue par l'onde au cours d'une oscillation et s'appelle la *longueur d'onde*. Elle est reliée à la période T et à la fréquence f de l'onde par les relations suivantes :

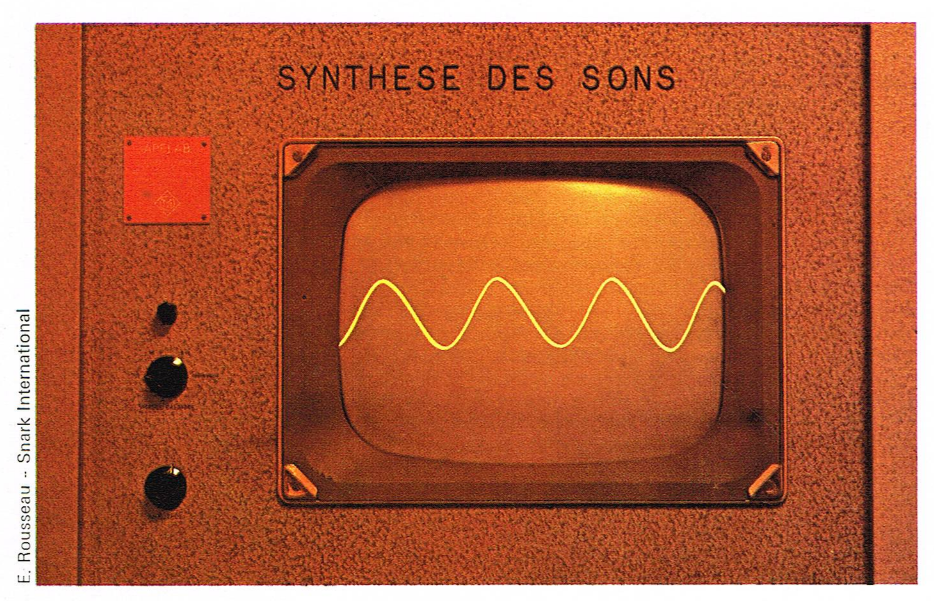
$$\lambda = vT \qquad (15a) \qquad\qquad \lambda = \frac{v}{f} \qquad (15b)$$

Montrons, à présent, qu'une onde de la forme **(14)** a une périodicité temporelle de période T. Si nous remplaçons, dans **(14)**, λ par sa valeur **(15a)**, nous obtenons :

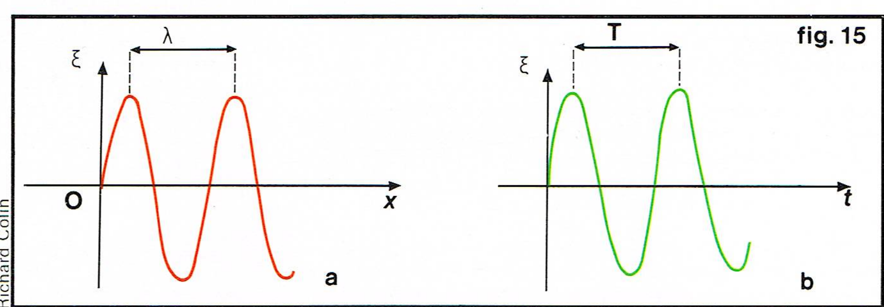
$$\xi(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{vT}(x - vt)$$

▼ *Il est avantageux de surélever les sources sonores (ici, une cloche dominant les toits de Venise) que l'on veut faire entendre à grande distance.*





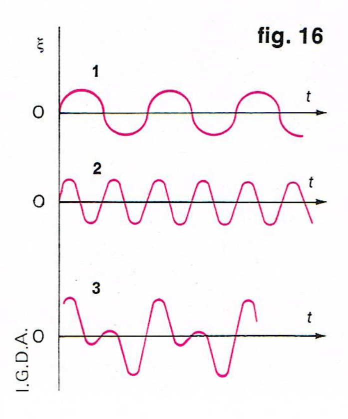
E. Rousseau - Snark International



Richard Colin

▲ *En haut, visualisation d'une onde sinusoïdale. Ci-dessus, figure 15 ; la double périodicité, spatiale et temporelle, d'une onde sonore : a, le déplacement ξ est représenté en fonction de la position x à un certain instant t ; b, le déplacement ξ est représenté en fonction du temps à une position fixe de x ; λ, longueur d'onde ; T, période.*

▼ *Figure 16 : l'onde (3) peut être obtenue par composition de deux ondes sinusoïdales de fréquences f (1) et 2 f (2).*



I.G.D.A.

Calculons le déplacement à l'instant $t + T$, c'est-à-dire après un intervalle de temps T, nous trouvons :

$$\xi\,(x, t + T) = A \sin \frac{2\pi}{vT}\,[x - v\,(t + T)]$$

$$= A \sin \left[\frac{2\pi}{vT}\,(x - vt) + 2\pi\right] = A \sin \frac{2\pi}{vT}\,(x - vt) = \xi\,(x, t)$$

Cela prouve qu'après un intervalle de temps T, l'onde a la configuration qu'elle avait à l'instant t : T représente donc la *période (temporelle) de l'onde*.

Une onde sonore a donc une double périodicité, spatiale et temporelle : pendant que l'onde avance d'une longueur λ, il s'écoule un intervalle de temps T au bout duquel l'onde, en plus d'avoir retrouvé la même configuration spatiale, a repris la même configuration temporelle. On rencontre très souvent l'équation d'une onde sinusoïdale sous des formes équivalentes à **(14).** Introduisons le nombre d'onde k et la pulsation ω de l'oscillation définie par $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$; l'équation **(14)** peut se mettre sous l'une des deux formes :

$$\xi\,(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

(16) $$\xi\,(x, t) = A \sin\,(kx - \omega t)$$

La forme **(16)** est la plus utilisée. Le fait que les ondes aient une double périodicité permet de les représenter graphiquement de deux façons équivalentes. Dans la *figure* 15a, on a représenté le déplacement ξ en fonction de la position x à un certain instant t alors que sur la *figure* 15b le déplacement ξ est représenté en fonction du temps à une position fixe x : dans les deux figures sont aussi indiquées la longueur d'onde λ et la période T. Les représentations graphiques des *figures* 15a et 15b supposent respectivement que, pour $x = 0$ et pour $t = 0$, le déplacement ξ est nul. Cela est un cas particulier ; en général, le déplacement initial n'est pas nul, et on doit en tenir compte en introduisant dans l'argument de **(16)** une constante φ qui s'appelle constante de phase à l'origine et qui permet d'évaluer pour l'onde étudiée le déplacement initial à partir de la position d'équilibre.

L'équation du déplacement s'écrit donc dans le cas général :

(17) $$\xi = A \sin\,(kx - \omega t + \varphi)$$

Nous venons d'étudier les ondes sinusoïdales qui constituent un cas très intéressant ; malheureusement, en général, un son ne peut pas se représenter par un déplacement du type **(17).** Si, par exemple, nous représentions graphiquement l'onde sonore d'un instrument de musique, nous trouverions un schéma du type de celui de la *figure* 16, périodique mais de forme irrégulière. Cependant, grâce à un théorème dû à J. Fourier, on peut démontrer que toute perturbation ondulatoire de forme complexe peut se décomposer en une somme d'un grand nombre d'ondes sinusoïdales, convenablement déphasées les unes par rapport aux autres. Ainsi, le déplacement de l'onde complexe peut être écrit sous la forme :

$$\xi\,(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\,(\omega_n t + \varphi_n)$$

où les diverses pulsations ω_n des ondes sinusoïdales sont commensurables entre elles. Par exemple :

$$\omega_2 = 2\,\omega, \qquad \omega_3 = 3\,\omega, \qquad \ldots, \qquad \omega_n = n\omega.$$

La somme ci-dessus ne contient pas toujours un nombre infini de termes ; dans certains cas, une onde complexe peut se décomposer en 3 ou 4 ondes sinusoïdales, comme dans le cas illustré dans la *figure* 16, car on peut négliger la contribution de toutes les ondes dont l'amplitude A_n est très petite.

Principe de superposition de Bernoulli

Considérons un point P d'un milieu élastique. S'il est atteint par une perturbation sonore S_1, il commence à vibrer autour de sa position d'équilibre, et nous notons son déplacement (vectoriel) par $\vec{\xi}_1$. Supposons qu'au même instant arrive en P une deuxième perturbation provenant d'une source sonore S_2, caractérisée par un déplacement $\vec{\xi}_2$. Le point P, sous l'effet des deux perturbations reçues, vibre comme si elles arrivaient en P indépendamment l'une de l'autre. La perturbation résultante provoque sur le point P un déplacement qui est la somme vectorielle de $\vec{\xi}_1$ et de $\vec{\xi}_2$. Comme, en général, la direction de propagation des deux ondes est différente, il faut considérer à la fois le module et la direction des déplacements. Dans le cas de n perturbations de déplacements $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots \vec{\xi}_n$, on peut écrire le déplacement résultant sous la forme :

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2 + \ldots + \vec{\xi}_n$$

Ce résultat est le *principe de superposition de Bernoulli*, qui s'énonce ainsi : si plusieurs perturbations émises par des sources différentes arrivent en même temps en un point d'un milieu, le point se déplace sous leur action comme si elles arrivaient indépendamment les unes des autres.

Le principe de Bernoulli a un fondement théorique et un fondement expérimental. Nous avons vu que l'équation de D'Alembert **(9),** dans le cas d'ondes planes, admet comme solution une somme de fonctions du type :

$$\xi = f_1\,(x - vt) + f_2\,(x + vt)$$

on peut ainsi démontrer qu'en prenant différentes fonctions des variables $x \pm vt$ et en les ajoutant, la somme obtenue est aussi solution de l'équation d'onde. Cela veut dire que les ondes se propageant dans un certain milieu se composent linéairement, et cela est une conséquence du fait que l'équation de D'Alembert est une équation différentielle linéaire.

Le principe de Bernoulli a cependant une limite de validité provenant des limites d'élasticité du milieu. Il est valable tant que l'équation d'onde est correcte, c'est-à-dire tant que l'on peut écrire une relation linéaire entre les variations de pression et de volume du fluide dans lequel les ondes se propagent. Pour comprendre la grande importance du principe de superposition, il suffit de penser à tous les effets fâcheux auxquels on se trouverait confronté, chaque fois que deux personnes parlent simultanément, si les ondes sonores émises se déformaient sous l'effet de leur interaction mutuelle.

Amplitude de pression et de déplacement, nœuds et ventres

Avant de passer à l'étude des tuyaux sonores, nous devons revenir sur la relation **(5)** qui relie la variation de pression dans un fluide au déplacement des particules du fluide par rapport à leur position d'équilibre :

$$\Delta p = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

où ξ est le déplacement, Δp la variation de pression et χ la compressibilité du fluide.

Nous avons vu que la solution sinusoïdale de l'équation de D'Alembert pour une onde progressive se propageant dans le sens des x positifs se mettait sous la forme :

$$\xi = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$$

Sa dérivée par rapport à x s'écrit :

(18) $$\frac{\partial \xi}{\partial x} = A\frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$$

En substituant l'équation **(18)** dans l'équation **(5)** on obtient :

(19) $$\Delta p = -\frac{2\pi A}{\chi\lambda} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$$

Si nous représentons sur le même graphique la dépendance temporelle de ξ et celle de la variation de pression Δp, on remarque qu'elles diffèrent par les faits suivants : les amplitudes sont différentes et, alors que la première est une fonction en sinus, la seconde est une fonction en cosinus ; elles sont déphasées d'un quart de période. Cela veut dire que, chaque fois que le déplacement est maximal ou minimal, la variation de pression est nulle, alors que, lorsque la variation de pression est maximale ou minimale, le déplacement des particules du milieu sera nul. Nous appellerons *ventres de pression* les points pour lesquels la variation de pression est maximale, et *nœuds de pression* les points pour lesquels la variation de pression est nulle. Il est alors évident que, lors de la propagation d'une onde sonore dans un milieu, les nœuds de pression seront toujours les ventres de déplacement, et *vice versa*.

D'après l'équation **(19)**, nous voyons que l'amplitude de pression, que nous appellerons P, s'écrit :

$$P = \frac{2\pi A}{\chi\lambda}$$

soit, en tenant compte des relations :

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho\chi}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{v}{f}$$

(20) $$P = 2\pi A v f \rho$$

La relation **(20)** est très importante, car elle met en évidence le lien qui existe entre l'amplitude de la pression P et celle du déplacement A produit par une onde sonore de fréquence f qui se propage avec la vitesse v dans un milieu homogène de masse volumique ρ. Par exemple, dans l'air, dans les conditions normales où l'amplitude de pression produite par la voix est environ 0,01 N/m², l'amplitude de déplacement correspondante est environ 4×10^{-6} mm, ce qui donne l'ordre de grandeur des vibrations de la membrane du tympan de l'oreille humaine.



Constantine Manos - Magnum

▲ *Le violoncelle appartient à la famille des instruments à cordes à notes variables, c'est-à-dire dont il est possible de faire varier la fréquence du son émis en modifiant la longueur ou la tension des cordes.*

Réflexion des ondes acoustiques

Réflexion sur une paroi rigide

Soit une onde acoustique rencontrant une surface plane rigide. On constate expérimentalement qu'il se produit une réflexion et qu'il se forme un écho. Soit ξ_i le déplacement de chaque point du fluide pour l'onde incidente se propageant dans le sens des x négatifs.

$$\xi_i = f_1\,(x + vt)$$

Sur la *figure* 17, nous avons représenté graphiquement l'ébranlement en portant en ordonnées le déplacement ξ_i (qui s'effectue en réalité suivant Ox). Supposons qu'à l'origine des coordonnées se trouve une surface plane rigide. L'onde réfléchie (se propageant dans le sens des x positifs sera représentée par :

$$\xi_r = f_2\,(x - vt)$$

Au niveau du plan rigide ($x = 0$), les particules de fluide ne peuvent pas se déplacer. Quelle que soit la valeur du temps t, on a la relation :

$$\xi_i + \xi_r = 0 = f_1\,(t) + f_2\,(t)$$

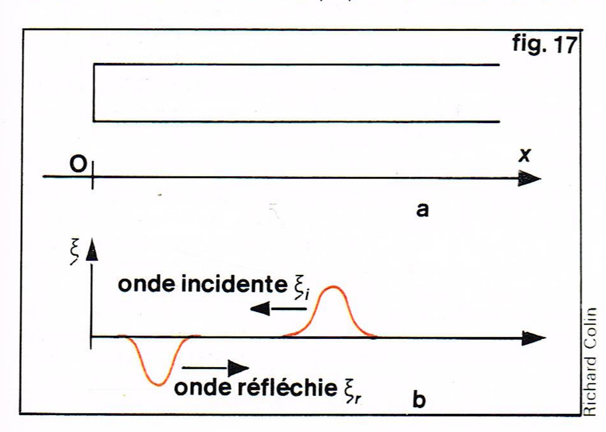
Les fonctions f_1 et f_2 sont donc opposées et :

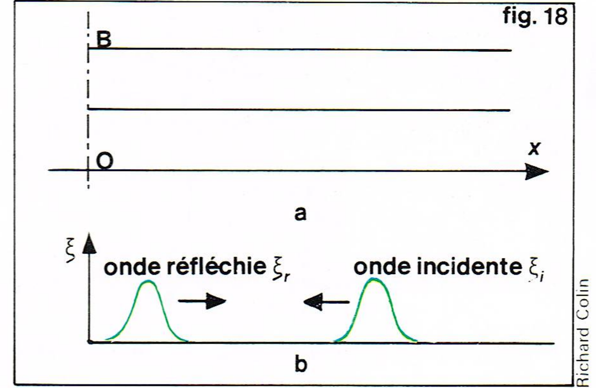
$$\xi_r = -f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

La paroi rigide a pour effet d'ajouter à l'onde sonore initiale une onde symétrique par rapport à l'origine (d'amplitude égale mais de signe contraire, se propageant en sens opposé de la première). Naturellement, lors du passage à l'origine (sur la paroi), les déplacements dus aux deux ondes se détruisent.

Réflexion sur l'extrémité ouverte d'un tuyau

Si l'on envoie une onde sonore dans un tuyau dont l'extrémité est ouverte, on observe expérimentalement que cette onde se réfléchit à l'extrémité du tuyau. En effet, dans le plan de section droite en B (*fig.* 18), la pression





◀ *A gauche, figure 17 : réflexion d'une onde à l'extrémité d'un tuyau fermé. L'onde incidente se propage de la droite vers la gauche : a, le tuyau est fermé en x = 0 ; b, forme des ébranlements incident et réfléchi. A droite, figure 18 : réflexion d'une onde à l'extrémité d'un tuyau ouvert. L'onde incidente se propage de la droite vers la gauche : a, le tuyau est ouvert en x = 0 ; b, forme des ébranlements incident et réfléchi.*

dans le tuyau reste égale à celle de l'extérieur qui ne diffère guère de la pression du fluide au repos.

Soit $\xi_i = f_1\left(t + \frac{x}{v}\right)$ l'onde incidente se propageant dans le sens des x négatifs, et $\xi_r = f_2\left(t - \frac{x}{v}\right)$ l'onde réfléchie se propageant dans le sens des x positifs.

Au point B ($x = 0$), la variation de pression du fluide reste pratiquement nulle, soit :

$$\Delta p = \Delta p_i + \Delta p_r = 0$$

On obtient, en utilisant l'équation **(5)** :

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi_r}{\partial x} = 0 \qquad \text{soit :}$$

$$\frac{1}{v} f'_1\left(t + \frac{x}{v}\right) = \frac{1}{v} f'_2\left(t - \frac{x}{v}\right) \qquad \text{pour } x = 0$$

d'où $f'_1 = f'_2$ ce qui entraîne que les fonctions f_1 et f_2 ont même forme.

A l'onde incidente $\xi_i = f\left(t + \frac{x}{v}\right)$ correspond dans ce cas l'onde réfléchie : $\xi_r = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$

Nous donnons la représentation graphique de ξ_i et ξ_r en fonction de x sur la *figure* 18.

Réflexion sur la surface de séparation de deux milieux fluides indéfinis

Considérons une onde se propageant d'un milieu 1 de masse volumique ρ_1 et de vitesse de propagation v_1 vers un milieu 2 (ρ_2, v_2). Les deux milieux sont séparés par le plan $x = 0$ (*fig.* 19). A cette surface de séparation, l'onde incidente va être réfléchie partiellement et transmise partiellement. Soit $\xi_i = f_1\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$ l'onde incidente se propageant dans le milieu 1 vers les x négatifs ; l'onde réfléchie se propage dans le milieu 1 vers les x positifs. Elle s'écrit donc :

$$\xi_r = f_2\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

L'onde transmise se propage vers les x négatifs dans le milieu 2, elle s'écrit donc :

$$\xi_t = f_3\left(t + \frac{x}{v_2}\right)$$

Nous nous proposons de calculer ξ_r et ξ_t en fonction de ξ_i. Pour cela, nous devons exprimer les deux conditions suivantes :

— L'égalité des déplacements des molécules des fluides de part et d'autre de la surface de séparation (et au voisinage immédiat de celle-ci) ; c'est la condition de *continuité des déplacements*.

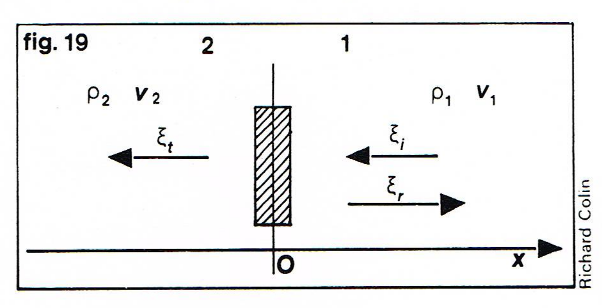
— L'égalité des pressions acoustiques de fluides de part et d'autre de la surface (et à son voisinage immédiat) ; c'est la condition de *continuité des pressions*. En effet, si cette condition n'était pas satisfaite, il s'exercerait une force sur un petit élément de volume dont les faces seraient dans les milieux 1 et 2 (volume hachuré sur la *figure* 19) ; celui-ci, étant de masse infiniment petite, subirait une accélération infiniment grande.

La première condition s'écrit :

(21) $$f_1 + f_2 = f_3$$

La seconde s'écrit d'après **(5)** :

$$\frac{1}{\chi_1 v_1}(f'_1 - f'_2) = \frac{1}{\chi_2 v_2} f'_3$$



▶ *Figure 19 : transmission d'une onde à l'interface de deux milieux caractérisés par des masses volumiques ρ_1 et ρ_2 et des vitesses du son v_1 et v_2. ξ_i représente l'amplitude de l'onde incidente, ξ_r et ξ_t les amplitudes des ondes réfléchie et transmise.*

En intégrant cette relation et en tenant compte du fait que $v^2 = \frac{1}{\chi\rho}$, on a :

(22) $$f_1 - f_2 = \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1} f_3$$

En combinant les équations **(21)** et **(22)**, on obtient :

(23) $$f_2 = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} f_1 \qquad \text{et} \qquad f_3 = \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} f_1$$

Ces relations montrent que, au signe près, les formes des ondes réfléchie et transmise sont les mêmes que celles de l'onde incidente. En particulier, si l'onde incidente est une onde sinusoïdale de pulsation ω, les ondes réfléchie et transmise sont sinusoïdales de même pulsation. Plus précisément, si :

$$\xi_i = A_i \sin\omega\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$$

on a : $\xi_r = A_r \sin\omega\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$

et $\xi_t = A_t \sin\omega\left(t + \frac{x}{v_2}\right)$

Les amplitudes A_r et A_t se calculent en fonction de A_i, v_1 et v_2 d'après **(23)**.

$$A_r = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A_i$$

$$A_t = \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A_i$$

On voit que les paramètres caractéristiques des milieux sont $\rho_1 v_1$ et $\rho_2 v_2$. Posons

(24) $$Z_1 = \rho_1 v_1 \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \rho_2 v_2$$

On a alors :

(25) $$A_r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} A_i$$

$$A_t = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} A_i$$

On retrouve les mêmes relations que dans le cas de la propagation d'ondes électromagnétiques, Z_1 et Z_2 jouant le même rôle que les impédances électriques. C'est pour cette raison que Z_1 s'appelle *l'impédance acoustique du milieu*.

Sur le *tableau* I sont indiquées les valeurs de l'impédance acoustique pour différents milieux.

On voit, d'après les relations **(25)**, que, dans le cas de deux milieux de même impédance acoustique, il n'y a pas d'onde réfléchie. L'amplitude de l'onde transmise est égale à celle de l'onde incidente.

En revanche, dans le premier cas envisagé de réflexion sur une paroi rigide, Z_2 est beaucoup plus grand que Z_1 (par exemple, pour l'aluminium, $Z_2 = 17{,}2 \cdot 10^6$ kg/m² · s et, pour l'air, $Z_1 = 427$ kg/m² · s. On peut alors négliger Z_1 devant Z_2 dans **(25)**, et on constate que l'amplitude de l'onde transmise est pratiquement nulle, alors que l'amplitude de l'onde réfléchie est égale et opposée à celle de l'onde incidente, ce qui est en accord avec les résultats précédents.

Nous avons considéré ici les déplacements, mais il est clair qu'en utilisant la relation **(5)**, on peut obtenir avec des notations évidentes :

$$\frac{P_r}{P_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \beta \qquad \text{et} \qquad \frac{P_t}{P_i} = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Le taux d'ondes stationnaires τ (en abrégé : T. O. S.) est le rapport de l'amplitude de pression maximale à l'amplitude de pression minimale, soit :

$$\tau = \frac{|P_i| + |P_r|}{|P_i| - |P_r|} = \frac{1 + |\beta|}{1 - |\beta|}$$

Si les deux milieux ont des impédances égales, $\beta = 0$, et le T. O. S. vaut 1 ; si Z_1 et Z_2 sont très différents, $\beta \simeq 1$ et le T. O. S. tend vers l'infini. On voit ainsi que le T. O. S. caractérise la qualité de la transmission ; il a pour valeur l'unité en cas de transmission parfaite, et il est très grand pour une mauvaise transmission. Il est alors très clair qu'on aura une bonne transmission du son entre deux milieux s'ils ont des impédances voisines. Lorsque, pour des raisons intrinsèques, ce n'est pas le cas, il sera nécessaire de recourir à des artifices afin d'optimiser

Tableau I				
Milieu	**Masse volumique en kg/m³**	**Vitesse des ondes sonores longitudinales en m/s**	**Vitesse des ondes sonores transversales en m/s**	**Impédance acoustique pour les ondes longitudinales (unités M.K.S.A.)**
Air (0 °C)	1,29	331		427
Hélium	0,178	965		171
Hydrogène	0,0899	1 284		115
Eau pure (25 °C)	$0{,}998 \cdot 10^3$	1 498		$1{,}5 \cdot 10^6$
Eau de mer (25 °C)	$1{,}025 \cdot 10^3$	1 531		1,57
Mercure	$13{,}5 \cdot 10^3$	1 450		19,6
Aluminium	$2{,}7 \cdot 10^3$	6 420	3 040	17,2
Argent	$10{,}4 \cdot 10^3$	3 650	1 610	37,4
Duralumin	$2{,}79 \cdot 10^3$	6 320	3 130	17,6
Fer	$7{,}9 \cdot 10^3$	5 950	3 240	46,6
Plomb	$11{,}4 \cdot 10^3$	2 000	700	22,8
Nickel	$8{,}9 \cdot 10^3$	6 040	3 000	54
Or	$19{,}7 \cdot 10^3$	3 240	1 200	63
Verre	$2{,}2 \cdot 10^3$	5 968	3 764	13,2
Nylon	$1{,}1 \cdot 10^3$	2 620	1 070	2,9
Polyéthylène	$0{,}9 \cdot 10^3$	1 950	540	1,7
Caoutchouc	$1 \cdot 10^3$	1 550		1,5

◄ *Tableau I : valeurs de l'impédance acoustique pour différents milieux.*

la transmission de l'onde. Le porte-voix ou cornet acoustique réalise ainsi l'adaptation de l'impédance de la bouche à celle de l'air ambiant. Dans d'autres cas, on interpose entre les deux milieux une couche dont l'impédance ou l'épaisseur est choisie de manière à assurer une bonne adaptation.

Le pavillon exponentiel

Un cornet acoustique est un dispositif permettant d'adapter les impédances et en particulier la relativement grande impédance d'un petit diaphragme métallique à la faible impédance de l'air ambiant dans lequel le son se propage. En fait, le cornet est un transformateur acoustique, et ses performances dépendent de sa forme. La meilleure forme est celle du pavillon exponentiel dont la section droite S varie exponentiellement avec la longueur.

Choisissons comme axe des x l'axe de symétrie du cornet (*fig.* 20). La section droite à l'abscisse x, S (x) s'écrit :

(26) $$S(x) = S_0 e^{+\gamma x}$$

Considérons une tranche d'air d'épaisseur dx subissant le déplacement ξ suivant Ox, et soit dF_x la somme des forces suivant Ox s'exerçant sur elle. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit :

(27) $$\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = dF_x$$

(ρ est la masse volumique de l'air).

La force dF_x comprend deux termes : l'un est dû aux surpressions Δp qui s'exercent sur les faces S et S', et a pour valeur $dF_x^1 = -\frac{\partial (S \Delta p)}{\partial x} dx$,

l'autre est dû à la projection suivant Ox de la force agissant sur la paroi latérale de surface $d\Sigma$.

$dF_x^2 =$ projection sur Ox de $\Delta p \, d\Sigma = \Delta p \, d\Sigma \cos \alpha$. Dans cette expression, α est l'angle que fait la normale à la surface $d\Sigma$ avec l'axe Ox. C'est le même que l'angle entre $d\Sigma$ et la normale à Ox, donc : $d\Sigma \cos \alpha = \frac{\partial S}{\partial x} dx$.

La relation **(27)** s'écrit alors :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial (S \Delta p)}{\partial x} dx + \Delta p \frac{\partial S}{\partial x} dx$$

soit :

(28) $$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial \Delta p}{\partial x}$$

Relions p à ξ par l'intermédiaire de la dilatation du volume élémentaire $dV = S dx$, sous l'effet de l'onde sonore :

$$\frac{\Delta dV}{dV} = \frac{\left(S + \frac{\partial S}{\partial x} \xi\right)\left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx\right) - S dx}{S dx}$$

ou :

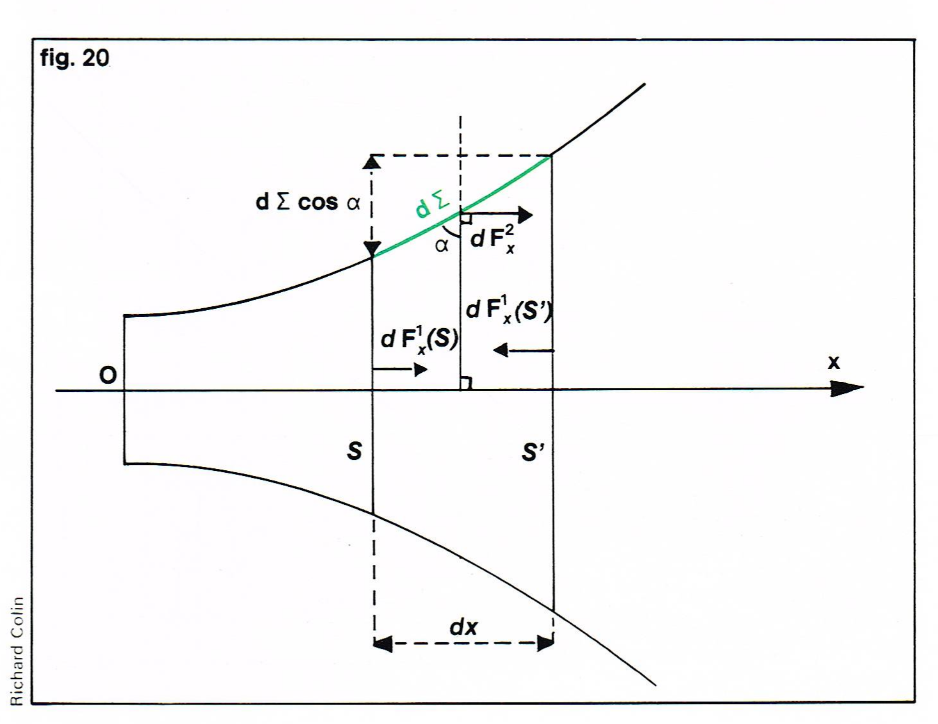
$$\frac{\Delta dV}{dV} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\xi}{S} \frac{\partial S}{\partial x}$$

D'après **(26)** $$\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} = \gamma$$

et, d'après **(1)** $$\chi = -\frac{1}{dV} \frac{\Delta dV}{\Delta p}$$

soit : $$-\chi \Delta p = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \gamma \xi$$

▼ *Figure 20 : le pavillon exponentiel.*





Snark International

▲ *Quelques cornets acoustiques datant du XIXe siècle.*

En introduisant cette expression dans la relation **(28)**, on obtient :

(29) $$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

où $v = \frac{1}{\sqrt{\chi \rho}}$ est la vitesse du son.

On peut montrer que **(29)** admet deux types de solution différents suivant la valeur de la pulsation ω.

Pour ω supérieur à une *pulsation critique* $\omega_c = \gamma \frac{v}{2}$ la solution de **(29)** se présente sous la forme d'une onde progressive amortie se propageant à la vitesse :

$$v' = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

dont l'amplitude diminue avec la distance x à la source comme $e^{-\frac{\gamma x}{2}}$. Cette solution s'écrit :

$$\xi = Ae^{-\frac{\gamma x}{2}} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v'}\right)$$

Si, au contraire, ω est inférieur à ω_c, la solution de **(29)** n'est plus une onde progressive, le caractère de propagation a disparu.

On peut en tirer l'importante conclusion suivante : dans le pavillon, seules peuvent se propager des ondes dont la pulsation ω est supérieure à ω_c ou, ce qui est équivalent, dont la fréquence f est supérieure à la fréquence $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$. C'est pour cette raison que f_c est appelée *fréquence de coupure*. En d'autres termes, le pavillon exponentiel se comporte comme un filtre acoustique passe-haut. Pratiquement, on s'arrange pour que la fréquence de coupure soit assez grave (de l'ordre de 50 à 100 Hz).

▼ *La Loggia dei Mercanti à Milan, un exemple fameux du phénomène de l'écho.*

P. Castano

Le phénomène de l'écho sonore

La réflexion a des applications nombreuses et parfois très curieuses. Le phénomène de l'*écho* est produit par la réflexion d'ondes sonores sur une grande paroi. Pour que l'onde sonore réfléchie puisse être perçue distinctement de l'onde incidente, il faut qu'elle parvienne à l'oreille de l'observateur au moins 1/10 de seconde après qu'a cessé l'émission de l'onde incidente, à cause de la persistance de la sensation sonore sur l'oreille humaine qui est de 1/10 de seconde. Comme la vitesse du son dans l'air est d'environ 330 m/s, l'onde doit parcourir au moins 33 m, et donc la paroi réfléchissante doit se trouver au moins à 16,5 m de l'observateur. Dans ce cas, la dernière syllabe est répétée clairement; on dit que l'écho est monosyllabe. Si la distance de la paroi est d'au moins 33 m, les deux dernières syllabes sont répétées distinctement, et l'écho est bisyllabe. S'il y a plusieurs parois réfléchissantes, on a un écho multiple, c'est ce qu'on observe par exemple dans la Villa Simonetta, près de Milan, où un coup de pistolet peut être entendu 25 fois.

Quand la distance entre la paroi réfléchissante et l'observateur est inférieure à 16,5 m (comme cela se produit dans certains théâtres ou certaines églises), l'onde réfléchie se superpose partiellement à l'onde incidente, empêchant

ainsi une audition nette. On parle de réverbération ou de queue sonore. Cet inconvénient peut être éliminé en mettant dans le local des tentures ou des meubles qui absorbent le son. Il est souhaitable toutefois que cette absorption ne soit pas excessive, car alors l'écho est totalement absent et le local est sourd.

La réflexion des ondes sonores a d'autres applications importantes. Lorsque des ondes sonores de vitesses de propagation parallèles arrivent sur une paroi en forme de sphère ou de paraboloïde d'axe parallèle à la direction des ondes, cette surface joue pour les ondes acoustiques le même rôle qu'un réflecteur pour les ondes lumineuses. Elle concentre les ondes sonores en un point dit foyer. On peut vérifier cet effet en plaçant la membrane d'une capsule manométrique en ce point; la pression y est notablement plus grande qu'ailleurs. On rencontre parfois des illustrations de ce curieux phénomène. Ainsi, à Milan, dans la « Loggia dei Mercanti » (voir photo), les voûtes sont construites de telle manière que, lorsqu'une personne parle à voix basse à proximité d'une colonne, elle peut être entendue très clairement par quelqu'un se trouvant à côté de la colonne placée en face, alors qu'elle n'est pas entendue par une personne plus proche se trouvant au milieu du portique.

En Grande-Bretagne, la célèbre galerie des murmures de la cathédrale Saint-Paul (voir photo) est le siège du même phénomène. Sans aller chercher si loin, on rencontre cet effet dans les stations du métro parisien, dans lesquelles une conversation murmurée peut être établie d'un quai à l'autre (*fig.* 21).

A Syracuse, dans le théâtre grec, on trouve une énorme cave en forme d'oreille humaine creusée dans la roche (voir photo). La légende dit que le tyran Denys l'Ancien se cachait souvent dans la partie supérieure de cette cavité (appelée pour cela oreille de Denys) pour écouter les conversations des prisonniers enfermés dans la partie inférieure.

Ondes stationnaires

Soit un tuyau de longueur L fermé à son origine O. Provoquons à son extrémité ouverte I une onde sonore sinusoïdale se propageant dans la direction des x négatifs vers O. En un point P d'abscisse x, on aura donc superposition des déplacements ξ_i et ξ_r associés aux ondes qui se propagent vers les x négatifs et vers les x positifs (ondes incidente et réfléchie).

Comme $\xi_i = A \sin \omega \left(t + \frac{\overline{IP}}{v}\right) = A \sin \omega \left(t - \frac{L - x}{v}\right)$

et $\xi_r = - A \sin \omega \left(t - \frac{L + x}{v}\right)$,

le déplacement total subi par les molécules de fluide en P s'écrit :

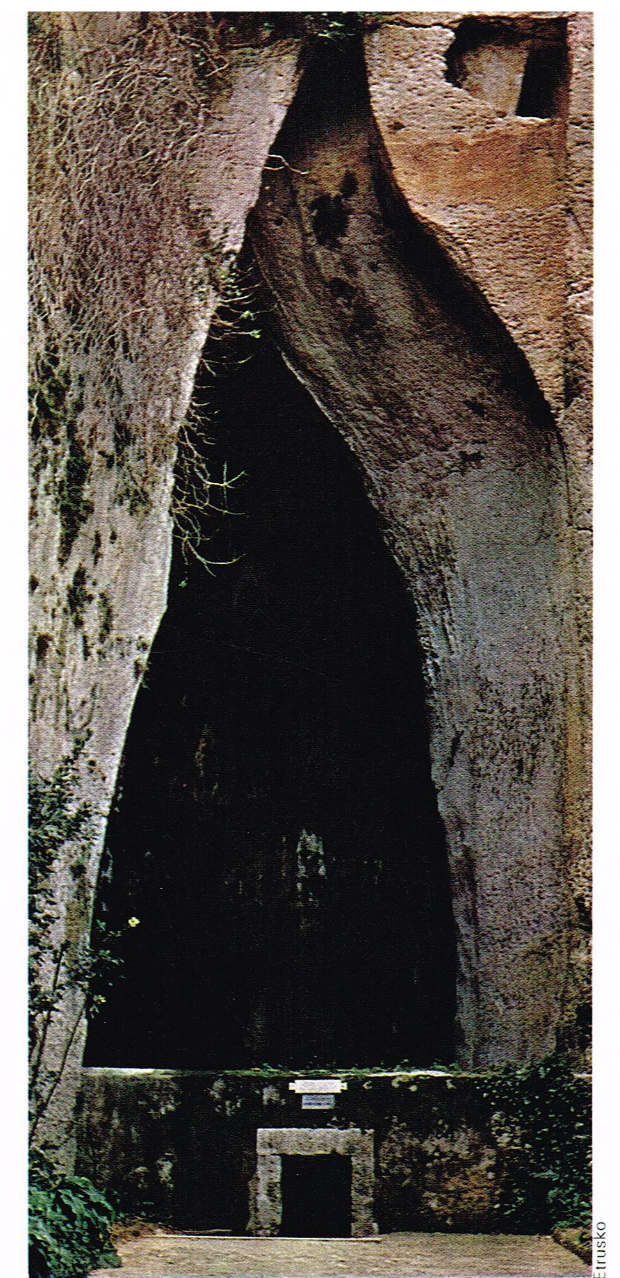
$$\xi = \xi_i + \xi_r = A \left[\sin \omega \left(t - \frac{L - x}{v}\right) - \sin \omega \left(t - \frac{L + x}{v}\right)\right]$$

soit :

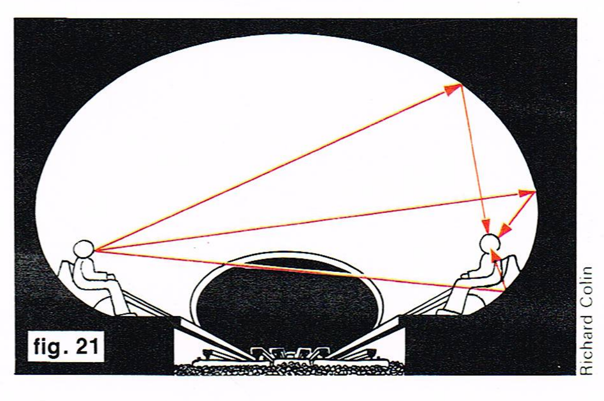
$$\textbf{(30)} \qquad \xi = 2 A \sin \frac{\omega x}{v} \cos \omega \left(t - \frac{L}{v}\right)$$

L'équation **(30)** ne représente plus une onde progressive, car il n'apparaît plus dans l'argument du sinus l'expression $x \pm vt$. ξ se présente comme le produit d'une fonction sinusoïdale des coordonnées d'espace par une fonction sinusoïdale du temps. Cette dépendance en coordonnées d'espace et de temps représente un *mouvement vibratoire stationnaire*. Ce mouvement est tel que le déplacement correspondant est le produit d'une fonction du temps par une fonction de l'espace. ξ est nul en un point d'abscisse x telle que $\sin \frac{\omega x}{v} = 0$, soit : $\frac{\omega x}{v} = k\pi$ d'où $x = \frac{k\lambda}{2}$ où λ est la longueur d'onde et k un entier positif. On aura donc un nœud de vibration en des points d'abscisses multiples de $\frac{\lambda}{2}$; deux nœuds successifs sont distants d'une demi-longueur d'onde.

Les maximums de vibrations (ventres de vibrations) sont équidistants de deux minimums (nœuds) successifs ; ils sont situés en des points d'abscisses $x = \frac{\lambda}{4} + k\frac{\lambda}{2}$.


Etrusko

◀ *L'Oreille de Denys l'Ancien à Syracuse, une énorme cave en forme d'oreille humaine creusée dans la roche du théâtre grec.*



Richard Colin

◀ *Figure 21 : transmission du son dans le métro parisien.*

En ce qui concerne la pression, nous avons vu qu'à un nœud de déplacement correspond un ventre de pression, et réciproquement. En particulier, les nœuds de pression seront situés en des points d'abscisse

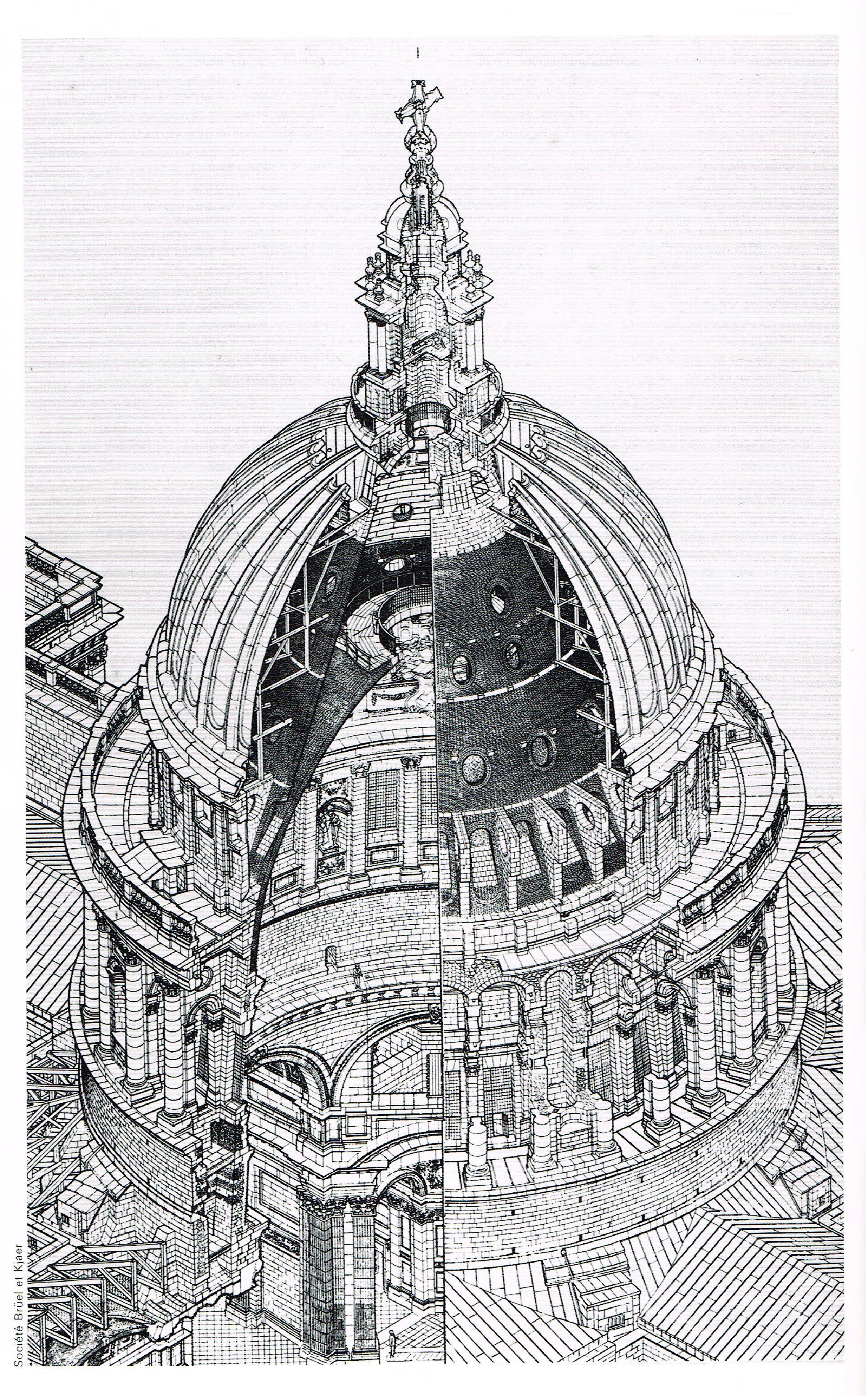
$$x = \frac{\lambda}{4} + k\frac{\lambda}{2}$$

A l'extrémité ouverte du tuyau ($x = L$), nous devons avoir un nœud de pression, donc :

$$\textbf{(31)} \qquad L = \frac{\lambda}{4} + k\frac{\lambda}{2}$$

La situation particulière dans laquelle une telle relation entre la longueur d'onde de la vibration et la longueur du tuyau est satisfaite, correspond au phénomène de résonance. Autrement dit, un système d'ondes stationnaires ne pourra s'établir dans le tuyau que pour certaines fréquences d'excitation ; les fréquences de résonance sont telles que :

▶ *La galerie des murmures de la cathédrale Saint-Paul à Londres, au bord de laquelle se trouve le personnage du centre de la photographie, possède des propriétés acoustiques remarquables : en tournant le visage vers le mur circulaire au niveau de la base de la coupole, on peut communiquer en chuchotant avec une personne se tenant à l'opposé, à 35 m de là, l'oreille près du mur. Certains croient que les réflexions sur la coupole sont à l'origine de ce phénomène, mais une étude géométrique simple en exclut la possibilité. Lord Rayleigh décrivit le phénomène dès 1878 dans son célèbre ouvrage « Théorie du son » et suggéra que le son se propageait le long de la surface du mur. En 1910, il donnait l'explication mathématique du phénomène. Dans la galerie des murmures, le mur concave, conducteur du son, est fait de pierres tout à fait lisses qui, outre qu'elles ont été assemblées avec une grande précision, ont été gorgées d'huile et polies, de sorte que l'absorption est absolument négligeable (Courtoisie de Brüel et Kjaer).*



Société Brüel et Kjaer

$f = \frac{v}{4\,L}\,(2\,k + 1)$ où k est toujours un entier positif.

A différentes valeurs de k correspondent différents *modes de vibration* du système.

En remplaçant v par sa valeur dans l'équation précédente, on obtient :

$$f = \frac{(2\,k + 1)}{4\,L\,\sqrt{\chi\rho}}$$

On constate ainsi que la fréquence de résonance du tuyau est fonction de sa longueur, de la densité et du coefficient de compressibilité de l'air.

Résonance sonore dans les tuyaux

Le phénomène de résonance apparait dans tous les domaines de la physique, et on parle dans les différents cas de résonance mécanique, optique, nucléaire, etc. Ce phénomène très important en physique se rencontre chaque fois qu'un système reçoit une perturbation périodique de fréquence égale à la fréquence propre du système. Il se traduit par une augmentation notable de l'amplitude des oscillations du système par rapport au cas où la perturbation périodique externe est absente. Le mouvement du système est un *mouvement périodique forcé* et le rôle de la perturbation externe est principalement d'empêcher l'amortissement des oscillations du système qui aurait inévitablement lieu à cause des frottements.

Une structure mécanique telle qu'un pont, un édifice, un circuit électrique, un atome, est toujours caractérisée par une fréquence propre, à savoir la fréquence à laquelle le système peut vibrer ; de même, en acoustique, un tube sonore est caractérisé par une fréquence propre. En général (et c'est ce qui rend particulièrement utile le phénomène de résonance sonore), les systèmes acoustiques possèdent un grand nombre de fréquences propres.

Nous allons à présent généraliser la condition de résonance obtenue précédemment pour un tuyau dont l'une des extrémités était fermée et l'autre ouverte, et préciser la notation de fréquence propre du tuyau. Nous devons d'abord distinguer trois types de tuyaux sonores : le type étudié précédemment, que nous appellerons ouvert-fermé (OF), celui ouvert aux deux extrémités, appelé ouvert-ouvert (OO), et celui fermé aux deux extrémités, appelé fermé-fermé (FF). Dans ce dernier type de tuyaux, le son pénètre à travers une très petite ouverture (*fig.* 22).

Comme précédemment, les fréquences de résonance (ou fréquences propres) s'obtiennent à partir de la condition de formation d'ondes stationnaires. Nous avons déjà obtenu ces fréquences dans le tuyau OF :

(32) $$f_{OF} = \frac{(2\,k + 1)\,v}{4\,L_{OF}}$$

Pour un tuyau OO ou FF, elles s'obtiennent en imposant que la longueur du tuyau soit égale respectivement à la distance entre deux nœuds de pression ou entre deux nœuds de déplacement. Dans les deux cas, cette distance correspond à un nombre entier de demi-longueurs d'onde, la condition de résonance s'écrira donc :

$$L_{OO} = L_{FF} = k\,\frac{\lambda}{2}$$

La fréquence de résonance (ou fréquence propre) est donnée par :

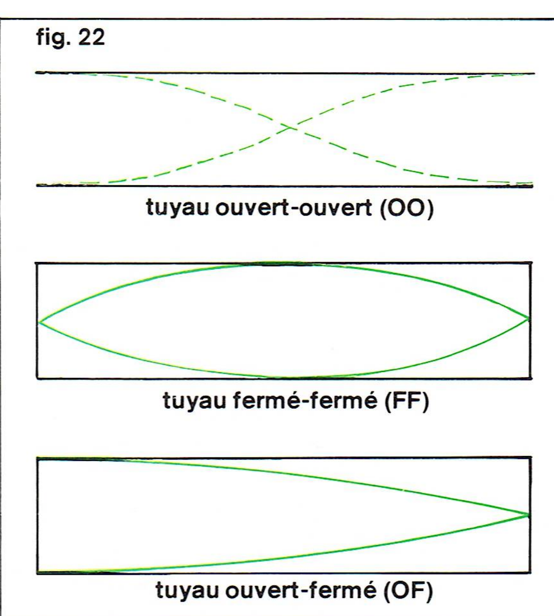
$$f_{OO} = f_{FF} = \frac{kv}{2\,L_{FF}}$$

Sur la *figure* 22 sont représentées les ondes stationnaires qui se forment dans des tubes OO et FF pour $k = 1$, et dans un tube OF pour $k = 0$.

Nous dirons qu'un tuyau est en résonance lorsqu'il est excité par un son dont la fréquence coïncide avec une des nombreuses fréquences propres du tuyau. Remarquons que les tuyaux OO ou FF ont des fréquences propres successives qui sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale $\frac{v}{2\,L_{FF}}$; on obtient :

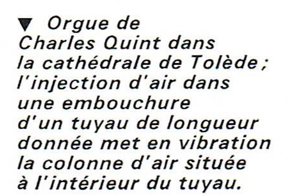
$$f_1 = \frac{v}{2\,L_{FF}},\quad f_2 = \frac{2\,v}{2\,L_{FF}} = 2\,f_1,\quad f_3 = \frac{3\,v}{2\,L_{FF}} = 3\,f_1$$

Les tuyaux de type OF ont, en revanche, pour fréquence fondamentale : $f_0 = \frac{v}{4\,L_{OF}}$.



Richard Colin

◄ *Figure 22 : les résonances dans les tuyaux sonores.*



▼ *Orgue de Charles Quint dans la cathédrale de Tolède ; l'injection d'air dans une embouchure d'un tuyau de longueur donnée met en vibration la colonne d'air située à l'intérieur du tuyau.*

Rapho

et pour harmoniques supérieures, dans l'ordre :

$$f_1 = \frac{3\,v}{4\,L_{OF}} = 3\,f_0,\quad f_2 = \frac{5\,v}{4\,L_{OF}} = 5\,f_0, \ldots$$

Ainsi, avec un tuyau ouvert-ouvert ou fermé-fermé, on peut obtenir les multiples entiers d'une fréquence fondamentale donnée, alors qu'avec un tuyau ouvert-fermé on ne peut obtenir que les multiples impairs d'une fréquence donnée.

Applications expérimentales des tuyaux sonores

Nous allons décrire deux dispositifs expérimentaux de mesure de longueurs d'onde.

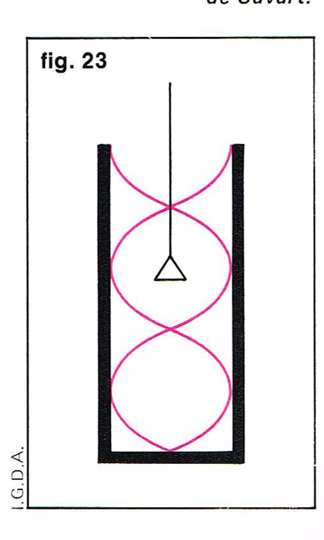
Le premier est le révélateur à membrane de Savart (*fig.* 23), qui permet de mettre en évidence un système d'ondes stationnaires. Il consiste en un tuyau fermé à une extrémité dans lequel on fait vibrer un diapason à l'extrémité ouverte du tuyau. Si la fréquence de vibration du diapason coïncide avec une fréquence propre du tuyau donnée par l'équation **(32)**, un système d'ondes stationnaires s'établit. Pour les mettre en évidence, on introduit dans le tuyau une membrane recouverte d'une poudre très légère. En faisant descendre cette membrane dans le tuyau, on observe des points pour lesquels la poudre est immobile et d'autres où elle est en vibration. Les premiers points correspondent à des nœuds de déplacement, les seconds à des ventres de déplacement. Sachant que deux ventres successifs sont distants d'une demi-longueur d'onde, on peut déterminer la longueur d'onde λ de la vibration. Si l'on connaît la fréquence f de la vibration, on peut en déduire la vitesse de propagation de l'onde à partir de la relation $v = \lambda f$.

Remarquons que ce dispositif est beaucoup plus sensible aux ventres de déplacement, car il est beaucoup plus facile de repérer les vibrations de la poudre que l'état de repos de cette dernière.

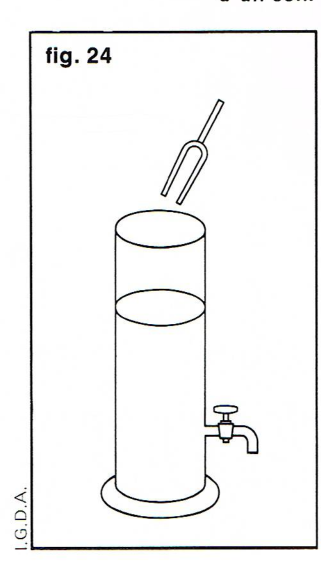
Le deuxième dispositif de mesure de la longueur d'onde d'un son est représenté sur la *figure* 24. Un cylindre est rempli d'eau jusqu'au bord et est muni d'un robinet qui permet d'évacuer l'eau et donc de changer la longueur de la colonne d'air susceptible de rentrer en résonance. A l'extrémité ouverte du tuyau, on fait vibrer la source dont on veut déterminer la longueur d'onde ; lorsqu'on ouvre le robinet, la colonne d'air contenue dans le cylindre au-dessus de l'eau résonne plus particulièrement lorsque sa longueur est égale à un quart de longueur d'onde [voir **(31)**] du son produit. Pour cela, il suffit de mesurer la hauteur de la colonne d'air correspondant au premier maximum d'intensité sonore pour déterminer immédiatement la longueur d'onde du son et sa fréquence, connaissant sa vitesse. La même méthode peut être utilisée pour déterminer la vitesse du son lorsqu'on connaît sa fréquence. Pour avoir une meilleure précision, on préfère souvent mesurer la distance entre deux maximums d'intensité plutôt qu'entre le premier maximum et le haut du récipient.

Supposons que l'on fasse basculer le tuyau précédent de façon à l'amener en position inclinée ; ce faisant, on change la forme de la colonne d'air mais pas son volume. On constate que la résonance n'est pas changée, elle a toujours lieu pour la même quantité d'eau dans le tuyau. A présent, recouvrons partiellement l'embouchure du tuyau avec un morceau de verre ou de toute autre substance dure, et cherchons de nouveau la résonance : on constate que la fréquence de résonance est diminuée ; pour retrouver la situation précédente, il faut ajouter de l'eau, ce qui fait diminuer la longueur de la colonne d'air.

▼ *Figure 23 : dispositif à membrane de Savart.*



▼ *Figure 24 : dispositif simple de mesure de la longueur d'onde d'un son.*

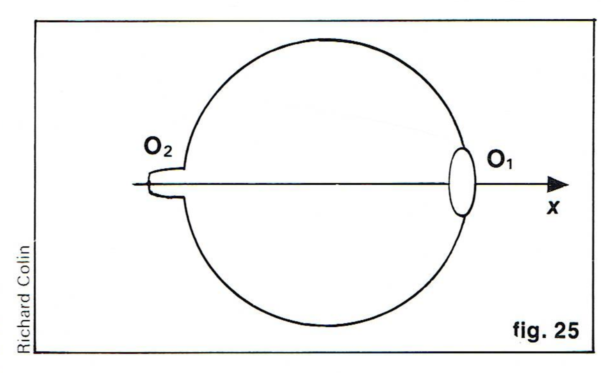


Cavités résonnantes - Résonateur de Helmholtz

Les expériences montrent que la fréquence propre d'une cavité augmente avec la surface de l'embouchure, diminue quand le volume d'air augmente et ne dépend pas de la forme de la cavité.

Les cavités résonnantes, ou résonateurs, sont très utilisées dans l'analyse des sons, et on en construit qui entrent en résonance à des fréquences choisies. Nous allons étudier un résonateur d'un type très particulier, tel que celui représenté sur la *figure* 25 : il est constitué par un corps solide sphérique présentant une ouverture principale O_1 (goulot), et une ouverture plus petite O_2 permettant de relier l'air enfermé dans la cavité à l'oreille de l'observateur. Cette forme de résonateur est appelée *résonateur de Helmholtz*. En effet, c'est à l'aide de sphères creuses de laiton de différentes dimensions que Helmholtz développa ses travaux de pionnier sur l'analyse des sons complexes.

▶ *Figure 25 : représentation schématique du* résonateur de Helmholtz.



Si l'on interpose le résonateur entre une source sonore harmonique (sinusoïdale) dont on fait progressivement varier la fréquence et l'oreille, on constate en général que la perception du son est diminuée, sauf pour une certaine valeur de la fréquence de la source. Un son très faible ayant cette fréquence et normalement à peu près inaudible devient très nettement perceptible lorsqu'on interpose le résonateur entre l'oreille et la source. Cette fréquence de résonance est la fréquence la plus faible (la plus grave) des fréquences propres de la cavité, et l'onde sonore correspondante a une longueur d'onde très grande devant les dimensions du résonateur.

On étudie ici un état vibratoire bien différent de celui des tuyaux sonores. On peut, en effet, admettre, si les dimensions du résonateur sont petites vis-à-vis de la longueur d'onde, que la pression de l'air à l'intérieur du résonateur a partout la même valeur à un instant donné. L'air enfermé dans le résonateur va se comporter comme un ressort vis-à-vis de la tranche d'air au voisinage du goulot O_1 qui jouera le rôle d'un piston.

Soit S la surface de l'ouverture O_1 et soit Ω le volume du matelas d'air mobile. Soit x le déplacement, supposé petit, du « piston » à partir de sa position de repos, et ρ la masse volumique du gaz. La masse de gaz déplacée est donc $\rho\Omega$ et la force d'inertie correspondante $\rho\Omega \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Pour avoir l'écart Δp entre la pression intérieure instantanée et la pression au repos, nous pouvons remarquer qu'au déplacement x correspond la variation de volume $\Delta V = Sx$.

D'après la définition de la compressibilité **(1)**, Δp s'écrit :

$$\Delta p = -\frac{Sx}{\chi V}\quad \text{où V est le volume du résonateur.}$$

La force de rappel agissant sur le « piston » a donc pour expression : $S\Delta p = -\dfrac{S^2x}{\chi V}$.

L'équation du mouvement de la tranche d'air s'écrit alors :

$$\rho\Omega \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{S^2x}{\chi V}$$

C'est l'équation du mouvement pendulaire. Elle admet comme solution :

$$x = A \sin (\omega_0 t + \varphi)$$

d'où l'on tire :

$$\omega_0^2 = \frac{S^2}{\Omega V \rho \chi}$$

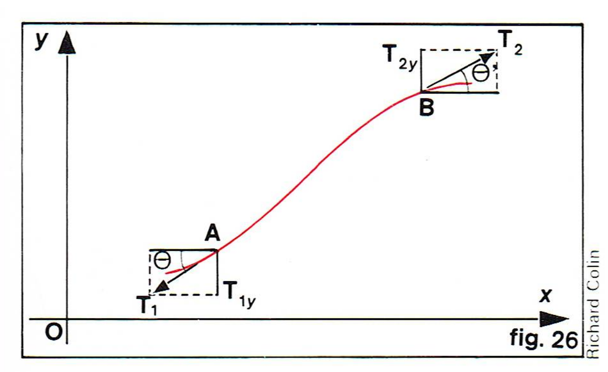
En introduisant la vitesse du son v, on obtient :

$$\omega_0^2 = \frac{S^2 v^2}{\Omega V}$$

La fréquence propre cherchée est :

$$f_0 = \frac{1}{2\,\pi} \frac{Sv}{\sqrt{\Omega V}}$$

La valeur du volume Ω de la tranche d'air dépend de la forme du goulot de l'ouverture O_1. Il est possible de la relier à la surface S de cette ouverture. Par exemple, pour une ouverture percée dans une paroi mince, Ω ne dépend que de la surface de l'orifice et a pour valeur :



$$\Omega = k\,(S)^{\frac{3}{2}}$$

où k est un coefficient numérique. Une théorie plus complète conduit à $k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'où l'on tire : $f_0 = \frac{v\,(S)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{5}{4}}\,\sqrt{V}}$.

En prenant par exemple le cas d'une sphère de 13 cm de diamètre avec une ouverture O_1 de 3 cm de diamètre, la vitesse du son étant $v = 340$ m/s, on trouve $f_0 = 260$ Hz. Or, la longueur d'onde du son à cette fréquence est de 126 cm, c'est-à-dire environ 10 fois le diamètre du résonateur. Nos hypothèses initiales sont donc bien vérifiées.

Amortissement du résonateur

On peut montrer expérimentalement que les oscillations précédentes s'amortissent lorsque le système est abandonné à lui-même. A l'aide d'un résonateur de verre, il est possible de photographier une particule de magnésie de très petites dimensions située dans le plan d'ouverture. Cela permet de suivre le mouvement de cette particule, et donc celui du fluide. On constate ainsi que le mouvement de la particule s'amortit. Les causes d'amortissement sont diverses. Lorsque l'air enfermé dans le résonateur se dilate ou se comprime, il y subit une variation de température ; il se produit donc un échange de chaleur entre l'air et le solide constituant le résonateur, et une partie de l'énergie acoustique est ainsi perdue. En outre, le gaz enfermé dans le résonateur constitue une source d'ondes sonores qui peut rayonner vers l'extérieur à travers le goulot O_1. Enfin, l'air contenu dans le goulot à proximité des parois subit des frottements visqueux.

Équation des cordes vibrantes

Nous avons dit précédemment que les ondes sonores sont longitudinales, cependant, il est bien connu que de nombreux instruments de musique produisent des ondes sonores à partir de cordes vibrantes tendues, dans lesquelles les ondes produites sont des ondes mécaniques transversales. Les vibrations transversales d'une corde produisent à leur tour, dans l'air ambiant, des vibrations longitudinales qui se traduisent par la production de sons. C'est pour cela que l'étude des cordes vibrantes est importante en acoustique.

Soit une corde en vibration uniforme, parfaitement flexible, et considérons plus particulièrement un morceau infinitésimal de corde AB (*fig.* 26). Initialement, la corde est confondue avec l'axe Ox, puis, lorsqu'elle est pincée, tous ses points se déplacent transversalement d'une quantité y et la portion AB à un instant donné a la configuration de la figure. En négligeant le poids de la corde, les seules forces agissant sur l'élément AB sont les deux tensions T_1 et T_2, qui, pour une corde inextensible, sont égales en module alors que leurs directions sont tangentes à la corde en A et en B. Nous cherchons à évaluer le déplacement y des différents points de la corde en fonction du temps et de l'abscisse x et, pour cela, nous écrivons l'équation fondamentale de la dynamique $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ ($\vec{\gamma}$ = accélération) projetée sur l'axe y. Pour l'élément infinitésimal de masse dm, cette équation s'écrit :

(33) $$dF_y = dm\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

où dF_y est la projection sur l'axe des y de la force élémentaire agissant sur l'élément AB.

Si μ est la masse par unité de longueur de la corde, on a : $dm = \mu dx$. Comme dF_y est donné par la différence $T_{2y} - T_{1y}$ on a :

$$T_{2y} - T_{1y} = \mu dx\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

Or, d'après la figure : $T_{2y} = T_2 \sin\theta'$

et $T_{1y} = T_1 \sin\theta$

Comme les angles θ et θ' sont extrêmement petits, on peut confondre leur sinus et leur tangente, et nous écrirons, en notant par T la valeur commune de T_1 et de T_2 :

(34) $$dF_y = T\,(\text{tg}\,\theta' - \text{tg}\,\theta)$$

En utilisant les relations :

$$\text{tg}\,\theta' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 \quad \text{et} \quad \text{tg}\,\theta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1$$

(où les indices externes aux parenthèses indiquent que les dérivées doivent être calculées au point B et au point A respectivement) et la relation $\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 + \frac{d^2y}{dx^2}\,dx$ (développements en série), on peut réécrire l'équation **(34)** sous la forme :

$$dF_y = T\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx$$

et en comparant avec **(33)** :

$$\mu dx\,\frac{d^2y}{dt^2} = T\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx$$

soit $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T}\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

Cette équation est connue comme *l'équation de D'Alembert des cordes vibrantes*, et est l'analogue de l'équation trouvée dans le cas d'ondes sonores planes et longitudinales. En reprenant la même démarche que précédemment, il est aisé de montrer que, dans ce cas aussi, l'expression $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ représente la vitesse de propagation de l'onde dans le sens des x. L'unique différence consiste dans le fait que, puisque le milieu de propagation est la corde, la vitesse est fonction des caractéristiques de celle-ci, son élasticité est représentée par la tension T et son inertie par la densité linéaire μ. Dans ce cas aussi, la solution la plus générale de l'équation de D'Alembert est du type :

$$y\,(x, t) = f_1\,(x - vt) + f_2\,(x + vt)$$

Le premier terme correspond à une onde se propageant dans le sens positif de l'axe x, le deuxième à une onde se propageant dans le sens négatif. Un cas particulièrement important est celui de l'onde sinusoïdale :

$$y\,(x, t) = A \sin\,(kx - \omega t) \quad \text{(onde progressive)}$$

ou $$y\,(x, t) = A \sin\,(kx + \omega t) \quad \text{(onde régressive)}$$

On remarquera que nous avons volontairement changé la notation du déplacement de ξ en y pour rappeler que nous sommes passé d'une onde longitudinale à une onde transverse.

Nous pouvons transposer les raisonnements précédents sur les ondes stationnaires sonores aux ondes stationnaires sur une corde vibrante. Supposons que la corde soit le siège d'une onde stationnaire :

$$y\,(x, t) = A \sin kx \cos \omega t$$

Cherchons la *condition de résonance* dans le cas d'une corde attachée aux deux extrémités, ce qui impose un déplacement nul en $x = 0$ et en $x = L$, soit $y\,(0, t) = 0$ et $y\,(L, t) = 0$.

La première condition est automatiquement vérifiée, la seconde impose :

$$\sin kL = 0, \quad \text{soit} \sin \frac{2\,\pi L}{\lambda} = 0$$

Les seules longueurs d'onde λ qui peuvent satisfaire cette condition aux limites sont celles pour lesquelles on a :

$$\frac{2\,L}{\lambda} = n\pi \quad \text{où } n \text{ est un entier positif}$$

$$\left(\text{soit } \frac{2\,L}{\lambda} = \pi, 2\,\pi, 3\,\pi, 4\,\pi, \ldots\right).$$

Cet ensemble de manières possibles de satisfaire les conditions aux limites correspond à tous les modes possibles de vibration de la corde. Les fréquences

◄ ***Figure 26 :** **analyse des forces agissant sur un élément de corde.***

▶ *Figure 27 : graphe de l'intensité de l'onde en fonction de la distance.*

correspondant aux différents modes se trouvent en remarquant que $f = \frac{v}{\lambda}$, les fréquences de résonance sont :

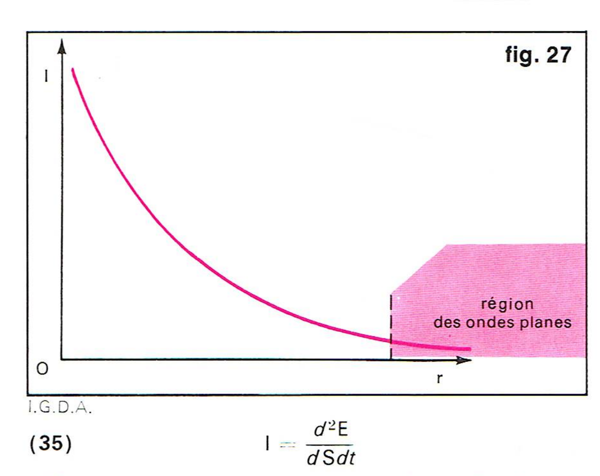
$$f_1 = \frac{v}{2\,L},\quad f_2 = 2\,f_1,\quad f_3 = 3\,f_1,\quad \ldots$$

Les fréquences $2\,f_1$, $3\,f_1$, ..., sont appelées deuxième, troisième, etc., harmonique de la fréquence fondamentale f_1. Celle-ci est une fonction de la longueur L de la corde, et à travers v, de sa tension T et de sa densité linéaire μ. Le fait que les fréquences de résonance f_2, f_3, ..., forment une séquence d'harmoniques de la fréquence la plus basse f_1 résulte de l'hypothèse que la corde est parfaitement flexible et uniforme. Des systèmes physiques réels ont des fréquences de résonance qui ne sont pas exactement des multiples d'une même fréquence. Par exemple, les fréquences de résonance d'une corde de densité non uniforme ne forment pas une suite d'harmoniques de la fréquence fondamentale ; en fait, on peut avoir, par exemple, $f_2 = 2{,}65\,f_1$, $f_3 = 4{,}25\,f_1$, etc.

Pour une corde à piano ou de violon, les fréquences de résonance forment approximativement mais non exactement une suite harmonique ; cela est dû au fait qu'elles ne sont pas parfaitement flexibles.

Intensité d'une onde sonore

Considérons une onde sonore sphérique émise par une source ponctuelle dans un milieu homogène isotrope et infini. On définit l'*intensité de l'onde* comme la quantité d'énergie E qui arrive perpendiculairement à une *surface unité* pendant l'unité de temps, soit :



I.G.D.A.

(35)
$$I = \frac{d^2E}{dS\,dt}$$

En revanche, la *puissance transportée par l'onde* est la quantité d'énergie qui arrive perpendiculairement *à une surface donnée* pendant l'unité de temps, soit :

$$W = \frac{dE}{dt}.\ \text{On voit alors que}\ I = \frac{dW}{dS}.$$

Dans le cas où le milieu est homogène et isotrope, et la source **S** ponctuelle, la puissance transportée par l'onde est la même en tout point d'une sphère de centre **S**. L'expression précédente devient :

(36)
$$I = \frac{W}{S}$$

En négligeant les pertes éventuelles d'énergie de l'onde dans le milieu, on peut considérer que la puissance sur les diverses surfaces d'onde sphériques atteintes par l'onde à des instants successifs est constante. Soit I_1 l'intensité de l'onde à la distance r_1 de la source **S** et I_2 l'intensité à la distance r_2, on en déduit, en utilisant **(36)**, que :

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

Ainsi, l'intensité de l'onde est inversement proportionnelle au carré de la distance à la source. Si l'on représente graphiquement l'intensité en fonction de la distance à la source, on obtient la courbe de la *figure* 27, sur laquelle on voit clairement qu'à partir d'une certaine distance, l'intensité reste pratiquement constante ; on a alors une onde plane.

Nous nous proposons maintenant de donner l'expression de l'intensité d'une telle onde. Reprenons l'expression **(35)** et calculons l'énergie arrivant perpendiculairement à une surface élémentaire donnée. Elle est la somme de deux énergies : l'énergie cinétique d'un élément de fluide de masse $dm = \rho dV$ et l'énergie potentielle due à l'élasticité du milieu. Le premier terme peut s'écrire :

$$dE_c = \frac{1}{2}\rho dV\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2$$

où $\xi = A \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$ est le déplacement induit par l'onde et $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ la vitesse de ce déplacement.

L'énergie potentielle s'obtient en calculant le travail de la force de rappel s'exerçant sur les particules du fluide et qui est due à la pression du milieu. Cette force est donnée par l'équation **(7)** :

$$dF = \frac{1}{\chi}\,dV\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

Le travail infinitésimal lors du déplacement $d\xi$ des particules est :

$$\frac{1}{\chi}\,dV\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,d\xi = \frac{1}{\chi}\,dV\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\,dx$$

L'énergie potentielle s'obtient en intégrant cette expression :

$$dE_p = \frac{1}{2\chi}\,dV\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2$$

or,
$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{1}{v}\,\frac{\partial\xi}{\partial t}$$

▼ *Conductibilité du son par les corps solides ; une expérience intéressante de physique sans appareils : on attache une cuillère en métal à un fil, on enfonce les deux extrémités de ce fil dans chaque oreille, puis l'on imprime un mouvement de balancement à la cuillère afin qu'elle touche le bord d'une table ; la transmission est si intense que l'on croirait entendre résonner un bourdon de cathédrale.*



Archives M.R.

En remplaçant v par sa valeur $v = \frac{1}{\sqrt{\chi\rho}}$, on obtient :

$$dE_p = \frac{1}{2}\rho dV \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2$$

On constate donc que l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle. L'énergie totale est donc :

$$dE = \rho dV \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2$$

Mais, comme $\frac{\partial\xi}{\partial t} = -A\omega \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right)$, on a finalement :

$$dE = \rho dVA^2\omega^2 \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

Cette expression varie dans le temps ; évaluons sa valeur moyenne sur un intervalle de temps d'une période T :

$$\overline{dE} = \frac{1}{T}\int_0^T dE\, dt = \frac{1}{2}\rho dVA^2\omega^2$$

En reportant cette valeur dans la relation **(35)** et en se rappelant que $dV = dS\, dx$, on peut écrire, pour une onde qui se propage le long de l'axe des x :

$$I = \rho \frac{A^2}{2} \omega^2 \frac{dx}{dt}$$

Or $\frac{dx}{dt}$ est la vitesse de propagation de l'onde, c'est-à-dire v ; on peut donc écrire :

$$I = \frac{1}{2} A^2\omega^2\rho v$$

On voit dans cette expression que l'intensité d'une onde sonore est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration et au carré de la fréquence, grandeurs qui sont des caractéristiques de la source, alors qu'elle est simplement proportionnelle à la masse volumique ρ et à la vitesse de propagation v, qui sont des grandeurs caractéristiques du milieu.

En introduisant l'impédance $Z = \rho v$, I s'écrit :

$$I = \frac{1}{2} A^2\omega^2 Z$$

Nous pouvons écrire I sous une forme différente en faisant intervenir l'amplitude de la pression acoustique P. D'après la relation **(5)**, $\Delta p = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{A}{\chi}\frac{\omega}{v} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right)$, soit :

$$P = \frac{A\omega}{\chi v}$$

on en déduit : $$I = \frac{P^2}{2Z}$$

expression dans laquelle la pulsation de l'onde n'intervient plus. On peut également comprendre sur cette expression pourquoi la pression acoustique, associée à une onde d'intensité donnée, est beaucoup plus grande dans l'eau que dans l'air.

Pouvoir réflecteur acoustique

Nous allons maintenant considérer ce qui se passe lorsqu'une onde de pulsation ω arrive à l'interface de deux milieux d'impédances acoustiques Z_1 et Z_2. Nous allons tout d'abord vérifier que les relations obtenues précédemment pour la réflexion satisfont au principe de conservation de l'énergie. Soit A_i l'amplitude de l'onde incidente, A_r et A_t celles de l'onde réfléchie et de l'onde transmise. En utilisant les relations **(25)**, il est aisé de montrer que :

$$\frac{1}{2} Z_1\omega^2 (A_i^2 - A_r^2) = \frac{1}{2} Z_2\omega^2 A_t^2$$

Cette expression montre bien que l'intensité acoustique dans le milieu 2 est la différence entre l'intensité incidente et l'intensité réfléchie dans le milieu 1. Cette condition exprime bien la conservation de l'énergie acoustique.

On appelle *pouvoir réflecteur* R de la surface de séparation le quotient des intensités réfléchie et incidente :

$$R = \frac{1/2\, Z_1 A_r^2\omega^2}{1/2\, Z_1 A_i^2\omega^2}$$

En utilisant les relations **(25)**, on trouve que :

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

De même qu'en optique, lors de la réflexion vitreuse de la lumière sous incidence normale, le pouvoir réflecteur ne dépend pas de l'ordre de succession des milieux. Il sera voisin de l'unité pour des milieux d'impédances très différentes ; dans ce cas, l'onde sera presque complètement réfléchie dans le milieu d'origine et la partie transmise sera très faible. En revanche, si les milieux ont des impédances voisines, le pouvoir réflecteur sera faible.

De très nombreux exemples s'expliquent par ce comportement du pouvoir réflecteur. Dans le cas de la surface de séparation de l'air et de l'eau, R est très voisin de l'unité ; ainsi, une explosion très violente dans l'eau ne provoquera que de faibles remous dans l'air.

La qualité acoustique d'une salle dépend de la manière dont elle « résonne ». Ainsi, une salle vide aux murs lisses résonne beaucoup, car l'intensité des ondes acoustiques réfléchie par les murs est grande : l'impédance des murs étant de beaucoup supérieure à celle de l'air, le pouvoir réflecteur est grand. On peut diminuer cette résonance en mettant aux murs des tentures qui ont une impédance comprise entre celle de l'air et celle des murs, et donc un pouvoir réflecteur plus faible.

La détection sous-marine utilise les ultrasons qui sont des ondes sonores de haute fréquence, qui, en se réfléchissant sur des obstacles, permettent de les localiser. Il suffit, en effet, de mesurer l'intervalle de temps entre une impulsion de courte durée et son écho et de connaître la vitesse du son dans l'eau pour en déduire la distance de l'obstacle. Ce principe, utilisable pour détecter les icebergs, a été difficile à mettre en œuvre, car l'eau et la glace ont des impédances acoustiques voisines ; le pouvoir réflecteur est faible, et donc l'écho également. Nous pouvons en donner une estimation, sachant que le rapport $\frac{Z_{\text{glace}}}{Z_{\text{eau}}} \sim \frac{3}{4}$.

On en déduit : $R = \left(\frac{3/4 - 1}{3/4 + 1}\right)^2 \sim 0{,}02$

Cette estimation est un peu faible ; en effet, les icebergs contiennent de l'eau et de la terre qui augmentent la réflexion des ondes sonores. De plus, les progrès réalisés dans les domaines des systèmes d'émission et de détection des ondes acoustiques, et de l'électronique d'exploitation du signal, permettent maintenant de détecter ces échos assez aisément.

Production d'intensités acoustiques très élevées

Le problème se pose de manière différente suivant qu'il s'agit de milieux gazeux ou de milieux liquides.

Dans le cas de milieux gazeux, l'impédance Z est faible, et, si l'on veut que $I = \frac{1}{2} ZA^2\omega^2$ atteigne une valeur notable, il faudra (aux fréquences moyennes) donner de grandes valeurs à l'amplitude A des vibrations de la surface de la source. Ce qui est assez difficile dans le cas de surfaces solides. Il sera alors préférable d'avoir un volume gazeux en vibration, c'est ce qui est réalisé avec les tuyaux d'orgues, les sirènes, etc. Par exemple, dans le cas d'une source placée dans l'air, de fréquence $f = 1\,000$ Hz, d'amplitude $A = 1/10$ mm, on obtient, en se souvenant que l'impédance de l'air est $Z_{\text{air}} = 427$ kg/m$^2 \cdot$ s (voir tableau I), $I \simeq 100$ watts/m^2.

Or, dans une salle de dimensions moyennes (300 personnes), 2 à 3 watts acoustiques suffisent largement pour assurer une bonne audition. Dans les conditions de l'exemple ci-dessus, il suffirait donc d'une source ayant une surface émissive de 2 à 3 dm^2 pour l'atteindre.

Dans le cas de milieux liquides, l'impédance est grande, et avec de faibles amplitudes de vibration, il sera possible d'avoir des intensités importantes. Par exemple, en employant comme source des lames de quartz piézoélectriques, on obtient aisément des fréquences vibratoires de l'ordre de 100 000 Hz (ultrasons). Pour une amplitude de l'ordre de 10^{-4} mm, et dans le cas où la source est placée dans l'eau, on obtient, sachant que l'impédance de l'eau est $1{,}5 \times 10^6$ kg/m$^2 \cdot$ s, une intensité

$$I = 3\,000 \text{ watts/m}^2$$

valeur beaucoup plus grande que précédemment.

▶ *Figure 28; interférences de deux ondes : a, en phase ; b, en opposition de phase.*

L'intensité acoustique est limitée par le phénomène de *cavitation*. En effet, un liquide parcouru par une onde a une pression qui varie entre $p_0 - P$ et $p_0 + P$, où p_0 est la pression en l'absence d'onde et P l'amplitude de pression acoustique. Il ne faut pas que $p_0 - P$ atteigne la pression de vapeur saturante du liquide, car alors celui-ci se vaporiserait. Autrement dit, P a pour valeur limite P_{max} une pression de l'ordre de la pression atmosphérique, soit :

$$P_{max} \sim 10^5 \text{ pascals}$$

L'intensité limite associée à cette pression est :

$$I_{max} \sim \frac{(P_{max})^2}{2\,Z} = \frac{(10^5)^2}{2 \times 1{,}5 \cdot 10^6} \sim 3\,000 \text{ watts/m}^2$$

Si l'on veut dépasser cette valeur, il faut augmenter la valeur de la pression p_0 sous peine de voir apparaître des bulles de vapeur par cavitation. En utilisant des huiles de très basse pression de vapeur saturante, il est possible de réaliser des intensités acoustiques de quelque 10^4 watts/m² (quelques watts par cm²).

Caractères distinctifs des sons

Les différents sons peuvent se distinguer les uns des autres par trois caractères distinctifs : la hauteur, l'intensité et le timbre.

La **hauteur** d'un son est caractérisée par la fréquence de celui-ci ; on dit qu'un son est plus haut qu'un autre (ou plus aigu) lorsque sa fréquence est supérieure, alors qu'on dit qu'il est plus bas (ou plus grave) quand sa fréquence est inférieure.

L'**intensité** d'un son est caractérisée, comme nous venons de le voir, par le carré de l'amplitude de la vibration. Deux sons peuvent avoir la même fréquence, et donc la même hauteur mais des intensités différentes, s'ils ont des amplitudes différentes.

Le **timbre** est caractérisé par l'ensemble des fréquences qui accompagnent la fréquence fondamentale, c'est-à-dire par le « cortège harmonique ». En effet, il est connu qu'à peu près aucun instrument ne peut émettre de note pure. On peut donc décomposer le son émis, grâce au théorème de Fourier, en un nombre infini d'ondes sinusoïdales de fréquences commensurables entre elles. La première fréquence s'appelle fondamentale, les suivantes sont respectivement le premier harmonique, le second harmonique, etc. Ainsi, la même note musicale jouée par deux instruments différents arrive à notre oreille avec un timbre différent, car en général les cortèges harmoniques accompagnant la note fondamentale sont différents.

Interférences des ondes sonores

Le phénomène d'interférence est un phénomène caractéristique de toutes les formes de transport d'énergie par ondes. Il consiste en une altération de la distribution d'intensité de deux ondes quand elles se rencontrent dans une région donnée de l'espace. Par souci de simplicité, considérons deux ondes planes sinusoïdales qui se déplacent simultanément dans la direction des x positifs ; ces ondes ont la même fréquence et la même amplitude. Les déplacements provoqués par chacune d'elles sont parallèles et s'écrivent :

$$\xi_1 = A \sin (kx - \omega t)$$
$$\xi_2 = A \sin (kx - \omega t + \varphi)$$

où φ est la différence de phase entre les deux ondes. L'onde résultante, d'après le principe de superposition de Bernoulli, provoquera un déplacement :

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

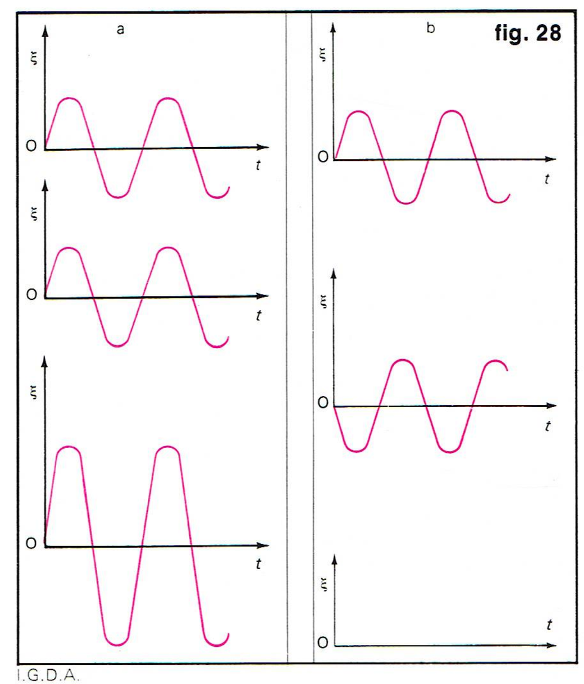
soit : $\xi = A \sin (kx - \omega t) + A \sin (kx - \omega t + \varphi)$

En appliquant les formules de combinaison des sinus et cosinus, on trouve que :

$$\xi = 2\,A \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \cos \frac{\varphi}{2}$$

En posant $B = 2\,A \cos \frac{\varphi}{2}$, le déplacement précédent devient : $\xi = B \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$

qui représente une onde progressive dans le sens des x positifs de même fréquence que les ondes initiales, mais



dont l'amplitude n'est plus constante et varie avec le déphasage φ. Dans le cas où $\frac{\varphi}{2} = 0, \pi, 2\pi, ..., n\pi$ (avec $n = 0, 1, 2, ...$), soit $\varphi = 2\,n\pi$, $\cos \frac{\varphi}{2}$ a pour valeur absolue 1 et l'amplitude de l'onde résultante est 2 A ; dans le cas où $\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ..., (2\,n + 1)\frac{\pi}{2}$, soit $\varphi = (2\,n + 1)\,\pi$, $\cos \frac{\varphi}{2}$ est nul, c'est-à-dire que l'amplitude de l'onde résultante est nulle. Sur la *figure* 28a, on a représenté l'onde résultant de la superposition de deux ondes de même fréquence, de même amplitude et de différence de phase nulle (on dit qu'elles sont *en phase*). Sur la *figure* 28b, les deux ondes sont déphasées de π (on dit qu'elles sont en *opposition de phase*).

On aboutit au résultat suivant : dans la région où les deux ondes se superposent, on rencontre des points où l'amplitude résultante est maximale et d'autres où elle est nulle pour $\varphi = 2\,n\pi$ ou $\varphi = (2\,n + 1)\,\pi$, c'est-à-dire pour φ égal respectivement à un nombre pair ou à un nombre impair de fois π.

On obtient un résultat plus intéressant si l'on raisonne en termes d'intensité plutôt que d'amplitude. Comme l'intensité de l'onde est proportionnelle au carré de l'amplitude, si la première onde a une intensité proportionnelle à A^2, et donc la seconde une intensité aussi proportionnelle à A^2, aux points d'amplitude maximale, l'onde résultante n'aura pas une intensité proportionnelle à $2A^2$ comme on pourrait le croire, mais à $4A^2$, c'est-à-dire à $(2A)^2$. Cet effet produit en certains points une amplification du son, et l'on parle d'*interférence positive ou constructive*, en d'autres points un silence total, et l'on parle d'*interférence négative* ou *destructive*. On peut remarquer que nous avons supposé que les deux ondes incidentes avaient la même amplitude seulement pour la commodité de l'exposé. Le phénomène d'interférence existe même si les deux ondes ont des amplitudes différentes A_1 et A_2 ; dans ce cas, il est aisé de montrer que l'amplitude de l'onde résultante est :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1A_2 \cos \varphi}$$

Quand $\varphi = 2\,n\pi$, on a :

$$A = A_1 + A_2 \qquad \text{(interférence positive)}$$

alors que, quand $\varphi = (2\,n + 1)\,\pi$, on a :

$$A = A_1 - A_2 \qquad \text{(interférence négative)}$$

Ainsi, lorsque les amplitudes de deux ondes qui interfèrent ne sont pas égales, l'amplitude de l'onde résultante est toujours différente de 0 et, par conséquent, on n'a jamais une extinction complète du son. Comme la distri-

bution des maximums et des minimums d'interférence reste stable dans le temps, il est nécessaire que la différence de phase φ des deux ondes le soit.

Essayons à présent de décrire le même concept, non plus en termes de différence de phase, ce qui peut paraître plutôt abstrait, mais en différence de chemin sonore entre les deux ondes. Reprenons l'expression du déplacement ξ_2 et écrivons-la sous la forme équivalente :

$$\xi_2 = A \sin \left[k \left(x + \frac{\varphi}{k} \right) - \omega t \right]$$

La différence existant entre la première et la deuxième onde est maintenant seulement due à la différence de distances parcourues depuis la source : la première onde a parcouru au temps t une distance x, la seconde une distance $x + \frac{\varphi}{k}$. Ainsi, dire que les deux ondes ont une différence de phase de φ équivaut à dire qu'il existe une différence de chemin sonore parcouru : $\Delta = \frac{\varphi}{k}$ ou, puisque $k = \frac{2\pi}{\lambda}$: $\Delta = \frac{\varphi\lambda}{2\pi}$.

En substituant dans cette équation les valeurs de φ correspondant respectivement aux conditions d'interférence positive ou négative, on obtient les résultats suivants :

(37) Pour $\Delta = n\lambda$ interférence positive,

(38) Pour $\Delta = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$ interférence négative.

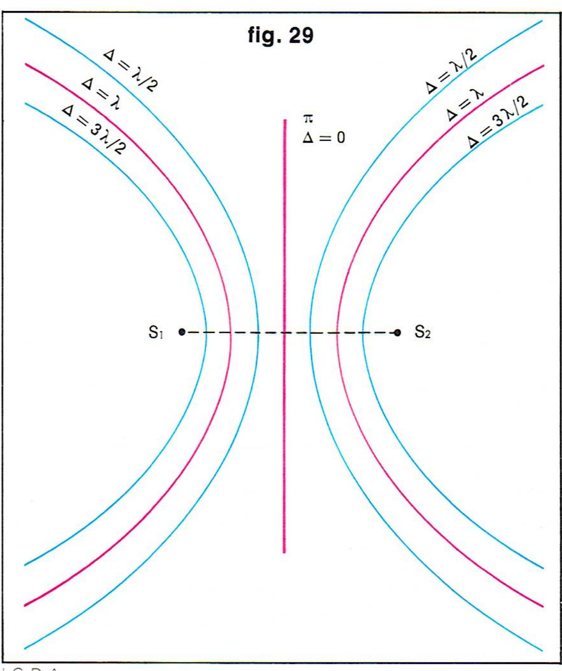
Quand la différence de chemin entre les deux ondes est un nombre entier de longueurs d'onde, on a une amplification du son, alors que quand cette différence est justement un nombre impair de fois la demi-longueur d'onde, on a diminution de l'intensité sonore, ou même extinction complète si les deux ondes ont la même amplitude.

On remarquera qu'il est absolument indispensable que les faisceaux d'ondes interférant aient la même fréquence et donc la même longueur d'onde ; en fait, si leurs longueurs d'onde étaient différentes, à une condition de maximum pour une longueur d'onde donnée pourrait correspondre une condition de minimum pour une autre longueur d'onde, et la distribution d'interférences en serait altérée.

Nous avons traité jusqu'à présent le cas de deux ondes sonores se propageant dans la même direction afin de simplifier les calculs. Cependant, on peut aisément généraliser les résultats précédents au cas d'ondes incidentes se propageant dans des directions différentes et constater que, qualitativement, le phénomène d'interférences décrit reste le même.

Le problème qui nous intéresse à présent est de savoir quelle est la probabilité pour que deux ondes maintiennent une différence de phase constante. Nous pouvons dire tout de suite qu'une telle probabilité est pratiquement nulle : en effet, la différence de phase des ondes sonores émises par deux sources données varie aléatoirement dans le temps (de façon chaotique), ce qui veut dire qu'en pratique il est extrêmement improbable, pour ne pas dire impossible, d'obtenir des effets d'interférence avec deux sources sonores quelconques. Pour obtenir des interférences acoustiques, on utilise alors le stratagème suivant : on fait parcourir des chemins différents à des ondes émises par une même source, et on les fait se rencontrer dans une région de l'espace où l'on souhaite obtenir des effets d'interférence. Dans d'autres cas, ces effets sont involontaires ; ainsi, lorsque des haut-parleurs sont alimentés par le même signal électrique, des interférences se produisent dans les régions atteintes par les ondes sonores émises par les divers haut-parleurs. Cet effet peut être gênant et peut nuire à l'ambiance sonore créée. Nous devons préciser une autre condition concernant la source ; si elle est étendue, les ondes issues des divers points de cette source peuvent elles-mêmes produire des interférences. Le son créé par une telle source n'est donc pas le même en tous les points de l'espace situés à égale distance de la source. On a alors une source directive. Avec une source ponctuelle (petite devant la longueur d'onde du son émis) les amplitudes sonores sont les mêmes pour tous les points de l'espace situés à une même distance de la source.

Nous pouvons à présent récapituler les conditions pour



◀ *Figure 29 : alternance d'hyperboloïdes de révolution correspondant aux régions d'extinction (bleu) et de renforcement (rouge) des sons. Le plan π est perpendiculaire à la droite qui relie les sources S_1 et S_2 et est situé entre ces sources.*

lesquelles il est possible d'avoir des interférences entre ondes sonores : la condition fondamentale est que la différence de phase entre les deux ondes reste rigoureusement constante dans le temps ; ceci est connu sous le nom de *cohérence* des ondes. Une telle condition peut s'expliciter en imposant la monochromaticité des ondes, c'est-à-dire l'égalité de leurs fréquences et l'usage d'une source ponctuelle. La première condition s'appelle *cohérence temporelle,* la seconde *cohérence spatiale*.

Si nous appelons à présent x_1 la distance parcourue par la première onde entre la source et le point d'interférence et x_2 celle parcourue par la seconde onde, les conditions d'amplification ou de diminution du son s'écrivent, conformément aux relations **(37)** et **(38)**, respectivement :

$$x_1 - x_2 = n\lambda$$

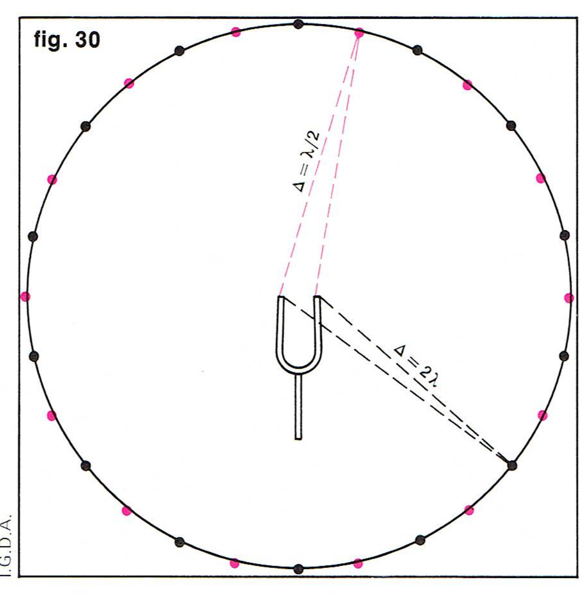
et

$$x_1 - x_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$$

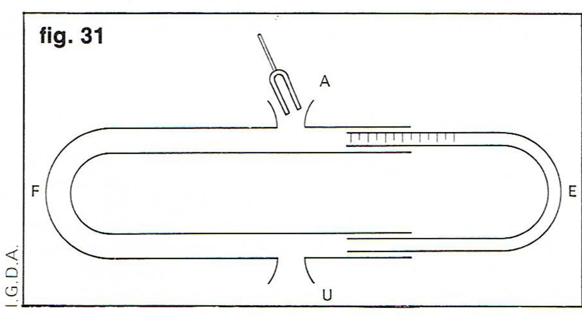
Ces égalités représentent dans l'espace les équations de deux hyperboloïdes de rotation à deux nappes dont les foyers coïncident avec les sources sonores. Ainsi, les lieux des points d'amplification ou d'extinction sont des hyperboloïdes de ce type. Suivant les valeurs de n, on aura alternativement un hyperboloïde d'amplification et un de silence. En fait, pour $n = 0$, on a une amplification pour $x_1 - x_2 = 0$, et un silence pour $x_1 - x_2 = \frac{\lambda}{2}$; pour $n = 1$, l'amplification se produit pour $x_1 - x_2 = \lambda$ et le silence pour $x_1 - x_2 = \frac{3\lambda}{2}$. On voit ainsi que les deux familles d'hyperboloïdes sont alternées dans l'espace comme le montre la *figure* 29. Ces hyperboloïdes s'appellent *nappes d'interférence*, alors que leurs intersections avec un plan s'appellent *franges d'interférence*. Ces franges sont des hyperboles si le plan d'intersection contient les deux sources ; ce sont des cercles si le plan est parallèle au plan π de la *figure* 29, et ce sont des ellipses si le plan est légèrement incliné par rapport au plan π.

Expériences d'interférence

Une expérience d'interférence simple peut être réalisée en utilisant comme source sonore un diapason dont les deux branches représentent en pratique les deux sources nécessaires. (En fait, les deux branches d'un diapason vibrent en opposition de phase.) Ainsi, si nous mettons un diapason au centre d'un cercle, et que nous nous déplacions le long de la circonférence, nous trouvons alternativement des zones d'amplification sonore et de silence, car la différence de chemin sonore entre les deux ondes émises par les deux branches varie continûment d'un point à un autre. Les points de la circonférence diamétralement opposés et situés sur l'axe du diapason



▶ ***Figure 30** : interférences produites par les deux branches d'un diapason.*



▶ ***Figure 31** : le* **tube de Quincke** *pour réaliser des expériences d'interférence.*

sont donc des points de silence, car, ainsi que nous l'avons dit, les deux branches du diapason vibrent en opposition de phase, et, pour elles, les conditions **(37)** et **(38)** doivent être inversées (*fig.* 30).

Une autre expérience classique d'interférence dans laquelle on a recours à une source unique dédoublant le parcours de l'onde est celle du *tube de Quincke*, représenté sur la *figure* 31. La partie E du tube peut coulisser dans la partie fixe F, et ainsi le tube a une longueur variable. Quand on met à l'entrée A du tube un diapason en vibration, les ondes sonores se propagent le long des chemins différents AF et AE et se rencontrent à la sortie U. En déplaçant la partie E du tube, on peut obtenir une différence de chemin des deux ondes qui soit un nombre entier de longueurs d'onde — et dans ces conditions le son du diapason est notablement renforcé — ou qui soit un nombre impair de demi-longueurs d'onde — on a alors silence complet. Le tube de Quincke peut être utilisé pour trouver la longueur d'onde d'un son déterminé en commençant avec les deux parties de tube E et F de longueur égale et en lisant directement sur une échelle graduée gravée sur le tube mobile E la différence de chemin correspondant au premier silence. Si cette différence est, par exemple, 40 cm, cela veut dire que la longueur d'onde du son est 80 cm. Comme la vitesse du son dans l'air à une température donnée est bien connue, on peut en déduire la fréquence du son à l'aide de la relation : $f = \frac{v}{\lambda}$.

Nous allons enfin décrire l'*expérience de Despretz* qui répète sur des ondes acoustiques la célèbre expérience de Young d'interférence d'ondes lumineuses (*fig.* 32).

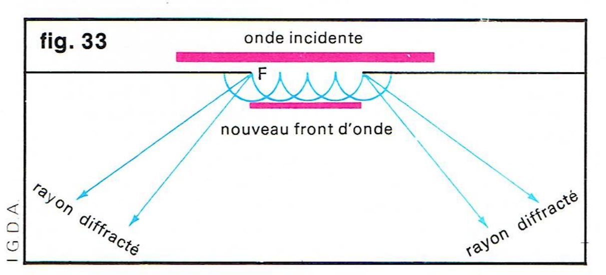
fig. 32

▲ ***Figure 32** : l'expérience de Despretz.*

On perce deux trous *a* et *b* sur une boîte parallélépipédique. On dispose un détecteur de vibrations, susceptible d'être déplacé sur un guide AB parallèle au segment *ab*. A l'extérieur de la boîte, on tient un diapason qui vibre : quand le diapason est proche du trou *a* (*b* fermé) et qu'on déplace le récepteur entre A et B, on ne remarque aucune différence d'intensité dans les diverses positions ; de même, quand il est proche du trou *b* (*a* fermé). Mais lorsque les deux trous sont ouverts, le détecteur se déplaçant entre A et B indique alternativement la présence de maximums et de minimums d'intensité, avec un maximum très prononcé pour la position H. Cette expérience prouve l'existence des franges d'interférences produites par la superposition de deux ondes acoustiques cohérentes (car issues d'une même source : le diapason). Elle est en fait également utilisée pour prouver l'existence d'un autre phénomène caractéristique de la propagation des ondes, à savoir le phénomène de diffraction.

Diffraction des ondes sonores

Si l'on observe la *figure* 32, on remarque un comportement curieux du faisceau sonore : les rayons émis par le diapason ne continuent pas en ligne droite au-delà du trou mais paraissent s'éparpiller dans toutes les directions. Cet effet très important dans tous les phénomènes ondulatoires s'appelle *diffraction* et peut s'expliquer à partir du *principe d'Huygens*. Quand une onde sonore est interceptée par un obstacle (par exemple un trou, une fente ou le bord d'un objet), tous les points de l'obstacle touchés par la perturbation deviennent à leur tour des sources qui émettent des ondes sphériques cohérentes, et le nouveau front d'onde au-delà de l'obstacle est l'enveloppe des différentes ondes élémentaires. Le faisceau diffracté qui est émis à partir de l'obstacle dans toutes les directions a un maximum d'intensité dans la direction perpendiculaire au plan du trou ; son intensité décroît jusqu'à s'annuler dans la direction rasante à ce plan. Sur la *figure* 33 est représentée schématiquement la diffraction d'une onde sonore qui arrive perpendiculairement sur un écran où est percée une fente F.



▶ ***Figure 33** : diffraction d'une onde sonore par une fente percée sur un écran.*

Le phénomène de diffraction est particulièrement important lorsque les dimensions des obstacles ou des trous sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde du son. Comme les ondes sonores sont caractérisées par des longueurs d'onde de l'ordre de quelques dizaines de centimètres, le phénomène de diffraction est très courant, car, dans la nature, il existe un grand nombre d'obstacles dans cet ordre de grandeur.

Cet effet a des applications curieuses. Il permet par exemple d'entendre la voix d'une personne derrière l'angle d'une maison, ce qui ne serait pas possible si le son se propageait toujours et seulement en ligne droite. Dans le cas de l'expérience de Despretz (*fig.* 32), les rayons émis par le diapason sont diffractés en traversant les trous *a* et *b*, et donc changent de direction et donnent lieu à des interférences en leurs points de rencontre, et en particulier au fond de la boîte.

Les battements sonores

Nous avons vu que la monochromaticité était l'une des conditions nécessaires pour avoir des interférences entre deux ondes. Nous nous proposons, à présent, d'examiner ce qui se produit quand on superpose spatialement deux ondes de fréquences légèrement différentes. Pour simplifier les calculs, considérons deux ondes planes progressives se propageant toutes deux dans la direction de l'axe x ; soit ω_1 et ω_2 les deux pulsations, et k_1 et k_2 les vecteurs d'onde correspondants. Les deux déplacements sont donc :

$$\xi_1 = \text{A} \sin (k_1 x - \omega_1 t)$$
$$\xi_2 = \text{A} \sin (k_2 x - \omega_2 t)$$

et le déplacement résultant est :

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2\,\text{A} \sin \frac{1}{2} \left[(k_1 + k_2)\, x - (\omega_1 + \omega_2)\, t \right] \cdot \cos \frac{1}{2} \left[(k_1 - k_2)\, x - (\omega_1 - \omega_2)\, t \right]$$

soit, en posant $\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $\omega_\text{B} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ et $k_\text{B} = \frac{k_1 - k_2}{2}$

(39) $\xi = 2 A \sin (k_m x - \omega_m t) \cos (k_B x - \omega_B t)$

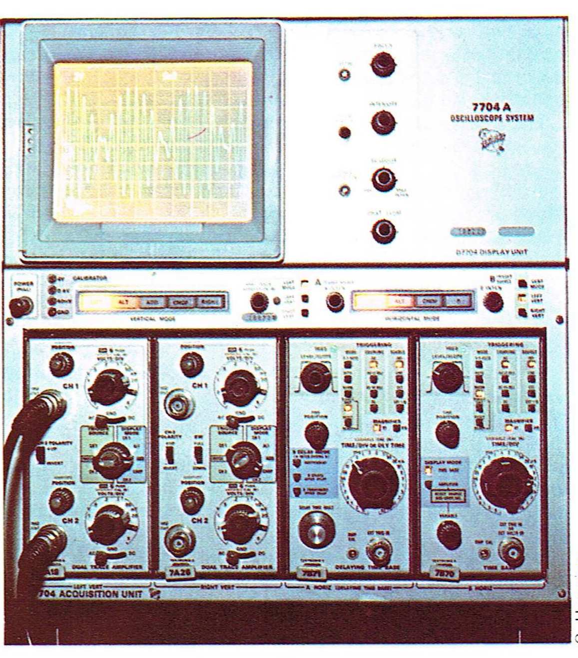
L'équation **(39)** représente une onde sonore qui se propage dans le sens des x positifs avec la pulsation ω_m, moyenne arithmétique des deux pulsations, et avec le vecteur d'onde k_m, moyenne arithmétique des deux vecteurs d'onde. Le terme $2 A \cos (k_B x - \omega_B t)$ représente l'amplitude de l'onde.

Plaçons-nous d'abord en un point d'abscisse x donné; nous constatons que l'amplitude est une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation égale à la demi-différence des pulsations des ondes initiales. La représentation graphique de l'équation **(39)** en fonction du temps est faite sur la *figure* 34, où sont portées la période de l'onde progressive (T_m) et celle de la modulation d'amplitude (T_B). Cette variation périodique de l'amplitude de l'onde est connue sous le nom de phénomène de *battements*.

Puisqu'en une période, l'amplitude effectue deux oscillations entières, la période des battements est en pratique $\frac{T_B}{2}$ et non T_B et la fréquence des battements est donc :

$$f_B = 2 \frac{f_1 - f_2}{2} = f_1 - f_2$$

Quand un auditeur perçoit les battements, il entend un son de fréquence $f_m = \left(\frac{\omega m}{2 \pi}\right)$ et également, périodiquement, des maximums d'intensité qui donnent au son un aspect modulé. Comme la fréquence des battements est faible, car elle est égale à la différence entre deux fréquences très voisines, la période des battements est grande. On peut se demander quelle est la fréquence maximale des battements que l'oreille humaine peut percevoir. Comme la persistance d'un son dans l'oreille humaine normale est d'environ 1/10 de seconde, pour pouvoir distinguer deux sons consécutifs, il est nécessaire qu'ils soient espacés d'au moins 1/10 de seconde, ou bien, s'ils sont périodiques, qu'ils se répètent avec une fréquence inférieure à 10 Hz. Ainsi, l'oreille humaine peut distinguer deux battements consécutifs seulement si la fréquence est inférieure à environ 7-8 battements/s.

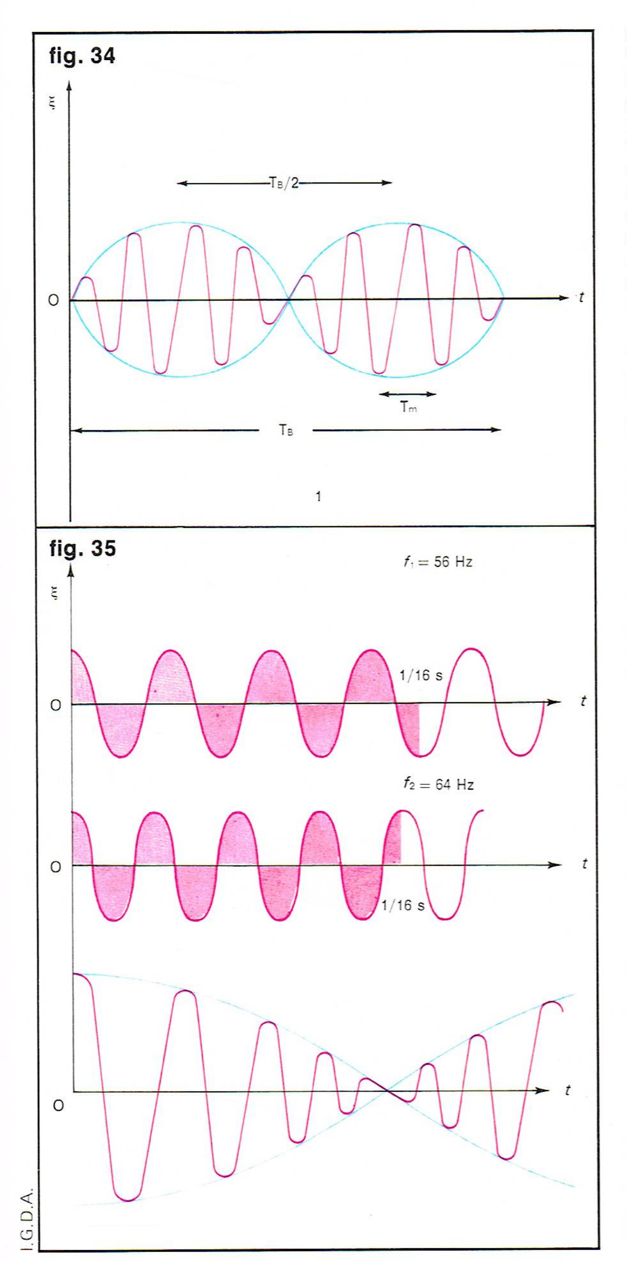


◀ *Exemple de battements visualisés sur un oscilloscope.*

C. Hennion

Pour clarifier le phénomène de battements, considérons deux diapasons parfaitement identiques et donc capables d'émettre des sons de même fréquence, et fixons sur l'une des branches d'un des diapasons une petite masse supplémentaire que l'on peut déplacer le long de la branche. La fréquence de ce diapason est alors légèrement différente de celle du premier, et si nous les faisons vibrer ensemble, nous entendrons une variation périodique de l'intensité du son avec une alternance de maximums et de minimums. Supposons, par exemple, que le premier diapason ait une fréquence de 56 Hz, et le second de 64 Hz. A un instant donné, les deux ondes sonores, en se superposant, produisent un renforcement du son : 1/16 de seconde après cet instant, le premier diapason a effectué 3,5 oscillations, alors que le second en a effectué 4; ainsi, à cet instant, les deux ondes sont en opposition de phase, et nous avons un minimum d'intensité sonore. Après un autre intervalle de 1/16 de seconde, c'est-à-dire après 1/8 de seconde de l'instant initial, le premier diapason a accompli 7 vibrations complètes et le second 8, produisant ainsi deux ondes sonores qui sont en phases et se superposent en produisant un renforcement du son. Alors, la période des maximums de sons, c'est-à-dire des battements, est 1/8 de seconde; donc la fréquence est de 8 Hz, ce qui est exactement égal à (64-56) Hz. La superposition des ondes décrites est illustrée sur la *figure* 35.

Ces phénomènes de battements peuvent être utilisés commodément pour la mesure de la fréquence sonore d'une source, lorsqu'on dispose d'une seconde source sonore étalon de fréquence f_2 réglable; on procède en superposant les ondes produites par les deux sources sonores et en faisant varier la fréquence f_2 de la source-étalon; on part d'une fréquence f_2 inférieure à la fréquence inconnue f_1 et on fait croître f_2 jusqu'à percevoir des battements, c'est-à-dire jusqu'à atteindre une fréquence de battements f_B inférieure à 10 Hz; f_2 est alors inférieure de moins de 10 Hz à f_1. Lorsque f_2 continue d'augmenter, cette fréquence de battements diminue (c'est-à-dire que la période entre deux maximums consécutifs augmente), et on arrive au battement zéro ($f_B = 0$; $f_1 = f_2$). En dépassant ce point, on constate que les battements réapparais-



I.G.D.A.

◀ *En haut, figure 34 : dépendance en temps de l'onde résultant de la superposition de deux ondes de fréquences et de vecteurs d'onde différents.*
En bas, figure 35 : superposition d'ondes dans le phénomène de battements.

▶ *Figure 37 : transmission d'informations (en rouge) à l'aide d'une onde porteuse. Si la fréquence de cette onde est trop faible (telle que f_1), l'information ne peut être transmise. Au contraire la modulation de l'onde de fréquence f_2 produit le signal bleu.*

sent avec une fréquence $f_B = f_2 - f_1$, qui augmente jusqu'à ce que les battements deviennent inaudibles. Pour mesurer f_1, il suffit alors de choisir une fréquence $f_2 > f_1$ par exemple, de mesurer f_B et d'en déduire $f_1 = f_2 - f_B$.

Les phénomènes de battements sonores se rencontrent souvent dans la vie courante; ainsi, lorsqu'on assiste à un concert, on constate que les musiciens accordent leurs instruments avant le début du spectacle : cela pour jouer les notes à la même fréquence. En effet, si les fréquences étaient légèrement différentes, on entendrait, durant la représentation musicale, des battements, c'est-à-dire des maximums et des minimums d'intensités sonores non voulus par le compositeur.

Modulation d'amplitude

Revenons à l'équation **(39)** ; elle représente une onde progressive dont l'amplitude

$$2 \text{ A} \cos (k_B x - \omega_B t) = \text{A}(x, t)$$

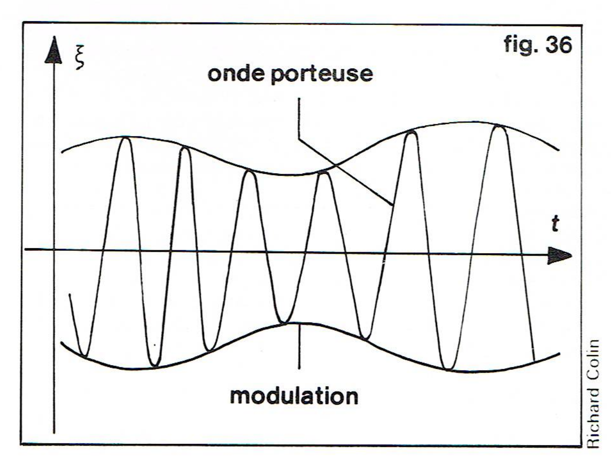
passe par des maximums et des minimums nuls : c'est une onde modulée en amplitude. Dans le cas général, les minimums de l'amplitude ne sont pas nuls, et l'onde représentée en fonction du temps a l'allure de la *figure* 36.

Les ondes modulées en amplitude peuvent être créées autrement que par battements d'ondes acoustiques, en particulier, l'onde émise par un générateur (haut-parleur) peut être directement modulée en amplitude. Il est essentiel de réaliser que seule la modulation d'une onde permet de transmettre une information. Une onde de fréquence donnée et d'amplitude constante ne transmet en effet pas d'information. Une première manière très simple de coder cette onde est de la moduler par tout ou rien. D'autres manières peuvent être élaborées : modulation d'amplitude, modulation de fréquence, etc.

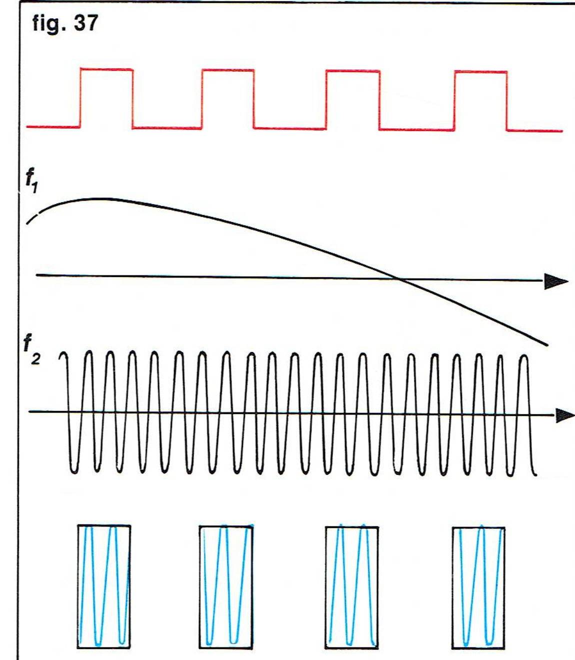
L'onde modulée est dite l'onde porteuse (elle porte la modulation). Plus on désire transmettre d'informations, et plus la fréquence de la porteuse doit être élevée. Cela est clair sur les schémas de la *figure* 37. Supposons en effet que l'information à transmettre corresponde à la modulation représentée en rouge. Si cette modulation est appliquée à la porteuse de fréquence f_1 il est bien clair qu'elle ne sera pas transmise. En effet, autant on peut imaginer que le premier pic d'information qui correspond à un maximum de l'amplitude de l'onde f_1 pourra être perçu, autant le second pic ne correspondra pas à un phénomène perceptible. Le troisième pic sera perceptible, et ainsi de suite. L'information transmise sera donc une information déformée dans laquelle un pic sur deux sera transmis. Si la même modulation est appliquée à l'onde de fréquence f_2 il est bien clair que l'information sera transmise dans des conditions très favorables. Dans ce cas, l'onde modulée aura la forme représentée sur le quatrième schéma.

Vitesse de groupe

Nous venons de voir que, pour transmettre une information, on pouvait moduler l'amplitude d'une onde. Nous allons maintenant examiner la question suivante : à quelle vitesse se propage l'information, ou, plus exactement, à quelle vitesse se propage la modulation ? Autrement dit, à quelle vitesse se propage le maximum de l'amplitude, c'est-à-dire l'endroit où



▶ *Figure 36 : onde modulée en amplitude.*



$$\text{A}(x, t) = 2 \text{ A} \cos (k_B x - \omega_B t) = \text{constante}$$

Nous voyons que, pour suivre une valeur constante de la modulation d'amplitude, nous devons maintenir une valeur constante à son argument :

$$k_B x - \omega_B t$$

Ainsi, lorsque t augmente de dt, x doit augmenter de dx, de façon que l'augmentation de l'argument reste nulle, soit :

$$k_B dx - \omega_B dt = 0$$

Pour satisfaire cela, nous devons nous déplacer à la *vitesse de modulation :*

$$\frac{dx}{dt} = v_{mod} = \frac{\omega_B}{k_B} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

Or, nous avons vu que k était lié à ω par :

$$k = \frac{\omega}{v}$$

v étant la vitesse de propagation de l'onde, ou *vitesse de phase*. Dans le cas général, cette vitesse de propagation sera une fonction de k; on pourra donc dire que ω est une fonction de k :

$$\omega = \omega(k)$$

Cette relation est appelée *relation de dispersion*.

La vitesse de modulation s'écrit donc :

$$v_{mod} = \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2}$$

Dans le cas qui nous intéresse, k_1 et k_2 sont très voisins, et on peut écrire :

$$v_{mod} = \frac{d\omega}{dk}$$

Cette quantité $\frac{d\omega}{dk}$ est appelée *vitesse de groupe :*

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Ainsi, nous voyons que le signal que constitue l'amplitude modulée A (x, t) ne se propage pas à la vitesse de phase $v = \frac{\omega}{k}$ mais à la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

Exemples :

— Dans le cas d'une onde plane d'amplitude constante, la vitesse de phase est constante par rapport à k (ou ω) et $\omega = vk$. On tire $v_g = v$. Ici, vitesse de phase et vitesse de groupe se confondent.

— Dans le cas des ondes planes dans un pavillon exponentiel, la vitesse de phase a pour valeur :

$$v' = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} \quad (\omega_c \text{ pulsation critique})$$

donc $\omega = kv' = \frac{kv}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$

Il est aisé d'en tirer l'expression explicite de ω en fonction de k et de montrer que :

$$v_g = v\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$$

Ici, la vitesse de groupe v_g est différente de la vitesse de phase v'; elle lui est d'ailleurs inférieure. On remarque qu'entre les vitesses de phase et de groupe, il existe la relation simple :

$$v_g v' = v^2$$

Effet Doppler

Cet effet apparaît sous forme d'une altération de la fréquence sonore lorsque la source et l'observateur sont en mouvement relatif. Fizeau a étendu ce phénomène aux ondes lumineuses. Plusieurs cas sont à envisager : 1° la source est fixe et l'observateur est mobile; 2° la source est mobile et l'observateur est fixe.

Pour simplifier l'exposé, nous allons supposer que le mouvement de la source et celui de l'observateur ont la même direction que celle de la propagation du son.

1° Source S fixe et observateur O mobile avec la vitesse v_0. Supposons que l'observateur se déplace le long de l'axe x (*fig.* 38) vers la source S immobile qui, supposée ponctuelle, émet dans le milieu environnant des ondes sphériques se propageant à la vitesse v. Ainsi, à l'instant $t = 0$, elle émet une onde qui arrive à l'observateur à l'instant t_1 lorsqu'il occupe la position O_1 :

$$t_1 = \frac{SO_1}{v}$$

Au bout d'une période, c'est-à-dire à l'instant $t = T$, la source émet une deuxième onde qui parvient à l'observateur à l'instant t_2 lorsqu'il est en O_2; on a donc :

$$t_2 = T + \frac{SO_2}{v}$$

Pour l'observateur, la période des oscillations est :

$$T' = t_2 - t_1 = T - \frac{O_1O_2}{v}$$

or, O_1O_2 est la distance parcourue par l'observateur pendant le temps T' à la vitesse v_0 :

$$O_1O_2 = v_0 T'$$

Donc : $$T' = T - \frac{v_0}{v} T'$$

soit : $$T' = \frac{T}{1 + \frac{v_0}{v}}$$

et la fréquence $$f' = f\left(1 + \frac{v_0}{v}\right)$$

La fréquence f' du son est plus élevée que la fréquence f, autrement dit, l'observateur entend un son plus aigu que s'il était au repos.

Dans le cas où l'observateur s'éloigne de la source, on peut montrer de même que :

$$f' = f\left(1 - \frac{v_0}{v}\right)$$

Un observateur qui s'éloigne de la source entend un son plus grave que s'il était au repos. Si la vitesse de l'observateur est égale à celle du son ($v_0 = v$), alors $f' = 0$, c'est-à-dire que l'observateur ne reçoit aucun son, comme il était facile de le prévoir.

2° Source mobile avec la vitesse v_S et observateur immobile. Supposons que la source se déplace le long de l'axe x en s'approchant de l'observateur avec la vitesse v_S (*fig.* 39). A l'instant $t = 0$, la source est en S et émet une onde qui arrive à l'observateur à l'instant

$$t_1 = \frac{SO}{v}$$

A l'instant $t = T$, la source est en S_1 et elle émet une deuxième onde qui arrive à l'observateur à l'instant $t_2 = \frac{S_1O}{v} + T$.

Pour l'observateur, la période des oscillations est :

$$T' = t_2 - t_1 = T - \frac{S_1S}{v}$$

Or, S_1S est la distance parcourue par la source pendant le temps T, donc :

$$S_1S = v_S T \quad \text{et}$$

$$T' = T\left(1 - \frac{v_S}{v}\right) \quad \text{soit finalement :}$$

$$f' = \frac{f}{1 - \frac{v_S}{v}}$$

On peut montrer de même que, si la source s'éloigne de l'observateur, la fréquence f' perçue par celui-ci est :

$$f' = \frac{f}{1 + \frac{v_S}{v}}$$

Lorsque la source se rapproche de l'observateur, le son perçu par celui-ci est plus aigu, et, lorsqu'elle s'éloigne, le son perçu est plus grave. Cela peut être noté lorsqu'un observateur immobile sur une route entend passer une voiture qui klaxonne. Il perçoit d'abord un son aigu tant que la voiture s'approche, puis un son grave quand la voiture l'a dépassé et s'éloigne de lui.

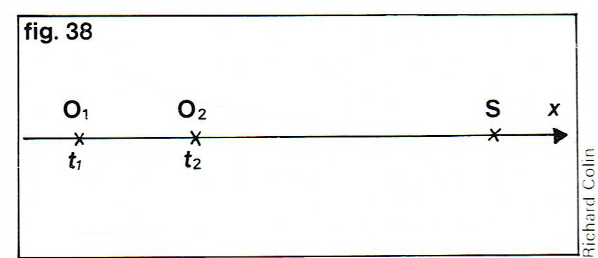
L'effet Doppler, que nous venons de voir appliqué aux ondes acoustiques, a également de nombreuses applications en optique et en électromagnétisme (effet Doppler-Fizeau). Il a également une grande importance théorique, car c'est l'un des phénomènes qui mettent en cause la théorie de la mécanique classique, rendant indispensable l'élaboration d'une théorie nouvelle : la théorie de la relativité d'Einstein.

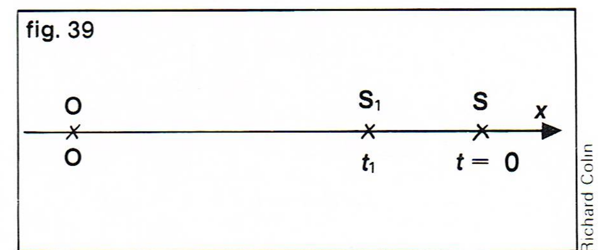
Une remarque très importante a trait à la validité des formules de l'effet Doppler. Comme on le voit facilement, elles cessent d'être valables si la vitesse de l'observateur v_0 ou celle de la source v_S sont supérieures à la vitesse du son, car il en résulterait des fréquences négatives.

Ondes de choc

Dans le cas où la vitesse de la source dépasse la vitesse du son, on n'a plus d'effet Doppler, mais la création d'une *onde de choc* dont la surface d'onde a la forme caractéristique d'un V.

C'est en 1742 qu'un Belge nommé Robens observa durant des essais de tir utilisant des balles sphériques que l'air offrait une résistance anormalement grande aux corps se déplaçant plus vite que la vitesse du son. Ce n'est que 150 ans plus tard que cet accroissement de la résistance a été attribué à la formation d'ondes de compression intenses dans l'air près du corps.





◄ *Effet Doppler; à gauche, figure 38 : la source S est fixe, et l'observateur O est mobile; à droite, figure 39 : la source S est mobile, et l'observateur O est fixe.*



▶ Concorde, *le seul avion supersonique français non militaire ; c'est lors du changement de régime subsonique-supersonique que se crée l'onde de choc et qu'a lieu le « bang » caractéristique.*

En fait, ce fut E. Mach qui détecta expérimentalement le front d'onde de l'air comprimé, et il découvrit qu'il était dû non pas à un mouvement de masse mais à un mouvement ondulatoire.

Le sujet fut parfaitement discuté par Rayleigh en 1910, et depuis, le mécanisme de la production d'ondes de choc par des projectiles rapides et par des explosions est parfaitement connu. Dans les années qui suivirent, la recherche s'accentua dans ce domaine, compte tenu de l'importance des ondes de choc dans l'aérodynamique des avions et des missiles, et dans les problèmes de détonation. Les progrès réalisés dans la connaissance de ces problèmes furent rapides. Par exemple, le premier vol supersonique dans un avion piloté eut lieu en 1947, quarante-quatre ans seulement après que les frères Wright eurent réalisé leur premier vol dans une « machine plus lourde que l'air » ; le comportement réel de l'avion suivit de près les prédictions faites d'après des expériences de laboratoire.

Les ondes de choc se comportent différemment d'autres ondes telles que les ondes acoustiques ou optiques. Par exemple, dans une expérience d'interférence d'ondes acoustiques, la surpression Δp est additive, alors que, lors de l'interaction des ondes de choc, il peut se produire des surpressions bien supérieures à la simple somme des surpressions composantes. Cette différence de comportement est due à la non-linéarité des équations régissant la formation et la propagation des ondes de choc, ce qui en rend l'analyse mathématique assez compliquée. En fait, pour la plupart des problèmes pratiques concernant les ondes de choc, il suffit de les considérer comme des discontinuités dans les caractéristiques d'un fluide idéal (non visqueux). Dans un fluide réel, visqueux comme l'air, on n'a pas de réelle discontinuité de la surpression, par exemple, mais simplement une très grande variation lorsque la vitesse de l'objet devient supérieure à la vitesse du son.

Les ondes engendrées par la proue d'un navire, l'onde produite par un projectile qui entre dans un milieu avec une vitesse supérieure à la vitesse du son dans ce milieu, l'onde lumineuse caractéristique de l'effet Cerenkov en optique sont toutes des ondes de choc.

Nous allons expliquer à présent le mécanisme de formation du front d'onde de l'onde de choc. Considérons une source sonore qui se déplace avec une vitesse v_S supérieure à la vitesse du son v (*fig.* 40). Soit S la position de la source sonore à l'instant 0 et S′ sa position à l'instant t. Pendant que la source se déplaçait ainsi de S à S′, elle émettait des ondes tout au long de son parcours : si la première onde est émise à l'instant initial, lorsque S est arrivé en S′, elle a parcouru une distance vt, c'est-à-dire que la surface d'onde est une sphère de rayon vt. Les fronts d'onde émis par la source entre S et S′ sont des sphères de rayon de plus en plus petit, et d'après le principe d'Huygens, le front d'onde, lorsque la source est en S′, est l'enveloppe de ces différentes surfaces d'onde.

Le résultat est, comme on le voit sur la *figure* 40, une onde dont le profil est un V. Si le profil de l'onde forme un angle β avec la direction du mouvement de la source, on a :

$$vt = v_S t \sin \beta$$

soit :

$$v = v_S \sin \beta$$

On voit d'après l'équation précédente que ce profil en V n'existe que si $v_S > v$.

Quand un avion à réaction en vol atteint et dépasse la vitesse du son, il se crée ce type d'onde de choc qui est une onde de pression, et qui donne lieu, à cet instant, à un « bang » caractéristique. Quand le même avion à réaction passe de la vitesse supersonique à une vitesse subsonique, l'onde de choc disparait, et l'on entend un autre « bang ».

Compte tenu de l'affaiblissement du « bang » avec la distance, cet effet peut ne pas être gênant pour des avions qui volent à haute altitude ou qui changent de régime (subsonique-supersonique, ou réciproquement) au-dessus des mers ou des océans.

fig. 40

S, S′, O, vt, $SS' = v_S t$, $v_S t$, β, $v_S > v$

I.G.D.A.

▶ *Figure 40 : formation d'une onde de choc en* V.

Acoustique physiologique

L'oreille humaine

Avant d'aborder les problèmes de mesure et de reproduction de signaux acoustiques, nous allons examiner un certain nombre de facteurs physiologiques et, en particulier, les propriétés de l'oreille humaine. Il est bien clair, en effet, que ces facteurs déterminent les liens que l'on doit établir entre les mesures physiques et les conséquences qu'on peut en tirer pour résoudre des problèmes tels que la définition des grandeurs qui concernent le bruit, la manière de lutter contre les bruits parasites, la façon de concevoir les systèmes d'enregistrement et de reproduction sonore, et bien d'autres encore.

L'oreille humaine est en effet le juge ultime de la qualité ou de l'intensité d'une musique ou d'un bruit. Elle est constituée de trois parties principales, qui sont l'*oreille externe,* l'*oreille moyenne* et l'*oreille interne* (*fig.* 41). Les vibrations propagées dans l'air sont reçues par l'oreille externe, transmises à l'oreille moyenne où elles deviennent vibrations de solides (os), puis à l'oreille interne où elles deviennent vibrations de liquide.

L'**oreille externe** est constituée d'un tube de quelques centimètres de longueur appelé le *méat,* ouvert sur le monde extérieur par un pavillon appelé la *conque* et fermé du côté de l'oreille moyenne par une membrane, le *tympan*. Nous avons vu précédemment que, pour qu'une onde acoustique se transmette sans être trop réfléchie à l'interface de deux milieux, il était nécessaire qu'une adaptation des impédances acoustiques de ces deux milieux fût réalisée. La conque évite justement la réflexion des sons qui arrivent sur l'oreille, au moins des sons de fréquence moyenne, qui peuvent ainsi pénétrer le méat. Ce dernier, qui possède certaines fréquences propres de résonance, transmet l'énergie acoustique au tympan qui entre en vibration. Un nouveau problème d'adaptation d'impédance se pose alors : nous avons en effet vu que dans l'oreille interne le milieu de propagation est liquide, alors que dans l'oreille externe il est gazeux. En terme d'impédance, on se trouve côté air avec un milieu de faible impédance acoustique, et l'on doit transmettre les vibrations à un milieu de forte impédance acoustique. C'est l'oreille moyenne qui joue ce rôle d'adaptateur.

L'**oreille moyenne** est une poche d'air comprise entre le tympan et la membrane de séparation avec l'oreille interne. Elle est reliée à la cavité nasale par un conduit d'environ 4 cm, la *trompe d'Eustache,* qui a une fonction acoustique bien précise : elle permet l'égalisation des pressions statiques entre le milieu extérieur et l'oreille moyenne. Supposons, en effet, que ce canal soit bouché et que les pressions dans l'oreille moyenne et à l'extérieur de l'oreille soient les mêmes; le tympan occupe alors sa position d'équilibre moyen, légèrement bombé vers l'intérieur. En cas d'augmentation de la pression statique extérieure, la pression sur la face externe du tympan étant supérieure à la pression sur la face interne, ce dernier se déformerait vers l'intérieur. A la limite, en cas de surpression forte, il pourrait se déchirer. La trompe d'Eustache évite cet inconvénient. Il est remarquable de noter que ce système d'égalisation des pressions statiques est suffisamment fin pour ne pas permettre l'égalisation des pressions alternatives. Si cette condition n'était pas réalisée, c'est la sensibilité de l'oreille qui serait diminuée. Ne nous émerveillons pas trop de ces raffinements techniques, car la description de l'oreille moyenne et de l'oreille interne va nous apporter bien d'autres causes d'étonnement.

Nous avons donc vu que l'oreille moyenne était terminée à ses deux extrémités par des membranes qu'il s'agissait de coupler mécaniquement. Un extraordinaire mécanisme composé de trois petits os assure ce couplage : le premier os, le *marteau,* est fixe à l'une de ses extrémités sur le tympan; le second osselet, l'*enclume,* assure la liaison avec le troisième osselet; l'*étrier,* lui-même fixé à la membrane de séparation des oreilles moyenne et interne. Du fait des effets de levier qu'exercent ces trois osselets, la force exercée sur la membrane interne est trois fois supérieure à celle exercée par le tympan. Mais si l'on tient compte en plus du rapport des surfaces de ces deux membranes, alors on constate que la pression sur la membrane interne est près de vingt fois supérieure à celle qui est exercée sur le tympan. Les osselets jouent donc le rôle d'un *transformateur élévateur de pression*. On pourrait alors se poser les questions suivantes : pourquoi trois osselets, et pas un seul? pourquoi un système aussi compliqué (certains oiseaux possèdent effectivement un couplage à un seul osselet)? On peut trouver trois avantages à cette configuration à trois osselets :

— Le marteau et l'enclume étant assez massifs et placés symétriquement par rapport à leur axe de rotation, la transmission des vibrations directement par les osselets eux-mêmes est minimale.

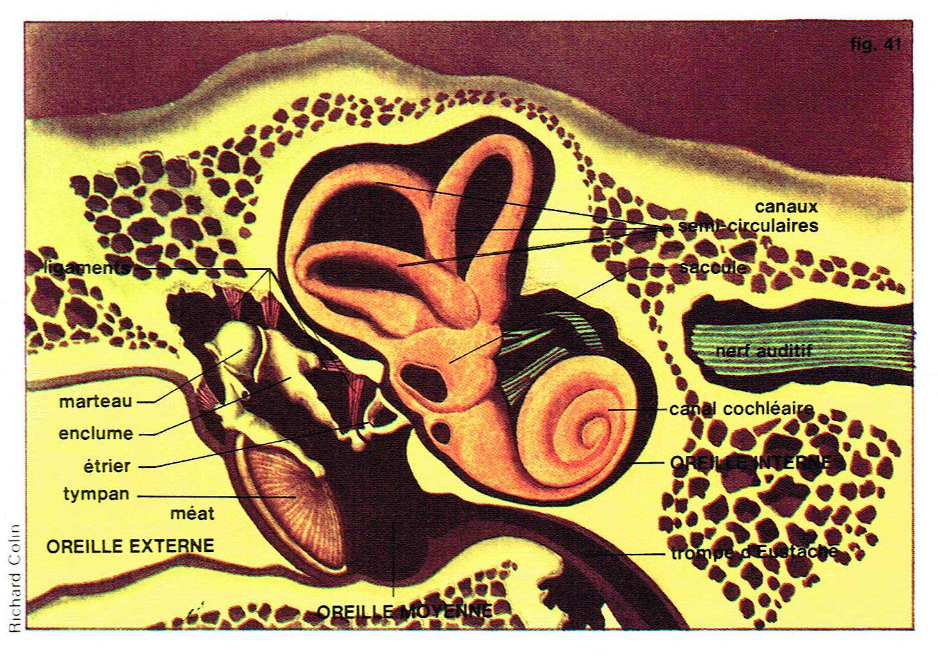
— Un seul osselet, qui ne bénéficie pas des effets de levier obtenus par plusieurs osselets, est soumis à des vibrations d'amplitude extrêmement variables et éventuellement grandes. A une telle situation seraient associés des effets non linéaires importants.

— Le système à trois osselets permet le fonctionnement d'un dispositif de sécurité très étonnant : lorsque l'intensité acoustique correspond à des pressions qui dépassent 200 N/m², l'ensemble des trois osselets change de mode d'oscillation, et ce faisant ne transmet plus ces vibrations qui pourraient être fatales à l'oreille interne.

En ce qui concerne l'oreille moyenne, il est encore intéressant de noter qu'elle est équipée d'un second dispositif de sécurité pour réduire le risque de dommages sous fortes pressions acoustiques : deux petits muscles entraînent le tympan vers l'intérieur et le cavalier vers l'extérieur lorsque la pression acoustique dépasse 0,16 N/m² pour des vibrations de fréquences basse et moyenne. La réduction de sensibilité due à ce système est telle que le signal semble avoir une intensité sonore diminuée d'un facteur 1 000. Enfin on peut remarquer qu'à des fréquences inférieures à 1,5 kHz, le tympan vibre comme un diaphragme rigide. Au-delà, par contre, il vibre par éléments. Cette modification de la structure des vibrations se traduit par le fait que l'oreille répond en dessous de cette fréquence comme un capteur de pression, au-delà comme un capteur de vitesse de déplacement.

L'**oreille interne** comprend deux parties : l'une transforme les vibrations mécaniques reçues en signaux transmissibles au cerveau, l'autre, qui est sensible aux accélérations angulaires, permet de maintenir l'équilibre des individus. La partie acoustique de l'oreille interne, la cochlée, reçoit les vibrations par la membrane commandée par l'étrier. Un ensemble d'environ 24 000 fibres semble constituer le détecteur final : les fibres sont connectées aux nerfs qui vont au cerveau. Diverses hypothèses ont été émises pour interpréter le rôle de ces fibres. Chaque fibre, du fait de sa longueur et de sa tension mécanique, a une fréquence de résonance propre. Il semblerait qu'à l'arrivée d'une vibration complexe, chaque fibre transmette au cerveau un signal corres-

▼ ***Figure 41 :*** *représentation schématique de l'anatomie de l'oreille constituée de trois parties principales qui sont* **l'oreille externe, l'oreille moyenne** *et* **l'oreille interne**.



▶ *Tableau II : correspondance entre pression sonore vraie, niveau de pression exprimé en décibels, déplacements des particules d'air à 20 °C et 1 000 Hz, et les conditions d'environnement associées.*

Tableau II

Pression sonore en N/m^2	Niveau de pression sonore (NPS) en db par rapport à $2 \cdot 10^{-5}$ N/m^2	Déplacements des particules d'air à 20 °C à 1000 Hz en cm	Conditions d'environnement	
$200 \cdot 10^3$	200	7,6	décollage d'une fusée Saturne à 100 m	bruits très violents
2000	160	$76 \cdot 10^{-3}$		
200	140	$7{,}6 \cdot 10^{-3}$	réacteur d'avion à 25 m *seuil de la douleur*	
20	120	$760 \cdot 10^{-6}$	avion à 100 m	bruits très forts
6,3	110	$240 \cdot 10^{-6}$	orchestre pop	
2	100	$76 \cdot 10^{-6}$	marteau pneumatique	
0,63	90	$24 \cdot 10^{-6}$	camions lourds	bruits forts
$2 \cdot 10^{-1}$	80	$7{,}6 \cdot 10^{-6}$	circulation moyenne	
$2 \cdot 10^{-2}$	60	$760 \cdot 10^{-9}$	bureau, rue	
$2 \cdot 10^{-3}$	40	$76 \cdot 10^{-9}$	pièce calme	bruits modérés
$6{,}3 \cdot 10^{-4}$	30	$24 \cdot 10^{-9}$	bibliothèque	
$2 \cdot 10^{-4}$	20	$7{,}6 \cdot 10^{-9}$	forêt calme	
$6{,}3 \cdot 10^{-5}$	10	$2{,}4 \cdot 10^{-9}$		calme
$2 \cdot 10^{-5}$	0	$0{,}76 \cdot 10^{-9}$	*seuil d'audition*	

pondant à la composante de Fourier de la vibration à sa fréquence de résonance propre. Chaque fibre agirait donc comme un détecteur monochromatique de vibrations. L'auteur de cette théorie de la perception des sons, Helmholtz, avait supposé que toutes les fibres étaient soumises à la même tension mécanique. Cela conduirait à une gamme de fréquences perceptibles très inférieure à la gamme réellement perçue. L'introduction d'une tension variable élimine cette objection. De plus, à l'appui de cette théorie, on peut remarquer que, lorsque des individus sont soumis, pendant de longues périodes, à des bruits intenses à une fréquence donnée, par exemple du fait de leur activité professionnelle, une surdité sélective à cette fréquence se développe. Cela peut être interprété par le fait que les fibres correspondantes se sont dégradées.

Nous allons maintenant examiner quelques-unes des performances de ce système de réception des vibrations qu'est le système auditif. Il est assez remarquable de noter que l'oreille est capable de détecter un bruit dont l'amplitude de pression est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-5}$ N/m^2. Cela correspond, pour une fréquence de 1 000 Hz, à un déplacement de l'air au voisinage de l'oreille de $0{,}7 \cdot 10^{-9}$ cm, soit 0,076 angström. Remarquons, par comparaison, que pour l'atome d'hydrogène (le plus petit des atomes), la distance entre le noyau et l'électron est de 0,53 angström, soit près de 10 fois plus ! On peut s'émerveiller d'une telle sensibilité, mais on pourrait s'étonner : serait-il possible d'entendre le son correspondant à un déplacement de quelque 10^{-9} cm sans être gêné par les mouvements de l'air, d'amplitude considérablement plus grande, dus par exemple au vent ou aux courants d'air ? La différence essentielle entre les deux types de déplacement de l'air réside dans le fait que les premiers se reproduisent régulièrement, alors que les seconds sont aléatoires.

Mais notre étonnement sur les qualités de détecteur de l'oreille n'est pas terminé, car cet organe capable de détecter des sons associés à des pressions de quelque $2 \cdot 10^{-5}$ N/m^2 supporte (avec quelques douleurs parfois) des pressions voisines de 200 N/m^2. Ces deux limites extrêmes correspondent sensiblement à ce qu'on appelle le *seuil d'audition* et le *seuil de la douleur*. Afin de pouvoir décrire une gamme aussi vaste, il a été nécessaire de recourir à une échelle logarithmique : quand l'intensité acoustique (proportionnelle au carré de la pression) augmente d'un facteur 10, on dit qu'elle a augmenté de 1 *bel*. On utilise très fréquemment, pour comparer des intensités ou des pressions, le dixième de bel, appelé le *décibel* (db). Compte tenu de ce que nous venons de voir, l'oreille humaine a une dynamique voisine de 140 décibels. De plus, elle est capable de détecter une variation d'intensité de 1 décibel.

La description d'une intensité ou d'une pression sonore en décibels n'a de sens que si l'on se fixe un niveau de référence. En acoustique, des conventions internationales ont été établies pour définir les grandeurs de référence. Elles sont :

— pour la *pression sonore :* $2 \cdot 10^{-5}$ N/m^2,
— pour l'*intensité sonore :* 10^{-12} $watt/m^2$,
— pour la *puissance acoustique :* 10^{-12} watt.

A partir de ces valeurs, on définit le *niveau de pression sonore* (NPS), le *niveau de puissance sonore* (NWS) et le *niveau d'intensité sonore* (NIS), par les relations :

$$NPS = 20 \log_{10} \frac{P}{2 \cdot 10^{-5}}$$

où P est la *pression* mesurée en N/m^2.

$$NIS = 10 \log_{10} \frac{I}{10^{-12}}$$

où I est l'*intensité sonore* mesurée en W/m^2.

$$NWS = 10 \log_{10} \frac{W}{10^{-12}}$$

où W est la *puissance acoustique* mesurée en watts.

Avant de poursuivre, mentionnons qu'en acoustique on utilise très fréquemment une autre unité de pression : le *bar* (B), unité de pression atmosphérique qui a sensiblement pour valeur 10 N/cm^2, soit 10^5 N/m^2. Cette unité correspond à une pression élevée, et en général on lui préfère le *microbar* (μB) :

$$1\ \mu B = 10^{-6}\ B = 10^{-1}\ N/m^2$$
$$1\ N/m^2 = 10\ \mu B$$

Sur le *tableau* II, on a indiqué l'échelle en décibels qui exprime la pression sonore par rapport à une pression de $2 \cdot 10^{-5}$ N/m^2, les déplacements des particules d'air à 20 °C associés à cette pression, à la fréquence de 1 000 Hz, et les conditions d'environnement associées.

En fait, la sensibilité de l'oreille n'est pas la même pour des sons de diverses fréquences, les limites n'étant pas les mêmes pour tous les individus. Des déterminations faites sur un grand nombre de sujets ont permis d'établir une courbe moyenne de sensibilité de l'oreille humaine. La *figure* 42 montre la courbe obtenue aux États-Unis par Fletcher et Munson. La courbe supérieure permet de suivre l'évolution de la limite du seuil de la douleur en fonction de la fréquence. On constate que le maximum de sensibilité et la gamme dynamique la plus grande se situent autour de 2 000 Hz.

Compte tenu de cette dépendance de la sensibilité en fonction de la fréquence, il est clair que l'audition de deux sons de même intensité absolue mais de fréquences différentes ne produit pas la même impression. Cela a conduit à introduire une échelle de pression ou d'intensités acoustiques physiologiques. Les valeurs relatives de ces intensités sont exprimées en *phones :* le niveau d'intensité d'un son en phones est le niveau de pression sonore en décibels d'un son pur de fréquence 1 000 Hz ayant la même intensité sonore apparente que le son considéré.

La *figure* 43 montre les courbes permettant de déterminer le nombre de phones associés à un son de fréquence donnée et de pression sonore absolue exprimée en décibels par rapport à la pression de $2 \cdot 10^{-5}$ N/m².

En fait, afin de caractériser de façon plus précise l'impression physiologique créée par les sons, diverses échelles (phones par exemple) ou ensembles de courbes (courbes N de Beranek) ont été créés ; nous ne les décrirons pas ici.

Les descriptions que nous venons de voir concernant la sensibilité de l'oreille humaine sont relatives à des sons de fréquence donnée. Lorsque plusieurs fréquences existent simultanément, on peut mettre en évidence un effet connu sous le nom d'*effet de masque :* un son pur de fréquence et d'intensité données masque les sons de fréquence voisine et d'intensités inférieures à un niveau qui a pu être déterminé expérimentalement.

Par exemple, sur la *figure* 44, on voit l'effet d'un son pur de 500 Hz et d'un niveau de puissance acoustique de 80 db. Si un individu est soumis à un tel son, on constate qu'il n'entend plus les sons de fréquence supérieure, sauf si ceux-ci ont une puissance acoustique suffisante. Par exemple, il n'entendra un son de fréquence double (soit de 1 000 Hz) que si celui-ci a une puissance acoustique de 60 db au-dessus du seuil normal d'audition.

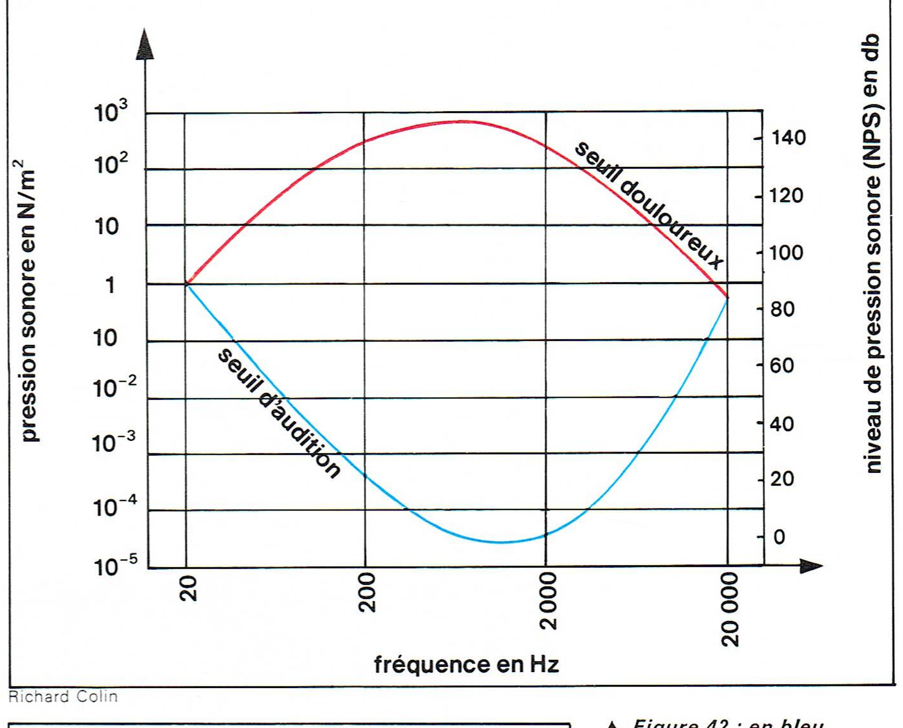
Une telle situation est illustrée sur la *figure* 45 où l'on voit l'influence sur la courbe de sensibilité de l'oreille d'un son pur de 80 db à 2 200 Hz. Toute la région colorée en gris est devenue inaudible. Cela explique pourquoi la sonorité d'un instrument de musique est différente selon que l'instrument est seul ou dans un orchestre.

Après avoir ainsi décrit les caractéristiques de l'oreille humaine, nous allons examiner le système de production des sons et la voix humaine.

La voix

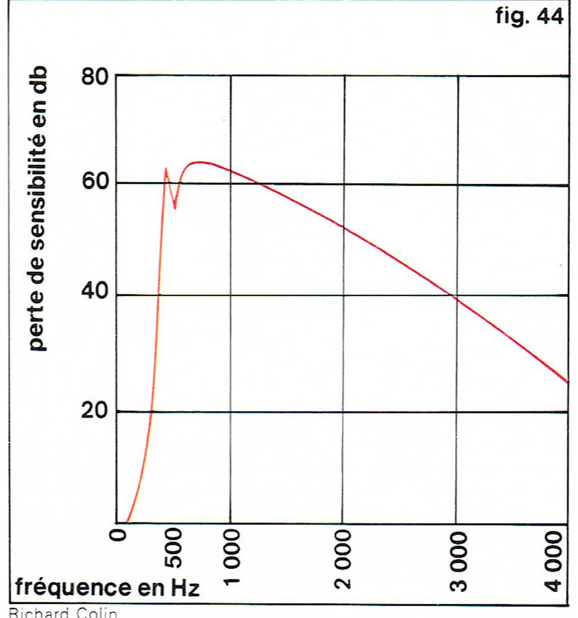
Quand une personne parle, l'air au voisinage de ses lèvres est soumis à une succession de compressions et de décompressions. Cette fluctuation locale de la pression de l'air engendre une *onde acoustique*, susceptible de se propager dans l'air. Nous avons vu qu'une onde sphérique voit son amplitude divisée par deux chaque fois que la distance de propagation est doublée. En l'absence de surface réfléchissante (murs d'une pièce, ou d'un auditorium), le son issu de la bouche obéit donc à cette loi.

L'ensemble du système de fabrication de sons par la bouche comprend les poumons, le larynx et les cavités de la gorge, de la bouche et du nez. La cavité à l'arrière de la bouche qui communique avec le nez est le pharynx.

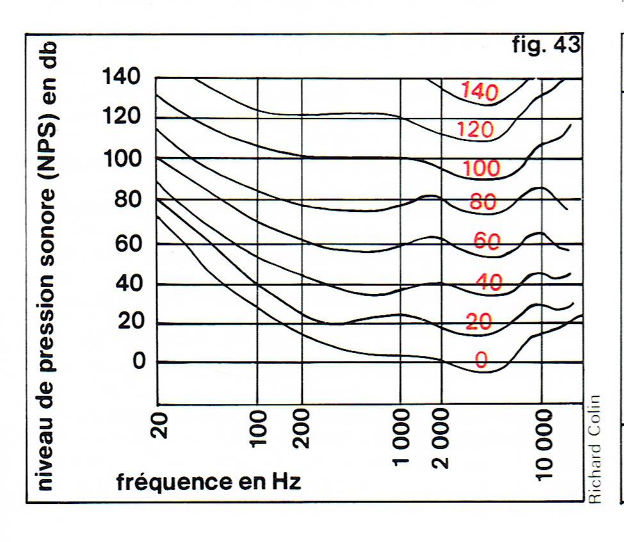


Richard Colin

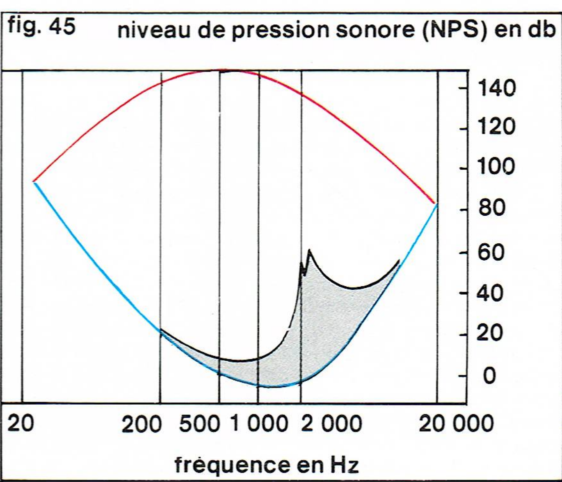
▲ *Figure 42 : en bleu, courbe de sensibilité moyenne de l'oreille ; en rouge, seuil de la douleur.*



Richard Colin



Richard Colin



Richard Colin

◀▲ *Ci-dessus, figure 44 : effet de masque produit par un son pur à 500 Hz et de niveau d'intensité acoustique égal à 80 db. Ci-contre, à droite, figure 45 : effet sur la courbe de sensibilité de l'oreille d'un son pur à 2 200 Hz et d'intensité acoustique égale à 80 db ; la courbe bleue représente la sensibilité aux sons purs. A gauche, figure 43 : échelle physiologique des pressions en phones (en rouge).*

Le larynx contient les « cordes vocales » qui sont des éléments de chair de forme triangulaire. Il y a deux paires de cordes vocales : la paire inférieure, qui est la plus proche des poumons, située à la sortie de la trachée, et la paire supérieure, plus proche de la bouche (fausses cordes vocales). Ces deux paires sont séparées par la glotte.

Lorsque les cordes vocales se tendent pour émettre un son, leur distance est de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre.

La fréquence du son émis dépend de la longueur et de la tension des cordes vocales. Cela explique pourquoi, en moyenne, le ton d'une femme est plus élevé que celui d'un homme : les cordes vocales des femmes et des enfants sont plus minces et plus courtes (d'un tiers environ) que celles des hommes. Lorsqu'un garçon a la voix qui mue, la fréquence des sons qu'il émet tombe très rapidement d'une octave par suite de la croissance rapide de son larynx pendant l'adolescence.

Le domaine des fréquences fondamentales émises par la voix humaine s'étend d'environ 100 cycles par seconde à 1 000 cycles par seconde, soit un peu plus de 3 octaves. Il est intéressant de noter que le son émis par les cordes vocales serait peu mélodieux sans les effets de modulation apportés par les résonateurs que constituent les diverses cavités de la bouche et du nez. En particulier, très peu d'animaux sont capables d'effectuer une telle modulation, même si, comme le perroquet, ils sont capables d'imiter la parole. Il faut enfin noter que, dans certains cas, un son peut être émis avec les cordes vocales détendues. C'est alors la forme et la dimension des diverses cavités qui définissent la fréquence du son émis. Le mécanisme est utilisé pour siffler ou murmurer. D'une certaine manière, l'appareil d'émission des sons chez l'homme est assez semblable à celui de certains instruments de musique. La variation continue de la tension ou de la longueur des cordes vocales et des dimensions des cavités fait penser au trombone à coulisse. Cependant, les parois du système humain sont plus souples et molles que celles de l'instrument. Le son y est nettement plus absorbé, et ainsi les résonances de la voix sont beaucoup plus larges que celles des instruments. Nous avons vu qu'en déformant les cavités buccales, nasales, de la gorge et du pharynx, le son pouvait être modulé. Si la bouche est maintenue presque fermée en parlant, le rôle du pharynx est fortement accru (ventriloquisme). Au contraire, un chanteur utilise beaucoup les cavités buccales et se sert peu du pharynx.

Les mécanismes d'émission du son chez les Insectes

Certains Insectes sont susceptibles d'émettre des sons en utilisant des mécanismes très différents de ceux que nous venons de décrire. On peut les diviser en trois grandes catégories.

— Les **mécanismes à friction,** dans lesquels des éléments assez rigides sont frottés les uns sur les autres. Chez les criquets, par exemple, chaque aile comporte un élément rigide appelé *archet*, ainsi qu'un élément strié. Lorsque l'archet d'une aile est utilisé pour frotter l'élément strié de l'autre aile, cette dernière entre en vibration et produit ainsi la stridulation caractéristique du criquet. Chez certaines espèces de sauterelles, l'archet est situé sur le fémur des pattes postérieures.

— Les **mécanismes à membranes,** dans lesquels une membrane est mise en vibration sous l'action des muscles. Chez la cigale, par exemple, une membrane située sous l'abdomen (la *timbale*) peut être déformée par action musculaire en produisant un bruit caractéristique. Lorsque la membrane reprend sa position, elle émet à nouveau un bruit. La répétition de cette séquence produit une stridulation très caractéristique. La fréquence du son émis peut atteindre 500 cycles par seconde.

— Les **mécanismes à colonne d'air,** dans lesquels une colonne d'air est mise en vibration. Par exemple, le moustique femelle émet en battant des ailes une note qui est détectable par les antennes du mâle, qui peut alors voler vers la femelle. Cela a permis de réaliser des pièges à moustiques mâles dans lesquels un haut-parleur émet un son de fréquence comparable à celui qui est émis par la femelle. Les mâles se dirigent vers la source de bruit et sont détruits par une grille électrifiée qui entoure le haut-parleur.

La musique

Les échelles musicales, les gammes

Un son musical est en général la superposition de sons de fréquences différentes appelés *notes de musique*. Toutes les fréquences audibles n'ont cependant pas été utilisées jusqu'à présent pour produire des notes, car la sensation sonore n'est pas toujours agréable pour des notes de fréquences trop élevées ou trop basses. En pratique, les fréquences musicales utilisées sont comprises entre 24 et 4 500 Hz. Compte tenu du fait que l'oreille humaine est moins sensible à la différence des fréquences entre deux sons qu'au rapport de leurs fréquences, les gammes ont été construites sur ces bases (rappelons que c'est cette observation qui conduisit Pythagore, puis de très nombreux auteurs, à interpréter de manière mystique le caractère arithmétique de la musique, et ce jusqu'aux travaux du père Mersenne au XVII[e] siècle).

Une série de notes dont les fréquences obéissent à la série

$$f_0,\ \frac{27}{24}f_0,\ \frac{30}{24}f_0,\ \frac{32}{24}f_0,\ \frac{36}{24}f_0,\ \frac{40}{24}f_0,\ \frac{45}{24}f_0,\ \frac{48}{24}f_0$$

est dite *gamme diatonique majeure*. Les notes correspondantes constituent une octave et prennent dans l'ordre les noms *do, ré, mi, fa, sol, la, si,* do_2. La note do_2 a une fréquence double du *do*, et on peut reconstruire une gamme débutant par do_2 dont toutes les notes ont pour fréquence le double des fréquences indiquées précédemment. Cela montre que les notes de fréquence élevée de la gamme sont accrues d'une plus grande quantité que les notes de fréquence basse. Ainsi, si $f_0 = 24$, la fréquence du *do*, qui est de 24, devient 48 pour le do_2. Elle n'a été augmentée que de 24, alors que celle du *la* est augmentée de 40.

Cependant, il est essentiel de constater que, par cette méthode de génération des gammes, les rapports des fréquences entre notes restent conservés. Le rapport de deux notes est appelé l'*intervalle*.

Sur le *tableau* III, on a porté la gamme diatonique majeure avec les fréquences correspondantes, les intervalles entre notes consécutives et les intervalles à partir de la clef (le *do* dans ce cas).

On peut remarquer que tous les intervalles ne sont pas égaux et sont égaux à $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$ ou $\frac{16}{15}$. Les deux premiers sont dits *ton majeur* et *ton mineur,* alors que le dernier est dit *demi-ton*. La gamme est donc une succession de ton, ton, demi-ton, ton, ton, ton, demi-ton. Les tons peuvent être divisés en utilisant les *dièses* et les *bémols*, respectivement représentés par les symboles ♯ et ♭ placés immédiatement au pied droit des notes. Dans ces conditions, on obtient la *gamme naturelle* (Zarlino, 1558) qui comprend dans une octave 17 notes : 7 principales, 5 dièses et 5 bémols : *do, do♯, ré♭, ré, ré♯, mi♭, mi, fa, fa♯, sol♭, sol, sol♯, la♭, la, la♯, si♭, si*. Les fréquences associées ont pour valeurs :

$$f,\ \frac{25}{24}f,\ \frac{27}{25}f,\ \frac{27}{24}f,\ \frac{75}{64}f,\ \frac{30}{25}f,\ \frac{30}{24}f,\ \frac{32}{24}f,\ \frac{25}{18}f,$$

$$\frac{36}{25}f,\ \frac{36}{24}f,\ \frac{75}{48}f,\ \frac{40}{25}f,\ \frac{40}{24}f,\ \frac{125}{72}f,\ \frac{45}{25}f,\ \frac{45}{24}f.$$

Comme les intervalles entre les notes consécutives ne sont pas les mêmes, il n'est pas possible d'interpréter une partition musicale en référençant les gammes par rapport à une note quelconque de l'octave. C'est pour cette raison que les compositeurs indiquent le ton dans lequel leur œuvre doit être jouée.

Parmi les divers instruments de musique qui existent, certains (violon, trombone) peuvent produire tous les tons par simple modification de la longueur de la partie vibrante (corde ou colonne d'air), alors que, dans d'autres (piano, harpe, orgue), les notes sont fixées. Dans ces instruments, le grand nombre d'intervalles qui divisent les sons de la gamme naturelle peut être un handicap sérieux. Reprenant une idée déjà avancée par Aristoxène au IV[e] siècle avant J.-C., A. Werckmeister, au XVII[e] siècle, proposa une gamme dans laquelle tous les tons et demi-tons sont également espacés. Dans cette gamme, dite *gamme tempérée,* le dièse de chaque note coïncide avec le bémol de la note suivante. La gamme est alors séparée en 12 tons, et l'intervalle qui les sépare est

donc de $\sqrt[12]{2}$, c'est-à-dire 1,059 46. Cet intervalle est dit *demi-ton tempéré*. Il faut noter que c'est J.-S. Bach qui, avec sa série de préludes et fugues dans chacune des 24 clefs majeures et mineures du clavier bien tempéré, a ouvert royalement la voie aux compositeurs de musique classique.

La construction des gammes musicales, comme celle des échelles scientifiques, nécessite l'adoption d'une *fréquence de référence*. Au cours de l'histoire, une note, le *la*, fut utilisée à cette fin. La fréquence correspondante fluctuait selon les orchestres de 426 Hz à 467 Hz. C'est en 1939, lors d'une conférence internationale qui se tenait à Londres, que la fréquence de 440 Hz fut adoptée comme fréquence de référence pour le la_3. Un diapason qui vibre à cette fréquence est conservé au Bureau international des poids et mesures à Sèvres. Cette fréquence de référence est également radiodiffusée régulièrement, en particulier par le Bureau des standards américain et la B. B. C.

Les fréquences fondamentales des sons utilisés en musique couvrent en général 7 octaves (de 27 à 4 500 Hz). Nous avons vu que la note de référence, le *la*, avait une fréquence de 440 Hz. Le la_{-1} correspond à la plus basse fréquence utilisée couramment. La fréquence est très exactement de 27,500 Hz. Le $ré_7$ correspond à la plus haute fréquence généralement utilisée ; sa fréquence est de 4 698,000 Hz. Sur le *tableau* IV sont indiquées les fréquences de toutes les notes de l'octave — 1 de la gamme tempérée à partir de laquelle il est possible de retrouver les fréquences de toutes les octaves.

Consonance, dissonance, accord

Quand deux sons arrivent simultanément sur l'oreille, ils sont susceptibles de produire un sentiment de plaisir ou, au contraire, un sentiment désagréable. Dans le premier cas, on dit qu'on a *consonance*, dans le second cas, *dissonance*. En général, il y a consonance quand l'intervalle musical qui sépare les deux sons s'exprime par le rapport de nombres simples (par exemple 1/2, 3/2, 4/3, 5/6...), et dissonance quand il s'agit du rapport de deux nombres élevés (par exemple 71/59, 37/23...). Les rapports les plus importants qui produisent les consonances sonores sont :

- l'*unisson* 1/1
- l'*octave* 2/1
- la *quinte* 3/2
- la *quarte* 4/3
- la *tierce majeure* 5/4
- la *tierce mineure* 6/5

Il est intéressant de remarquer que, dans un chant simultané entre un homme et une femme, l'homme est fréquemment à l'octave inférieure.

Lorsqu'il y a simultanément plus de deux sons, l'accord consonant est l'*accord parfait majeur* produit par rapport à une note par les notes de fréquences les plus basses, de la tierce majeure (5/4) ou de la quinte (3/2) par rapport à cette note. Cela revient à dire qu'il y a consonance entre les harmoniques d'ordre 4, 5 et 6 de ces trois sons. L'*accord parfait mineur* est composé des sons de fréquences les plus basses de la tierce mineure (6/5) et de la quinte (3/2), c'est-à-dire tel que les harmoniques 10, 12 et 15 soient à l'unisson.

Accorder un instrument revient à le régler de telle sorte qu'il puisse émettre un la_3 de même fréquence que le la_3 de référence. Lorsque les musiciens d'un orchestre accordent leurs instruments avant un concert, d'une part ils accordent les fréquences de leurs instruments afin d'éviter le phénomène de battement perceptible lorsque des sons de fréquences voisines sont émis simultanément, d'autre part ils échauffent les instruments, évitant ainsi une dérive de fréquence de ces instruments due à la variation de température.

Les instruments de musique

Les instruments de musique peuvent être classés en trois catégories :

— les *instruments à percussion* qui peuvent être non accordés (cloche, triangle) ou accordés (grosse caisse),

— les *instruments à cordes*,

— les *instruments à vent*.



Bulloz

▲ *Un son musical est en général la superposition de sons de fréquences différentes appelés notes de musique. Ici, une partition ancienne d'un compositeur italien, Paolo da Firenze (Bibliothèque nationale).*

Tableau III

do		ré		mi		fa		sol		la		si		do
24		27		30		32		36		40		45		48
	9/8		10/9		16/15		9/8		10/9		9/8		16/15	
1		27/24		30/24		32/24		36/24		40/24		45/24		2

◄ *Tableau III : la gamme diatonique majeure.*

Tableau IV

Note	Fréquence en Hz	Note	Fréquence en Hz
do_{-1}	16,350	fa_{-1}#	23,120
do_{-1}#	17,320	sol_{-1}	24,500
$ré_{-1}$	18,350	sol_{-1}#	25,960
$ré_{-1}$#	19,450	la_{-1}	27,500
mi_{-1}	20,600	la_{-1}#	29,140
fa_{-1}	21,830	si_{-1}	30,870

◄ *Tableau IV : les fréquences de toutes les notes de l'octave — 1 de la gamme tempérée.*



Belzeaux - Rapho



P. Hinous - Connaissance des arts

Burt Glinn - Magnum

Les instruments à cordes

Lors de la description des phénomènes de résonance dans les cordes vibrantes, nous avons vu que la fréquence de résonance d'une corde tendue dépend essentiellement de trois facteurs : sa *longueur*, sa *tension mécanique* et sa *masse par unité de longueur*. Il est donc possible de faire varier la fréquence du son émis en modifiant la longueur ou la tension de la corde.

Les *instruments à notes fixes*, parmi lesquels on trouve le piano et la harpe, comportent des cordes de fréquence de résonance prédéterminée. Dans le piano, le pianiste frappe les touches du clavier qui sont reliées à des marteaux qui viennent frapper les cordes. Les touches blanches du piano correspondent aux 7 notes principales, les touches noires aux 5 notes intermédiaires. Dans la harpe, on trouve seulement les cordes correspondant aux 7 notes principales ; afin d'obtenir les 5 notes intermédiaires, il est nécessaire d'actionner une pédale qui vient raccourcir la longueur libre des cordes.

Dans les *instruments à notes variables*, il est possible, en jouant continûment sur la longueur des cordes de tension mécanique fixée, de faire varier continûment la fréquence de résonance de ces cordes. On trouve dans cette famille le violon, la viole, le violoncelle, la contrebasse, la guitare, la mandoline, le banjo, la balalaïka, etc.

Les instruments à vent

Nous avons vu que la fréquence de résonance d'un tuyau sonore dépendait essentiellement de la *longueur* de la colonne d'air qui peut être en vibration, de la *densité* et du *module de compressibilité* de l'air. Il est clair que le seul paramètre sur lequel il soit possible de jouer est le premier des trois. Nous sommes de nouveau conduit à effectuer une distinction entre les instruments à notes fixes et les instruments à notes variables.

Dans les *instruments à notes fixes*, tels que l'orgue, l'injection d'air dans une embouchure d'un tuyau de longueur donnée met en vibration la colonne d'air située à l'intérieur de ce tuyau, la transmission entre l'organiste et l'appareil se faisant par l'intermédiaire d'un mécanisme de commande.

Dans les *instruments à notes variables*, le musicien peut soit modifier de manière discontinue la longueur de la colonne d'air en vibration comme dans le hautbois, la clarinette, la flûte, le cornet, la trompette, etc., soit modifier continûment la longueur du tuyau sonore, et donc la fréquence de la note émise. C'est, par exemple, le cas du trombone à coulisse.

Les mesures en acoustique

Avant d'analyser les méthodes et les instruments de mesure de l'acoustique, il est bon de rappeler quelques concepts de base. Nous avons vu en effet que les sons peuvent être créés de nombreuses manières, par exemple en faisant vibrer une corde tendue ou en frappant une lame métallique avec un marteau. Nous avons également vu comment les vibrations ainsi créées sont susceptibles de se propager (en particulier dans l'air), puis d'être détectées ; par exemple, on peut transformer des vibrations de l'air en vibrations d'un diaphragme relié mécaniquement soit à un stylet marqueur, soit à un miroir susceptible d'osciller qui fait dévier un rayon lumineux.

Cette remarque nous conduit à définir trois catégories de systèmes : les générateurs, les systèmes de transmission, et les détecteurs. Nous considérerons tout d'abord quelques systèmes de détection qui ont joué, jusqu'à une date relativement récente, un rôle important : le disque de Rayleigh, l'anémomètre à fil chaud et le pendule de torsion. Le paragraphe suivant sera consacré aux transducteurs électro-acoustiques, dispositifs susceptibles de transformer l'énergie électrique de vibration en énergie mécanique (haut-parleurs, écouteurs) ou l'énergie mécanique en énergie électrique (microphones). Nous décrirons alors quelques méthodes utilisées pour effectuer des mesures. C'est dans le chapitre consacré à l'acoustique architecturale que seront données les caractéristiques acoustiques de quelques milieux de transmission sonore.

Les systèmes de détection « historiques »

Dans ce chapitre, nous allons décrire quelques instruments de mesure des sons qui, bien que n'étant pratiquement plus utilisés, ont eu une grande importance dans le développement de l'acoustique.

Le disque de Rayleigh

Ce dispositif a été très employé pour la mesure des intensités sonores. Il utilise les actions mécaniques hydrodynamiques qui s'exercent sur un volume plongé dans un fluide. Si l'on place un ellipsoïde dans un fluide animé d'une certaine vitesse, l'ellipsoïde tend à orienter son axe de symétrie le plus élevé dans le sens du courant. Nous considérons un cas particulier où l'ellipsoïde se réduit à un disque plat de rayon a, suspendu de telle sorte que son plan soit vertical et que la normale au plan du disque fasse un angle θ avec la direction de déplacement du fluide. Si le fluide, de *masse volumique* ρ, a une vitesse v, les lignes d'écoulement autour du disque sont perturbées comme sur la *figure* 46.

Les points A et B correspondent à des régions de pression maximale. Un couple se développe donc qui tend à faire tourner le disque afin de rendre la direction normale au plan du disque, parallèle à la direction de l'écoulement. La valeur C de ce couple a été calculée par König. Elle est donnée par :

$$C = \frac{4}{3}\rho a^3 v^2 \sin 2\theta$$

On constate sur cette expression que le couple est quadratique en vitesse. Cela implique que, dans le cas d'un écoulement périodique de la forme $v = v_m \sin \omega t$, le couple comprend deux termes : un terme indépendant du temps qui s'exerce toujours dans la même direction et un couple de fréquence 2ω.

$$C = \frac{4}{3}\rho a^3 v^2 \sin 2\theta = \frac{4}{3}\rho a^3 v_m^2 \sin 2\theta \sin^2 \omega t$$

$$= \frac{4}{3}\rho a^3 v_m^2 \sin 2\theta \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\rho a^3 \frac{v_m^2}{2} \sin 2\theta - \frac{4}{3}\rho a^3 \frac{v_m^2}{2} \cos 2\omega t$$

Compte tenu de l'inertie mécanique du disque, sa réponse à une fréquence 2ω peut être négligée (sauf pour de très basses fréquences). Le terme indépendant du temps donne par contre une mesure directe de $\frac{v_m^2}{2}$ et donc de $\overline{v}$ (valeur quadratique moyenne de la vitesse du déplacement). Il est à noter que la sensibilité du système, proportionnelle à $\sin 2\theta$, est maximale lorsque $\theta = 45°$. De plus, pour que le résultat indiqué soit valable, le diamètre du disque doit être négligeable devant la longueur d'onde de l'onde à mesurer afin que tous les points du disque voient la même vitesse d'écoulement.

En pratique, le disque de Rayleigh est fréquemment constitué d'une mince lame de mica, métallisée et suspendue à un fil de torsion en fibre de quartz de très petit diamètre. Il est possible de renforcer les actions mécaniques en plaçant le disque de Rayleigh dans le tube de jonction de deux résonateurs de Helmholtz accordés. La mesure de la rotation du disque peut être effectuée en utilisant la déflexion d'un faisceau lumineux réfléchi sur la face métallisée du disque de mica.

fig. 46

A
B
v
a
θ
Richard Colin

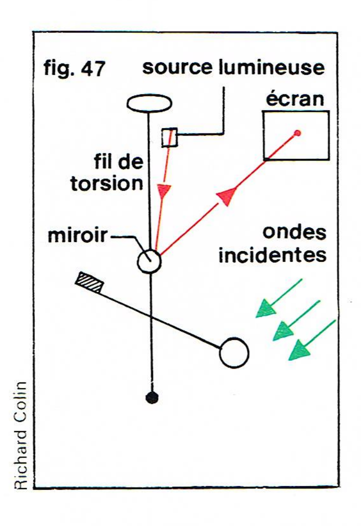
◄ *Figure 46 :* **le disque de Rayleigh,** *bien adapté pour les mesures d'ondes de fréquences basses.*

L'anémomètre à fil chaud

Ce dispositif, mis au point durant la Première Guerre mondiale, comprend un fil très fin en platine, chauffé par passage d'un courant électrique. Ce fil est placé au voisinage du goulot d'un résonateur de Helmholtz. La température du fil dépend du refroidissement produit par les molécules d'air en déplacement. La variation de température ainsi produite se traduit par une variation de

◄ *Page ci-contre, en haut, des instruments à cordes. A gauche, le piano à queue (cordes croisées),* **instrument à notes fixes :** *le pianiste frappe les touches du clavier qui sont reliées à des marteaux qui viennent frapper les cordes. A droite,* **la guitare, instrument à notes variables :** *en jouant sur la longueur des cordes, il est possible d'en faire varier la fréquence de résonance.*

◄ *Page ci-contre, en bas, des instruments à vent : à gauche, le* **trombone à coulisse,** *dont on modifie continûment la fréquence de la note émise en modifiant la longueur du tuyau sonore ; à droite, la* **trompette,** *dont on peut modifier de manière discontinue la longueur de la colonne d'air en vibration.*



▲▶ *Ci-dessus, figure 47 : principe du pendule de torsion adapté plus particulièrement aux ondes de fréquences élevées. Ci-contre, figure 48 : branchement d'un microphone à charbon. L'alimentation continue fournit le courant* I *de polarisation.*

la résistance électrique du fil. Deux méthodes ont été couramment utilisées pour détecter cette variation de résistance :

— on fait circuler un courant constant dans le fil, et on mesure la variation de tension qui apparaît à ses bornes ;

— on place le fil dans un pont de mesure de résistances (pont de Wheatstone, par exemple).

Le pendule de torsion

Ce pendule utilise le fait que, lorsqu'un rayonnement arrive sur une surface réfléchissante, cette dernière est soumise à une pression statique dite *pression de radiation*. Un tel pendule peut être suspendu à un fil de torsion (*fig.* 47). On peut mesurer la rotation du balancier à l'aide d'un faisceau lumineux réfléchi sur un miroir, et ainsi déterminer la pression de radiation. Soulignons que cette méthode est particulièrement bien adaptée aux ondes de fréquences élevées (la surface doit être réfléchissante), contrairement à la méthode du disque de Rayleigh, mieux adaptée pour les fréquences basses.

Les détecteurs sonores électro-acoustiques (microphones)

Ces dispositifs sont destinés à transformer une information acoustique en information électrique. Nous avons déjà vu un exemple de tels transducteurs, à savoir l'anémomètre à fil chaud. Nous allons maintenant décrire un certain nombre de systèmes couramment utilisés actuellement. Auparavant, nous devons définir un certain nombre de paramètres caractéristiques des microphones.

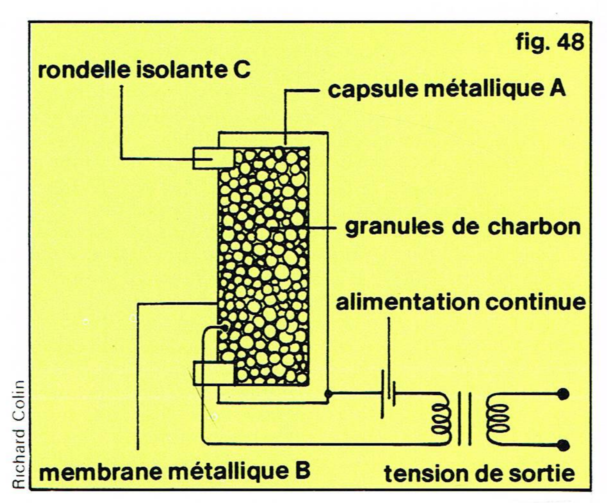
● *La bande passante*

Un microphone transforme une pression alternative en vibration électrique de même fréquence. Soit V (ω) la réponse électrique du microphone à une pression alternative *p* (ω) de fréquence ω. On peut définir la *sensibilité* $S(\omega) = \frac{V(\omega)}{p(\omega)}$. Elle est exprimée en millivolts par pascal (mV/Pa) ou en millivolts par microbar (mV/μbar). Très fréquemment, on exprime les sensibilités à l'aide d'une échelle logarithmique ; pour cela, la sensibilité est donnée soit en décibels par rapport à la tension de 1 volt produite par une pression efficace de 1 pascal, soit en décibels par rapport à 1 volt pour une pression de 1 μbar. Ainsi une sensibilité de 1 mV/Pa correspond à — 60 dB (référencés à 1 V/Pa) ou à — 80 db (référencés à 1 V/μbar).

La *bande passante* du microphone est la variation de la sensibilité S (ω) en fonction de la fréquence. Elle est en général décrite par un enregistrement sur lequel

▼ *Les détecteurs sonores électro-acoustiques, plus communément appelés « micros », sont destinés à transformer une information acoustique en information électrique.*





on porte en ordonnée le logarithme de la tension fournie par le microphone pour un niveau de pression acoustique donné, et en abscisse le logarithme de la fréquence de l'onde.

● *La directivité*

La *directivité* caractérise la dépendance angulaire de la sensibilité, par rapport à l'axe du microphone. On peut définir l'angle θ entre l'axe du microphone et la direction d'où arrive le son. Un microphone sera dit *omnidirectionnel* si S (ω) est constant en fonction de θ. Un microphone qui sera plus sensible à un signal acoustique venant de l'avant (θ ~ 0°) qu'à un signal acoustique venant de l'arrière (θ ~ 180°) sera dit *unidirectif*.

● *Le niveau équivalent de bruit*

Lorsqu'on doit mesurer des signaux de très petite amplitude, on est conduit à introduire un paramètre supplémentaire : le *niveau équivalent de bruit*, qui indique la pression acoustique en dessous de laquelle le signal électrique utile issu du microphone est noyé dans le bruit.

● *La gamme dynamique*

On définit également la *gamme dynamique* D comme l'intervalle de pressions dans lequel le microphone opère correctement. Cet intervalle est en général exprimé en décibels par comparaison des pressions maximales et minimales admissibles par le microphone

$$D = 20 \log \frac{p_{max}}{p_{mini}}$$

● *L'impédance*

Du point de vue des impédances, on définit trois gammes :

— la *basse impédance :* de 15 à 70 Ω approximativement ;

— la *moyenne impédance :* de 100 à 1 000 Ω avec des valeurs standards à 200, 300 et 600 Ω ;

— la *haute impédance :* au-dessus de 2 000 Ω. En général, les microphones dont les impédances de sortie se situent dans cette gamme alimentent directement un préamplificateur adaptateur d'impédance à transistor à effet de champ.

● *Autres paramètres*

Pour certaines applications, d'autres paramètres doivent être spécifiés, par exemple la *reproductibilité des mesures*, la *tenue en température*, la *dépendance en champ magnétique*, l'*influence de l'humidité*, la *stabilité à long terme*, l'*influence des vibrations*, etc.

Le microphone à charbon

Nous commençons cette description par le microphone à charbon, qui, bien qu'étant sur le plan des caractéristiques l'un des plus mauvais, est également l'un des plus utilisés, en particulier dans le domaine des télécommunications. Ce paradoxe apparent est levé si l'on tient compte du fait que ce microphone a été pendant très longtemps le plus économique à fabriquer.

Considérons le système de la *figure* 48 dans lequel une capsule métallique A contient des granules de charbon pressés les uns contre les autres par une membrane métallique B, isolée électriquement de la capsule A par une rondelle isolante C. Ce dispositif est alimenté

en courant constant I. Soit R la résistance du microphone; la tension qui se développe à ses bornes est V = RI. Lorsque la membrane est soumise à une variation de pression, elle modifie l'écrasement des grains de charbon les uns contre les autres. Cela modifie la résistance R et donc la tension mesurée. Ce microphone fonctionne avec un courant compris entre 10 et 100 mA. Il fournit une tension importante et ne nécessite donc pas d'amplification électronique sophistiquée; outre son prix de revient très faible, c'est une des raisons pour lesquelles plusieurs centaines de millions de microphones à charbon ont été fabriqués dans le monde. Pratiquement tous les systèmes téléphoniques l'ont utilisé. Ce microphone a une bande passante assez réduite qui est cependant suffisante pour les applications téléphoniques. De très nombreux perfectionnements sont venus, tout au long de sa vie, améliorer ses performances : la membrane n'est plus utilisée comme électrode; les deux électrodes sont situées dans la poche contenant les granules de charbon; la forme de la capsule a été étudiée pour améliorer la courbe de réponse, etc. En pratique, ces microphones, qui ont une bande passante limitée à environ 5 000 Hz, qui consomment beaucoup d'énergie et qui ont des performances acoustiques assez limitées, devraient progressivement céder la place aux microphones électrodynamiques, puis aux microphones à électrets.

Les microphones électrodynamiques

● *Principe de fonctionnement*

Les microphones électrodynamiques utilisent le fait que, si l'on déplace une ou plusieurs spires (bobine) de fil conducteur dans une induction magnétique, il apparaît aux bornes de la bobine une force électromotrice *e*, proportionnelle à la variation de flux coupé par la bobine. Diverses réalisations techniques permettent de transformer les vibrations de l'air en déplacement relatif d'un conducteur ou d'une bobine conductrice et d'un aimant permanent.

● *Le microphone à ruban*

Ce microphone schématisé sur la *figure* 49 est constitué d'une bande très mince de métal plié en accordéon (ruban) placé entre les pôles d'un aimant permanent. Lorsqu'une onde acoustique arrive sur le ruban, ce dernier se déplace dans l'entrefer de l'aimant permanent, et une différence de potentiel apparaît entre les bornes A et B. On remarque qu'un tel microphone n'est pas sensible aux ondes qui se propagent dans le plan du ruban. En effet, ces ondes produisent en avant et en arrière des pressions identiques dont la somme des effets s'annule sur le ruban. Aux basses fréquences, une onde incidente venant de l'avant peut parvenir aussi sur la face arrière du ruban (si celui-ci n'est pas protégé). Dans ce cas, le ruban est sensible au gradient de pression qui existe entre l'avant et l'arrière du ruban. On a donc un microphone essentiellement sensible à la vitesse de déplacement des particules d'air.

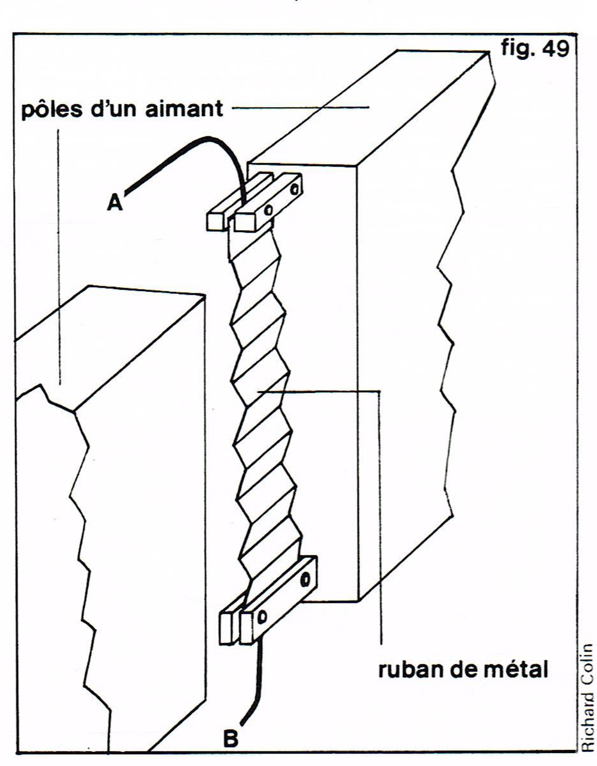
A haute fréquence au contraire, comme les longueurs d'onde sonore sont du même ordre de grandeur que les dimensions du microphone, on peut considérer que ce dernier isole l'arrière du ruban, et le microphone se comporte comme un microphone sensible à la pression.

Les microphones à rubans ont pendant longtemps été considérés comme les meilleurs, compte tenu de la faible inertie de l'élément mobile : le ruban peut être extrêmement mince et léger. Ce microphone est particulièrement adapté aux enregistrements en intérieur, car il est très sensible aux déplacements d'air qui peuvent se produire dans des prises de son en extérieur. De plus, il faut très soigneusement l'isoler des vibrations mécaniques induites par le support. En effet, ces dernières entrainent des vibrations parasites dans le ruban. Il en résulte un bruit de basse fréquence qui peut être très important. Néanmoins, en studio, ces microphones peuvent présenter des courbes de réponse en fréquences régulières de 50 à 15 000 Hz.

● *Le microphone à aimant mobile*

Dans ce microphone, les vibrations de l'air sont transférées par un diaphragme à un élément mobile A d'un circuit magnétique qui peut éventuellement être le diaphragme lui-même. La *figure* 50 montre diverses réalisations possibles d'un tel système. Sur la *figure* 50 a, on voit que, lorsque l'élément A est mis en vibration, le flux qui traverse le circuit magnétique est modifié, et une différence de potentiel apparaît aux bornes de la bobine. Sur la *figure* 50 b, on a un système équivalent mais rendu symétrique. Le système représenté sur la *figure* 50 c bénéficie de la symétrie de révolution : lorsque la membrane est entraînée par les vibrations de l'air, elle déplace l'armature annulaire C qui modifie le flux dans le circuit magnétique refermé par la pièce annulaire D; une différence de potentiel est alors induite aux bornes de la bobine E.

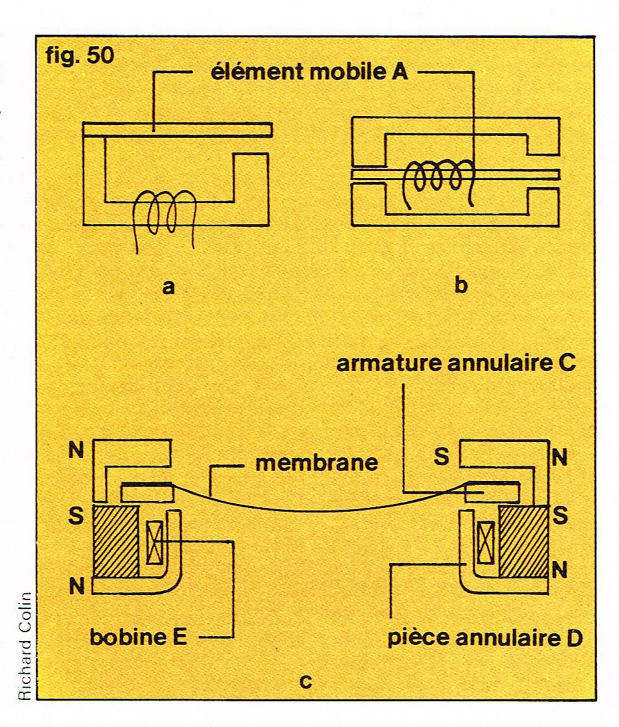
Ces microphones, qui sont très supérieurs aux microphones à charbon, ont été très utilisés dans les systèmes de télécommunications, lorsque le développement des systèmes électroniques à bon marché (amplificateurs et adaptateurs d'impédance) a réduit cet avantage qu'avait le microphone à charbon d'avoir un niveau de sortie très élevé. Ces systèmes utilisent des membranes très rigides qui les rendent peu fragiles. Leur bande passante est en





◀ ***Le microphone à ruban (à droite), dont le principe de fonctionnement est schématisé (à gauche) dans la figure 49.***

▶ *Figure 50 : trois réalisations* (a, b, c) *possibles d'un* microphone à aimant mobile. *Les pôles sud et nord des aimants sont représentés par les lettres* S *et* N.



contrepartie limitée, en général de 300 à 3 000 Hz, ainsi que leur domaine de linéarité. Ces microphones présentent néanmoins, outre leur robustesse, l'avantage de pouvoir être utilisés comme écouteurs ou petits haut-parleurs, et trouvent ainsi des applications particulières (machines à dicter par exemple).

● *Le microphone à bobine mobile*

Ce microphone, fréquemment appelé « dynamique », est très répandu. Un aimant permanent produit un champ magnétique radial assez intense entre une pièce polaire centrale et une pièce polaire annulaire externe. Une petite bobine fixée à un diaphragme est susceptible de se déplacer dans ce champ et ainsi d'induire à ses bornes une différence de potentiel (*fig.* 51). L'élément mobile peut donc être plus léger que dans le cas de l'aimant mobile. Les déplacements peuvent aussi être plus grands, permettant une bonne linéarité dans une assez grande gamme dynamique. De plus, ces transducteurs sont réversibles et peuvent être utilisés comme écouteurs ou haut-parleurs.

Les microphones à semi-conducteur (piézotransistors)

Ces microphones relativement récents ont été l'objet d'un gros effort de recherche ces dernières années. Une membrane qui détecte les vibrations de l'air transmet ces vibrations à une jonction de transistor dont la résistance est modifiée par la contrainte exercée. En polarisant cet élément par un courant constant, on recueille à ses bornes une tension V = RI. Lorsque la résistance est modulée, la tension de sortie l'est également. Ce système présente en théorie plusieurs des avantages du microphone à charbon (fort niveau de sortie, basse impédance). Ces microphones en sont encore au stade des études.

Les microphones piézo-électriques

La piézo-électricité a été découverte par les frères Curie en 1880. C'est la propriété que possèdent certains corps de se charger électriquement lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique. Ce comportement spontané, dans un certain nombre de cristaux naturels ou synthétiques, est dû à la structure cristalline : une action mécanique provoque un déplacement relatif des centres des charges positives ou négatives du matériau. Une polarisation électrique apparaît alors : c'est l'*effet piézo-électrique direct*. Inversement, si l'on applique un champ électrique au matériau, ce dernier se déforme mécaniquement. Il est donc clair que l'effet piézo-électrique direct permet de concevoir des transformateurs d'énergie mécanique en énergie électrique (microphones, capteurs de contraintes, de déformations), alors que l'*effet piézo-électrique inverse* permet de concevoir des transformateurs d'énergie électrique en énergie mécanique (excitateurs de déplacements statiques ou de vibrations, écouteurs, haut-parleurs, émetteurs ultrasonores).

Nous allons maintenant nous intéresser particulièrement aux microphones piézo-électriques. Nous retrouverons les corps piézo-électriques lorsque nous décrirons les ondes ultrasonores, pour lesquelles ils représentent un outil de première importance.

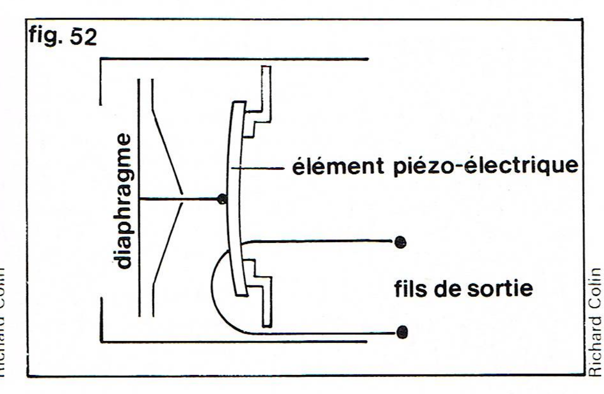
Un microphone piézo-électrique est composé d'un diaphragme qui reçoit les vibrations de l'air et les transmet à un élément piézo-électrique. Sur la *figure* 52, on a schématisé un microphone typique de ce genre. On peut immédiatement remarquer que le montage des divers éléments est assez délicat, en particulier la liaison entre le diaphragme et l'élément piézo-électrique est très critique. Sur le plan du fonctionnement, les microphones piézo-électriques se comportent comme des sources électriques purement capacitives. L'impédance du circuit et des câbles, sur lesquels le microphone débite, peut donc modifier considérablement les performances du système. La capacité parasite des câbles, mise en parallèle sur la capacité de l'élément piézo-électrique, tend à diminuer le signal de sortie, indépendamment de la fréquence. Par contre, si la résistance d'entrée de l'amplificateur utilisé est comparable à l'impédance du microphone, les composantes basse fréquence des signaux seront fortement affaiblies. Cela implique l'utilisation, à proximité du microphone, d'un amplificateur adaptateur d'impédance. Les transistors à effet de champ conviennent parfaitement à cet usage.

Les microphones piézo-électriques ont des courbes de réponse en fréquence qui peuvent aisément être régulières jusqu'à des fréquences de 10 000 Hz. Leur gamme dynamique est très bonne, et ils possèdent un certain nombre de qualités (bonne réponse en basse fréquence lorsqu'ils sont associés à un préamplificateur d'adaptation d'impédance, faible sensibilité à l'humidité, à la température, etc.).

Jusqu'à une date récente, l'élément piézo-électrique de ces microphones était un cristal ou une céramique reliés mécaniquement au diaphragme récepteur des vibrations de l'air. De nouveaux matériaux piézo-électriques sont apparus ces dernières années : les polymères (avec lesquels on fabrique la plupart des matières plastiques). Un grand avantage des polymères piézo-électriques réside dans le fait qu'ils peuvent être obtenus en films minces et sont donc susceptibles d'être utilisés directement comme membrane vibrante. Ces dispositifs commencent seulement à voir le jour.

▶ *A gauche, figure 51 : principe de fonctionnement d'un* microphone à bobine mobile. *A droite, figure 52 : représentation d'un* microphone piézo-électrique.

fig. 51
membrane
bobine
N
S
N
aimant
Richard Colin



Les microphones à condensateur

● *Principe de fonctionnement*

Découvert par Wente en 1917, le microphone à condensateur, schématisé sur la *figure* 53, a rapidement acquis ses lettres de noblesse en ouvrant le domaine des mesures acoustiques de précision. Il consiste essentiellement en un condensateur dont l'une des électrodes est fixe et dont l'autre électrode est une membrane très mince tendue à proximité de l'électrode fixe. Si le condensateur ainsi formé est chargé électriquement, toute variation de son épaisseur, et donc de sa capacité, sous l'influence d'une pression, se traduit par l'apparition à ses bornes d'une tension proportionnelle à la variation de capacité. La résistance de charge du condensateur doit donc être élevée pour que la charge reste constante. Sinon, à basse fréquence, la sensibilité diminue.

Le fonctionnement du microphone à condensateur peut être décrit par le schéma électrique de la *figure* 54 dans lequel C représente la valeur au repos du condensateur de mesure, ΔC la variation de capacité due à la surpression sur la membrane, V la tension fournie par une alimentation qui sert à charger la capacité C, et R_s la résistance de cette alimentation. C_e est la somme des capacités parasites des câbles de liaison et de la capacité d'entrée de l'amplificateur, et R_e est la résistance d'entrée de l'amplificateur. On voit sur ce schéma qu'une variation ΔC de la capacité du microphone se traduit par une variation Δv de la tension entre les points A et B. On a :

$$\Delta v = \frac{\Delta C}{C + C_e} V \frac{j\omega RC}{1 - j\omega R\,(C + C_e)}$$

où $j = \sqrt{-1}$ et R est la résistance équivalente aux résistances R_e et R_s montées en parallèle :

$$R = \frac{R_s R_e}{R_s + R_e}$$

En examinant cette relation, on constate que Δv est d'autant plus grand que V est grand, C_e est petit et ωRC est plus grand que l'unité. Comment optimiser ces trois paramètres :

(a) Pour V, on est limité par la tension que peut supporter le condensateur C sans être l'objet de claquages électriques. En pratique, les tensions de polarisation sont d'environ 300 volts.

(b) Pour C_e, afin de minimiser les capacités parasites des câbles de liaison, on place un préamplificateur à proximité immédiate de la capsule microphonique elle-même, et la capacité d'entrée de ce préamplificateur doit être la plus faible possible.

(c) Pour satisfaire la condition $\omega RC \gg 1$, il est nécessaire d'avoir un préamplificateur d'impédance d'entrée très grande (supérieure à 100 MΩ). De plus, de par la construction très soignée qu'ils exigent, les microphones à condensateur sont en général d'un prix assez élevé. Ces divers éléments expliquent pourquoi malgré leurs très nombreuses qualités (bande passante considérable, du continu à 100 000 Hz dans certains cas, facilité de les rendre unidirectionnels, etc.), les microphones à condensateur ont été relativement peu utilisés, mis à part les applications professionnelles (studios d'enregistrement, radiodiffusion, mesures).

Deux éléments nouveaux sont intervenus qui modifient cette situation : depuis quelques années, le développement des semi-conducteurs et de l'électronique intégrée permet de réaliser des préamplificateurs de prix assez peu élevé, à haute impédance d'entrée, faible capacité parasite, et petite dimension, qui peuvent être très facilement intégrés dans le boîtier du microphone. Les points **(b)** et **(c)** des conditions précédentes peuvent ainsi être satisfaits.

Très récemment a été mise au point une technique de fabrication de matières plastiques électriquement chargées (électrets).

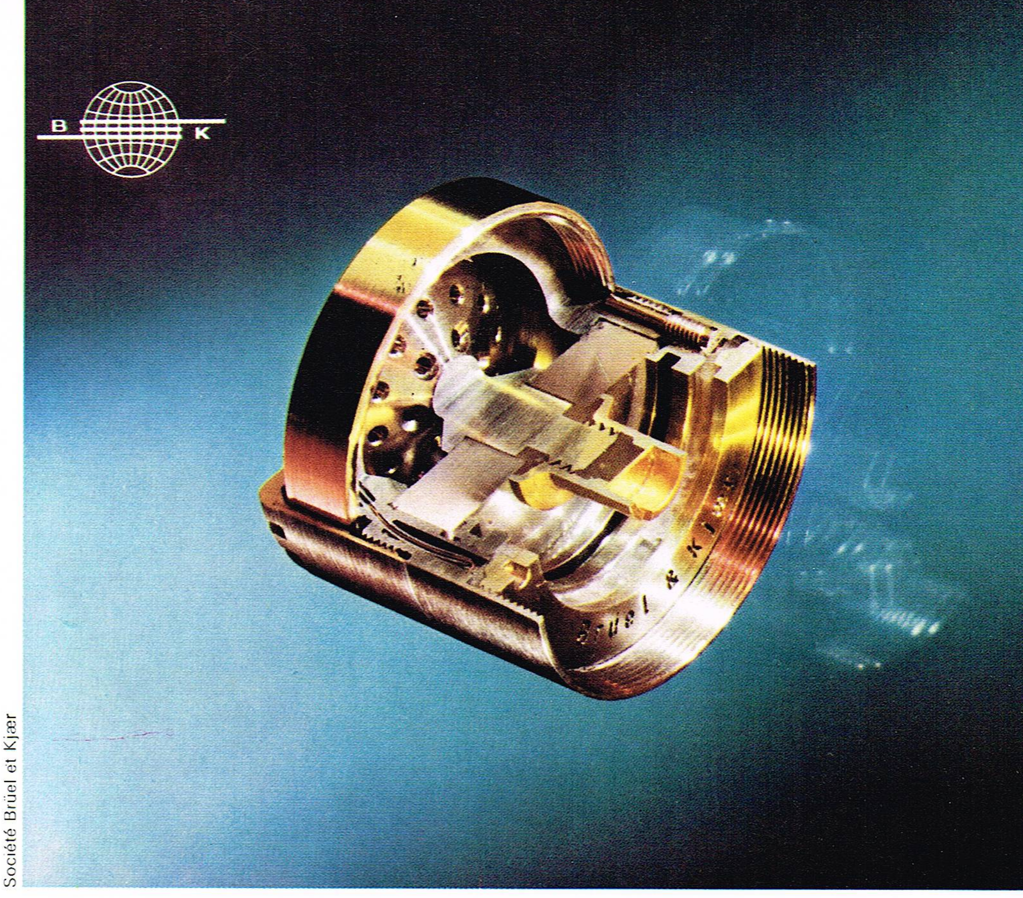
Ces matériaux révolutionnent le domaine du microphone, car nous allons voir comment ils permettent d'obtenir des performances très élevées pour un coût qui n'est plus prohibitif. Et surtout, ils suppriment le besoin d'une tension de polarisation externe, objet du point **(a)** exposé ci-contre.

● *Les microphones à électret*

Nous avons déjà rencontré un type d'électrets lorsque nous avons vu les microphones piézo-électriques. En fait, un électret est l'équivalent électrique d'un aimant permanent : c'est un matériau qui possède une polarisation électrique permanente ou quasi permanente.

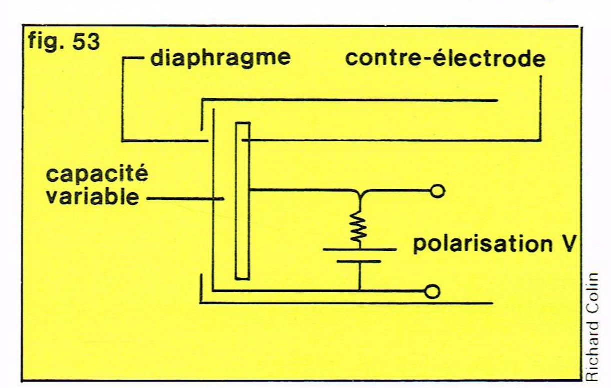
Les électrets ont été découverts voici près d'un demi-siècle, mais ce n'est que très récemment qu'ils sont revenus au premier plan des recherches et des applications. En effet, le développement de nouveaux matériaux (polymères) et de techniques d'élaboration bien contrôlées a permis de réaliser des électrets en films minces de polymères. C'est en utilisant de tels produits que Sessler et West réalisèrent en 1962, dans les laboratoires de la Bell Telephone, le premier microphone à électret en polymère.

Depuis, de nombreux progrès ont été réalisés, et ces microphones sont commercialisés en grand nombre. Leurs courbes de réponse peuvent être adaptées en fonction des besoins.

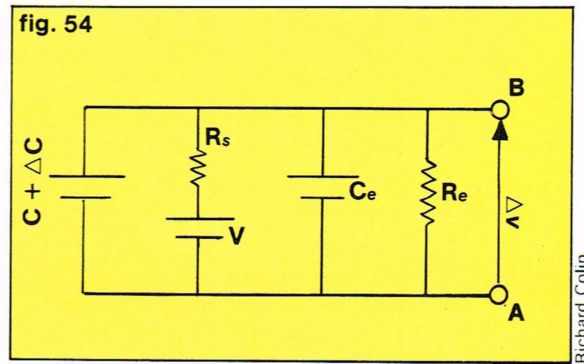


Société Brüel et Kjær

▲ *Microphone de mesures à condensateur de Brüel et Kjær. On aperçoit la contre-électrode percée de trous, la bague en quartz qui maintient la contre-électrode et l'isole du capot, et un trou partiellement rempli par un mince fil qui sert d'orifice d'égalisation de pression statique afin d'éviter des forces statiques importantes sur la membrane.*

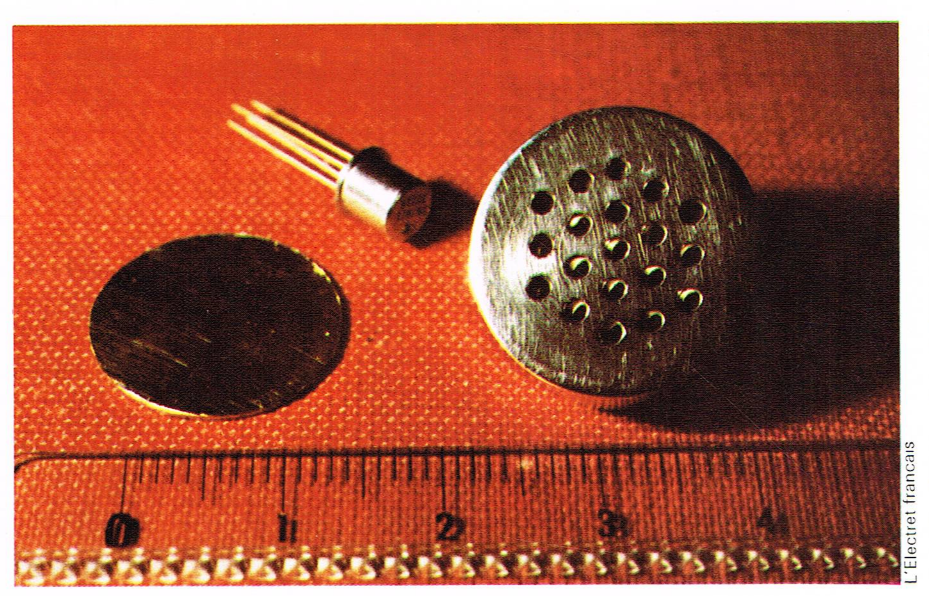


Richard Colin



Richard Colin

◄ *A gauche, figure 53 : schéma d'un microphone à condensateur. A droite, figure 54 : schéma électrique du microphone à condensateur.*



L'Electret français

▲ ***Capsule* de microphone électrostatique à électret.**
On distingue à gauche un électret, et à l'arrière-plan l'adaptateur d'impédance à effet de champ.

La courbe de réponse d'une capsule de microphone de sonorisation est indiquée sur la *figure* 55. Les microphones à électret sont des microphones à condensateur autopolarisé. En général, la membrane vibrante est une feuille de plastique, métallisée sur une face et porteuse de charges électriques de surface et de volume. Ces charges, qu'on sait maintenant réaliser avec des durées de vie extrêmement longues (supérieures à plusieurs décennies), produisent un champ électrique statique à l'intérieur du condensateur constitué par l'électret métallisé et une contre-électrode. Lorsque la membrane est mise en vibration, la variation de capacité du condensateur induit une variation du champ électrique régnant dans le condensateur. Cette variation temporelle du champ est l'équivalent d'un courant électrique. Il suffit de détecter ce courant dans le circuit extérieur pour se retrouver dans les conditions d'emploi du microphone à condensateur classique. En jouant sur la forme de la contre-électrode, il est possible de modifier très fortement la courbe de réponse du microphone mais également le diagramme de directivité. Ainsi, sur la *figure* 56, on a porté, en coordonnées polaires, la sensibilité du microphone en fonction de l'angle d'incidence de l'onde sonore.

fig. 56

L'Electret français

● *Utilisation en micro-émetteur*

Il est possible d'utiliser les microphones à condensateur de manière complètement différente de celles qui viennent d'être décrites. En effet, en incorporant la capacité du microphone dans le circuit d'accord en fréquence d'un circuit oscillant de haute fréquence, il est possible de moduler cette haute fréquence par un signal basse fréquence, correspondant aux variations de capacité du microphone condensateur dues aux variations de pression acoustique.

Ce dispositif est particulièrement bien adapté aux micro-émetteurs (microphones sans fil) dans lesquels le signal haute fréquence est transmis par l'intermédiaire d'une petite antenne.

Les émetteurs sonores

Les émetteurs sonores sont des dispositifs susceptibles d'engendrer des vibrations sonores. Dans la vie courante, nous rencontrons en général plus d'émetteurs de sons que nous ne le souhaiterions : voitures, camions, postes de radio, voisins, etc. Ces quelques exemples nous montrent que les émetteurs de sons peuvent être extrêmement variés. Nous avons déjà rencontré dans ce texte divers émetteurs : la sirène de Cagniard, le disque de Seebeck, les cordes et barres vibrantes, la voix. Nous allons nous intéresser particulièrement aux systèmes qui transforment une vibration électrique en vibration mécanique et qu'on appelle *transducteurs électro-acoustiques*. Ils englobent les écouteurs et les haut-parleurs. Comme pour les microphones, divers principes sont utilisés pour effectuer cette conversion d'énergie. Nous décrirons plus particulièrement quatre d'entre eux. Auparavant, et comme pour les microphones, on peut définir plusieurs paramètres caractéristiques : la *bande passante,* le *diagramme de directivité de rayonnement,* la *sensibilité*. Cette dernière s'exprime couramment pour les écouteurs en pascals par volt ou encore en décibels par rapport à 1 pascal par volt. Dans certains cas, afin de faire intervenir la puissance électrique, on utilise l'échelle des décibels par rapport à 1 $\text{Pa}/\sqrt{\text{puissance en mW}}$.

Les systèmes électrodynamiques

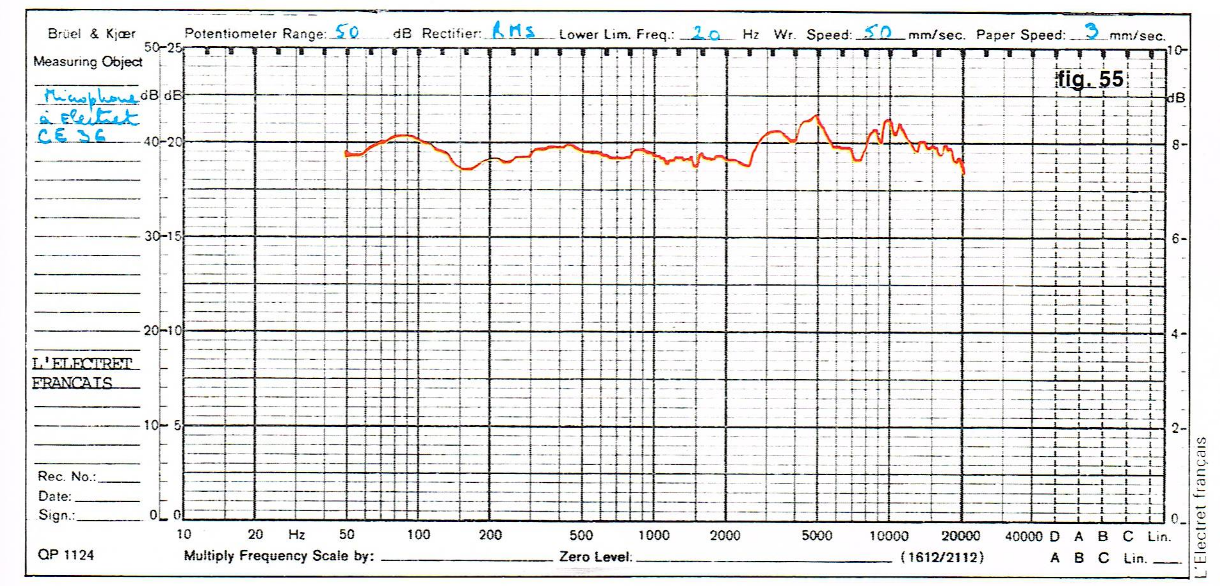
Les systèmes électrodynamiques mettent en œuvre les forces magnétiques qui s'exercent entre une bobine parcourue par un courant et un milieu aimanté. Ce principe peut être utilisé pour réaliser des écouteurs avec la même distinction que celle que nous avons rencontrée à propos des microphones entre systèmes à bobine mobile et systèmes à aimant mobile. En pratique, les bandes passantes et caractéristiques physiques sont les mêmes que pour les microphones, et nous ne les décrirons pas. Rappelons néanmoins qu'ils constituent des systèmes réversibles pouvant être utilisés soit pour transformer des vibrations électriques en vibrations mécaniques, soit pour réaliser la transformation inverse.

Les haut-parleurs utilisent, bien sûr, le même principe. En général, une bobine entraîne un piston qui déplace les couches d'air voisines. Afin d'adapter les impédances acoustiques, on utilise très souvent un *cornet acoustique* (cône). Dans certains cas, pour améliorer la bande passante, on équipe certains haut-parleurs de deux cônes, un pour les fréquences basses (graves) de grand diamètre et un pour les fréquences élevées (aiguës) de diamètre plus petit (*fig*. 57). De très nombreuses variantes de ce dispositif ont été réalisées.

Les systèmes électrostatiques

Considérons un condensateur constitué d'une membrane conductrice tendue à la distance d d'une contre-électrode fixe (*fig*. 58). Si l'on applique aux deux bornes du condensateur une tension continue V_0 et une tension alternative $v \sin \omega t$, le champ électrique à l'intérieur du condensateur est de la forme :

$$E = E_0 + e \sin \omega t \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{V_0}{d} \quad \text{et} \quad e = \frac{v}{d}$$



◀ *Figure 55 : courbe de réponse en fréquence du microphone à électret (photographié page ci-contre). L'enregistrement est gradué de 0 à 50 db. On constate que la sensibilité est constante à ± 3 db, de 50 Hz à 20 000 Hz.*

▼ *A gauche, figure 57 : représentation schématique d'un haut-parleur électrodynamique.*

La pression électrostatique qui s'exerce sur les électrodes est : $p = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} [E_0^2 + 2\, e E_0 \sin \omega t + e^2 \sin^2 \omega t]$

où ε_0 est la *permittivité du vide ;* $\varepsilon_0 = (4 \pi \times 9 \cdot 10^9)^{-1}$

Soit $p = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\left(E_0^2 + \frac{e^2}{2} \right) + 2\, e\, E \sin \omega t - \frac{e^2}{2} \cos 2\, \omega t \right]$

Finalement,

$$p = \frac{\varepsilon_0}{2\, d^2} \left(V_0^2 + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\varepsilon_0}{d^2} v\, V_0 \sin \omega t - \frac{\varepsilon_0}{4\, d^2} v^2 \cos 2\, \omega t$$

On constate que cette pression comprend trois composantes : une composante de pression statique, une composante à la fréquence ω, d'amplitude proportionnelle à v et à V_0, et une composante de fréquence 2 ω, proportionnelle à v^2. Si l'on suppose que v est petit devant V_0, alors le terme dominant, dépendant du temps, est le terme à la fréquence ω. Cette pression périodique est susceptible d'engendrer une vibration de la membrane à la même fréquence. Du fait que la pression agit uniformément sur la membrane, cette dernière peut être très mince, et on retrouve ainsi quelques-uns des avantages déjà rencontrés à propos des microphones électrostatiques.

Nous avons vu que ces transducteurs, purement capacitifs, présentaient une impédance très élevée, particulièrement à basse fréquence. Cela impose, ici encore, de réaliser une adaptation. Elle est cependant assez délicate dans le cas de haut-parleurs, car les puissances mises en œuvre sont beaucoup plus importantes que dans le cas du microphone. Néanmoins, ce problème résolu, ces transducteurs offrent d'excellentes performances.

Les grandes dimensions des panneaux radiants ainsi réalisés peuvent parfois se traduire par des diagrammes de directivité assez étroits aux fréquences élevées. Pour les écouteurs, le problème de puissance se pose en des termes moins draconiens, et les systèmes électrostatiques devraient connaître un développement assez important.

De plus, le handicap d'avoir à polariser le condensateur avec une tension élevée peut être évité par le même biais que celui qui est utilisé dans les microphones, en se servant d'une membrane électret.

Les systèmes piézo-électriques

Nous avons déjà vu à propos des microphones piézo-électriques les propriétés intéressantes des corps piézo-électriques. Nous ne décrirons pas en détail le fonctionnement de générateurs sonores à effet piézo-électrique : ils mettent à profit l'effet piézo-électrique inverse : en soumettant à un champ électrique un corps piézo-électrique, ce dernier se déforme mécaniquement. C'est probablement les polymères piézo-électriques qui feront déboucher ce type de systèmes vers des applications pour le grand public.

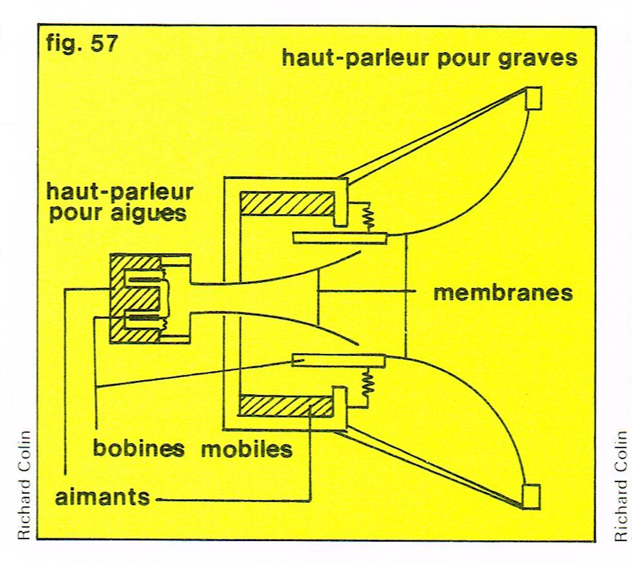
L'ionophone

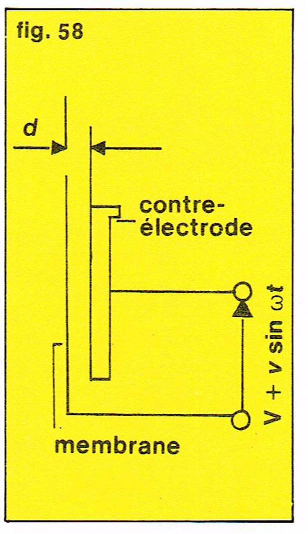
Ce système unique a été mis au point par S. Klein en 1952. Il est fondé sur l'idée que, dans un haut-parleur, des problèmes apparaissent du fait que l'énergie électrique agit sur un système mécanique et que ce système mécanique doit être couplé à l'air. De là à chercher une solution pour faire agir directement la commande électrique sur l'air, il n'y avait qu'un pas que S. Klein a franchi.

Une cellule de quartz située à la base d'un cornet acoustique est soumise à un rayonnement haute tension et haute fréquence (27 MHz) de telle sorte que, dans cette cellule, l'air s'ionise. En modulant l'amplitude de cette tension par le signal à reproduire, on provoque des variations pratiquement instantanées de la température et de la pression dans la cellule de quartz. Les variations de pression se transmettent à travers le cornet acoustique dans l'air ambiant. Il est remarquable de noter que ce dispositif ne comprend aucune pièce mobile. La réponse est donc quasi parfaite, seulement limitée par les caractéristiques du cornet acoustique. Le domaine de fréquences couvertes est compris entre 2 500 Hz et des fréquences qui dépassent la limite de l'audibilité. L'extension du procédé vers les basses fréquences pose néanmoins de sérieux problèmes, compte tenu du volume que devrait alors avoir le cornet acoustique.

Il est également à noter que ce système émet des rayonnements électromagnétiques à 27 MHz modulés en amplitude. Ce peut être là une source sérieuse de parasites pour les communications hertziennes et les ondes radio et télévision. Pour éviter ces effets, il suffit de réaliser un blindage électrique.

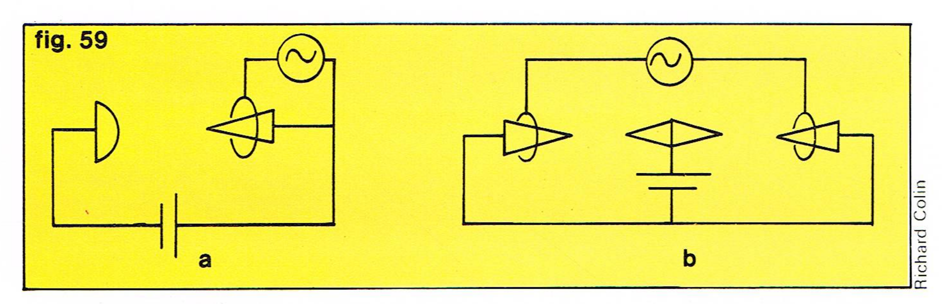
Un système fondé sur une idée voisine a été proposé par D. M. Tombes. Il s'agit du **haut-parleur à ions.** Une tension continue, appliquée entre deux électrodes, produit une décharge électrique dans l'air. A cette décharge est



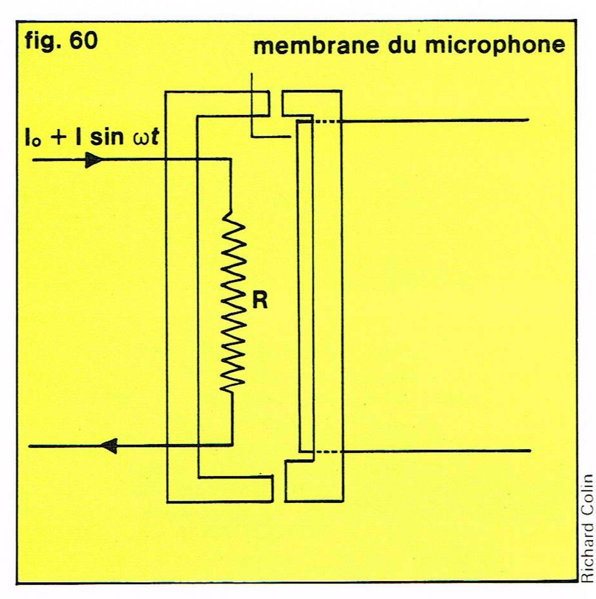


▲ *Ci-dessus, figure 58 :* schéma de principe d'un générateur sonore électrostatique.

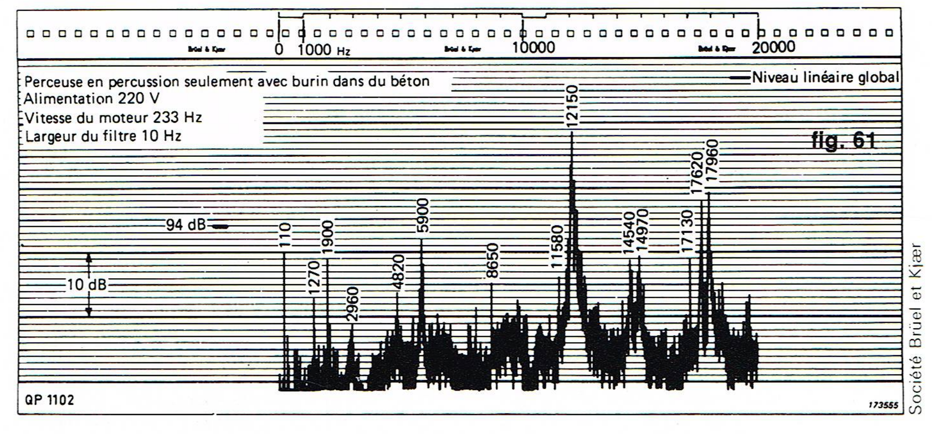
◀ *Page ci-contre, en bas, figure 56 : diagramme de directivité du microphone à électret. L'enregistrement a été fait à 650 Hz, en utilisant une échelle logarithmique. Le rayon est gradué de 0 à 50 db. On constate que la sensibilité du microphone pour une onde venant de l'arrière (180°) est inférieure de 33 db à la sensibilité pour une onde venant de l'avant (0°). Si une échelle linéaire avait été utilisée, le signal enregistré pour 180° serait pratiquement nul.*



▲ *Figure 59 ; représentation schématique d'un* haut-parleur à ions : a, *simple ;* b, *symétrique.*



▶ *Figure 60 : principe du* thermophone *de Wente.*



▲ *Figure 61 : spectre en fréquence du bruit d'une perceuse à percussion dont le fleuret est dans du béton.*

associé un déplacement de molécules d'air : le « vent » de la décharge. On ajoute une troisième électrode portée au même potentiel moyen que l'une des deux précédentes mais à un potentiel instantané proportionnel à l'information à transmettre. Cette tension module la décharge électrique et produit une modulation de la pression de l'air. On a ainsi un haut-parleur (*fig.* 59a). Afin de symétriser les effets, il est possible de doubler le montage afin de réaliser un dispositif du type « Push Pull » (*fig.* 59b). Actuellement, la puissance acoustique produite est assez faible, mais la courbe de réponse est très plate, et ce jusqu'à des fréquences qui dépassent la limite d'audibilité.

Les méthodes de mesure en acoustique

Nous avons déjà vu comment l'invention du microphone à condensateur par Wente avait ouvert la voie aux mesures acoustiques. Le microphone à condensateur était en effet un instrument de mesure précis, calibrable, reproductible, qui présentait de très nombreux avantages par rapport au disque de Rayleigh.

Le premier problème qui se pose lorsqu'on veut utiliser un microphone pour effectuer des mesures est celui de l'étalonnage. Pour cela, diverses méthodes ont été et sont utilisées, toutes fondées sur l'idée qu'on exerce sur la membrane du microphone une pression connue. On mesure la réponse électrique correspondante à cette pression et on effectue cette opération pour diverses fréquences.

Un des premiers dispositifs utilisés pour étalonner les microphones de mesure a été le **thermophone,** également inventé par Wente. Un petit volume fermé (*fig.* 60) renferme la surface sensible du microphone. Dans ce volume, se trouve un conducteur de résistance R traversé par un courant électrique comprenant un terme constant I_0 et un terme alternatif $I \sin \omega t$. Le flux de chaleur dégagée est :

$$R\,(I_0 + I \sin \omega t)^2 = R\left(I_0^2 + \frac{I^2}{2}\right) + 2\,R I_0 I \sin \omega t - R I^2 \cos 2\,\omega t$$

Le premier terme correspond à un flux de chaleur constant. Si de plus $I \ll 2\,I_0$, le gaz enfermé dans la cavité subit une variation de pression périodique qu'on peut analytiquement calculer en fonction des paramètres physiques du système.

En fait, une autre méthode a été très vite adoptée. Elle consiste à exercer sur la membrane du microphone une pression électrostatique connue. On peut reprendre pour cela les expressions calculées dans le paragraphe consacré aux haut-parleurs électrostatiques.

La membrane est soumise à une pression de fréquence ω qui a pour valeur :

$$p_\omega = \frac{\varepsilon_0 V v}{d^2} \sin \omega t$$

Si $V = 1\,000$ volts, $d = 1$ mm, $v = 10$ volts, on trouve :

$$p_\omega = 0{,}088 \sin \omega t, \text{ exprimé en pascals.}$$

En faisant varier la fréquence du générateur de tension, fournissant v, on peut faire l'étalonnage de la sensibilité du microphone aux diverses fréquences et l'utiliser ensuite pour les mesures de pressions acoustiques.

De nombreux raffinements des méthodes d'étalonnage ont été apportés au cours des années. Nous mentionnerons sans la décrire la *méthode de réciprocité* qui utilise trois microphones tour à tour comme détecteurs et émetteurs sonores.

A partir du moment où l'on dispose d'un instrument calibré en pression, de nombreuses mesures peuvent être effectuées. Tout d'abord des mesures de bruit ou d'intensité. Pour cela, on se fixe le domaine de fréquence à analyser, par exemple le domaine sensible de l'oreille humaine, et l'on mesure l'intensité ou la pression sonore dans cette bande de fréquence. On peut améliorer la mesure en tenant compte, d'une part des courbes de sensibilité de l'oreille humaine en fonction de la fréquence, d'autre part des effets de masque. Enfin on peut faire une analyse très complète en déterminant le spectre du bruit à étudier. Cette information est la plus riche.

Sur la *figure* 61, on voit le spectre en fréquence d'une perceuse à percussion en pleine action dans le béton. On constate sur cet exemple des maximums de bruit à 12 150 Hz, 17 620 Hz et 17 960 Hz.

Dans un autre type de mesure, on désire caractériser soit des microphones, soit des haut-parleurs. On se place alors dans une chambre isolée des bruits extérieurs par des parois très absorbantes. Une telle chambre est appelée *chambre sourde* ou *chambre anéchoïde.*

Caractérisation d'un microphone

Pour déterminer la *réponse en fréquence* d'un microphone, on réalise le montage décrit sur la *figure* 62. Un oscillateur balayé en fréquence synchronise le déroulement du papier d'un enregistreur. Le signal issu de l'oscillateur est amplifié et alimente un haut-parleur situé dans la chambre sourde. Le microphone à tester est placé dans l'axe du haut-parleur et est relié à un amplificateur de mesure. La tension de sortie de cet amplificateur est enregistrée. Afin d'éliminer les défauts du haut-parleur ou d'autres éléments du système, un microphone de mesure (microphone de référence) est placé à proximité immédiate du microphone à tester. Il est relié à un second amplificateur de mesure dont la tension de sortie devrait être constante (si la pression acoustique au niveau des microphones était constante). Au cas où cette tension varierait en fonction de la fréquence, un système d'asservissement modifie le gain de l'amplificateur de puissance qui ali-

mente le haut-parleur, afin de ramener la tension issue du microphone de référence à la valeur préétablie correspondant à la pression à laquelle on désire faire la mesure. C'est en utilisant de tels systèmes que les courbes présentées au chapitre sur les microphones ont été réalisées.

Pour mesurer les *caractéristiques de directivité* des microphones, on utilise un montage similaire, mais au lieu de balayer la fréquence de l'oscillateur, on fixe cette dernière à une valeur déterminée, et l'on fait tourner de 360° le support du microphone à étudier. Cette rotation est synchronisée avec la rotation d'un disque de papier sur l'enregistreur.

De très nombreuses autres mesures peuvent être effectuées, par exemple, l'absorption acoustique de matières diverses en fonction de la fréquence, etc. Nous ne les citerons pas.

Le domaine des mesures en acoustique, bien qu'il soit déjà ancien, est en ouverture permanente. L'amélioration des conditions d'enregistrement et de reproduction des sons, et de la musique en particulier, la prise de conscience des problèmes de pollution par le bruit, voici simplement deux facteurs qui feront que les mesures acoustiques seront sans doute l'objet, dans les années qui viennent, d'un développement important.

Acoustique architecturale

Nous avons déjà vu qu'au Ier siècle avant J.-C., Marcus Vitruvius Pollio avait écrit un long traité d'architecture dans lequel il s'intéressait particulièrement à l'acoustique architecturale. Ce n'est en fait qu'au début du XXe siècle que W. C. Sabine donna à cette branche de l'acoustique ses lettres de noblesse. Il mit au point un ensemble de méthodes de mesure de l'absorption et de la réflexion des sons et définit un certain nombre de critères permettant de caractériser les qualités acoustiques d'un local.

De manière pratique, les techniciens de l'acoustique sont amenés à étudier, lors de la construction d'édifices, les deux problèmes importants qui sont :

— de réaliser un bon isolement acoustique entre un local et un local voisin ou entre un local et l'extérieur ;

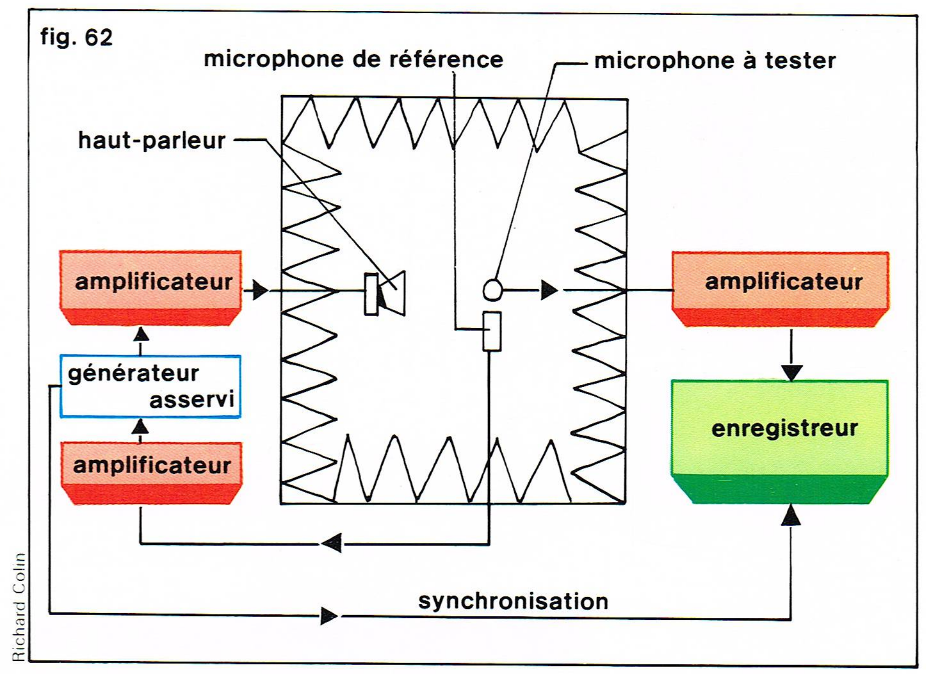
— d'assurer (en particulier pour certains locaux comme les salles de conférences, les amphithéâtres, les auditoriums, les salles de théâtre et de cinéma) une diffusion uniforme du son en tous les points du local.

Problème de l'isolement acoustique

Ce premier problème devrait être facilement résolu si les constructeurs avaient toujours présentes à l'esprit quelques lois élémentaires de l'acoustique, en particulier que, l'atténuation du son étant faible dans un milieu élastique de faible épaisseur (cloison mince par exemple), il est souhaitable d'interposer entre des matériaux durs qui transmettent bien le son (indispensables à la rigidité du local) des matériaux qui absorbent fortement le son comme le feutre ou le polystyrène expansé.

C'est le principe de la *dalle flottante :* pour isoler acoustiquement un local du local situé au-dessus de lui, on peut procéder de la manière suivante : au-dessus du plafond en béton, on met une couche de feutre ou de polystyrène expansé qui arrête les vibrations (cette technique n'est toutefois réellement efficace que si les tuyaux qui passent à travers cette couche sont également isolés de façon à les empêcher de transmettre les vibrations). Au-dessus de cette couche absorbante se trouve une dalle de béton dite pour cette raison dalle flottante, qui constitue la base du local supérieur.

En ce qui concerne les parois divisant un local, elles devraient être construites en briques pleines ou perforées dans les fentes desquelles on aurait placé un matériau fortement absorbant pour empêcher la propagation du son. On peut aussi obtenir un bon isolement avec des tapisseries et plus particulièrement avec des tentures en tissu non directement posées sur les murs. On peut également fixer aux parois des dalles de matériaux spéciaux (fibreux ou poreux) de quelques millimètres d'épaisseur. Dans certaines habitations luxueuses, les parois de séparation sont doubles, et, dans les vides de quelques centimètres d'épaisseur, on verse des substances granuleuses peu élastiques comme du sable. Dans d'autres cas, les parois sont doublées avec du cuir ou des déchets de laine et de coton, comme on le voit dans des cabines téléphoniques ou sur les portes de salles de cinéma ou de théâtre. Récemment, les progrès de la chimie ont permis la production de résines particulières dotées d'un fort pouvoir d'absorption du son.



▲ *Figure 62 : schéma d'un dispositif de mesure de la réponse en fréquence d'un microphone.*

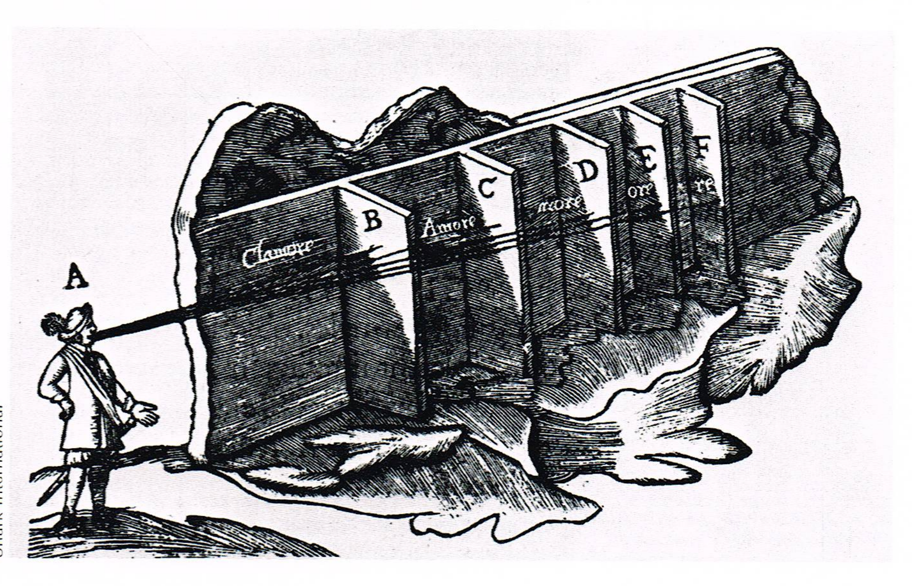
Problème de la diffusion uniforme du son

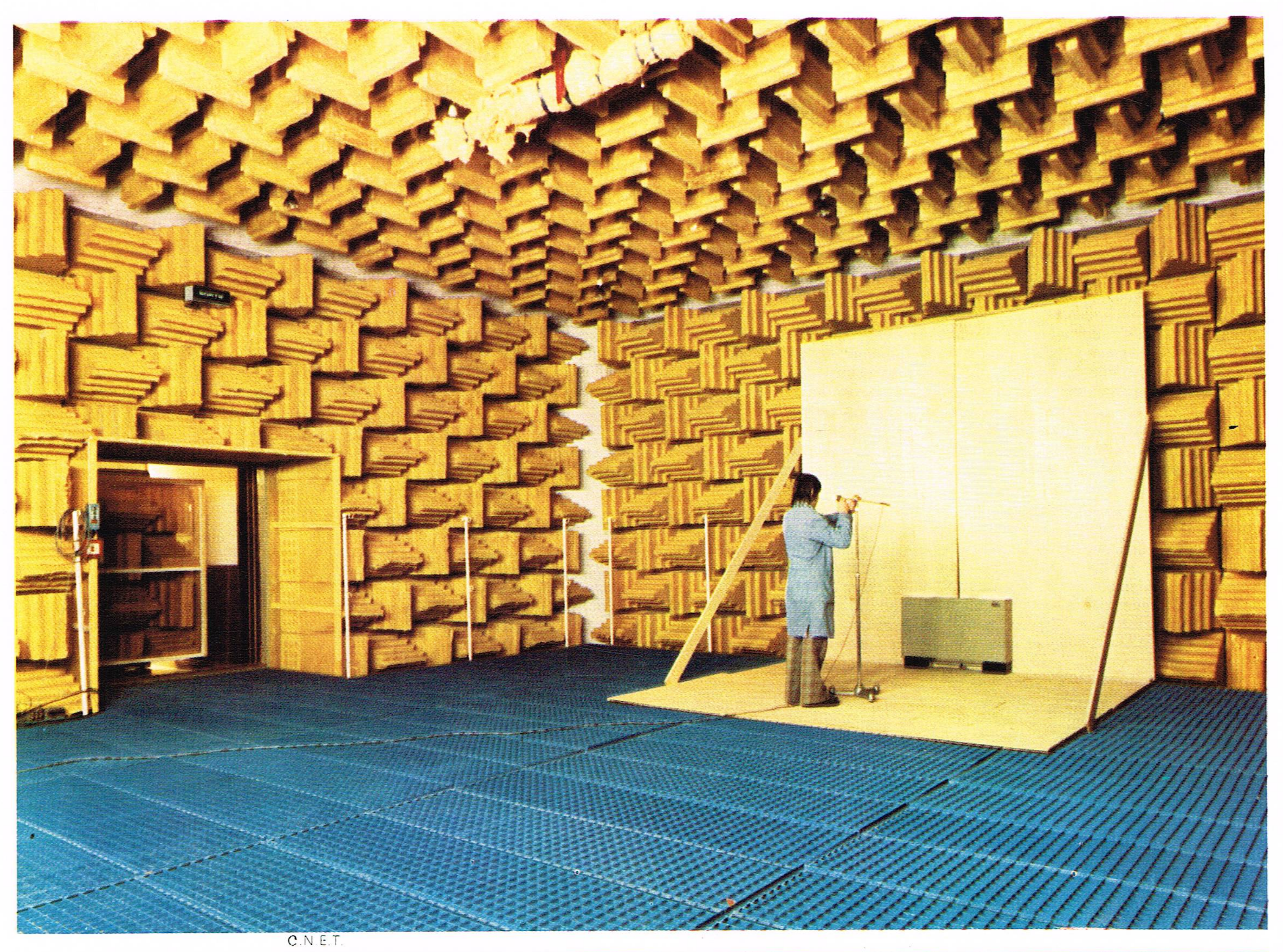
Ce problème est bien plus délicat et demande une étude approfondie des différents facteurs entrant en jeu. Les propriétés acoustiques d'un local sont en fait déterminées par les réflexions des ondes sonores sur les murs, le plafond, le plancher, les meubles et les spectateurs présents dans le local. La diffusion uniforme du son demande en premier lieu que le local ait une forme opportune. Le paramètre dont dépend la sonorité d'un local est le *temps de réverbération* τ défini comme l'intervalle de temps nécessaire pour qu'un son de fréquence donnée voie son intensité réduite de 60 dB après diverses réflexions. Si dans le local l'absorption est grande, τ est très petit, le son est perçu avec difficulté, et on parle de *local sourd ou anéchoïde ;* si l'absorption est faible, τ est très grand, et on a le pénible phénomène de réverbération. Une formule empirique pour l'évaluation de τ en fonction des paramètres du local est :

$$\tau = \frac{0{,}161\ V}{(S\alpha + 4\ mV)}$$

où V est le volume du local en m^3, S la surface totale exposée au son en m^2 et m et α respectivement les coefficients moyens d'absorption du son par l'air et par les matériaux

▼ *Gravure ancienne de l'expérience permettant d'établir les lois de l'acoustique dans les grandes pièces (Bibliothèque nationale).*





C.N.E.T.

▲ *Chambre anéchoïde du Centre national d'étude des télécommunications à Lannion.*

▶ *Tableau V : coefficient d'absorption du son pour quelques matériaux.*

Tableau V
Coefficient d'absorption du son pour quelques matériaux

Matériaux	Coefficient α à					
	128 Hz	256 Hz	512 Hz	1 024 Hz	2 048 Hz	4 096 Hz
Linoléum sur béton	0,02		0,03		0,04	
Moquette de 8 mm sur feutre de 3 mm	0,11	0,14	0,37	0,43	0,27	0,25
Moquette caoutchoutée de 5 mm sur béton	0,04	0,04	0,08	0,12	0,03	0,10
Draperies de velours	0,05	0,12	0,35	0,45	0,38	0,36
Mêmes draperies sur surface moitié	0,14	0,35	0,55	0,72	0,70	0,65
Dalles de liège de 20 mm	0,08	0,02	0,08	0,19	0,21	0,22
Les mêmes dalles, cirées et polies	0,04	0,03	0,05	0,11	0,07	0,02
Mur de brique de 45 cm	0,02	0,02	0,03	0,04	0,05	0,07
Le même mur, peint	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02
Verre	0,03		0,03		0,03	
Marbre	0,01		0,01		0,01	
Sable sec sur 10 cm	0,15	0,35	0,40	0,50	0,55	0,80
Eau	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02
Bois de pin sur 20 mm	0,10	0,11	0,10	0,08	0,08	0,11
Laine de verre sur 25 mm	0,25	0,40	0,70	0,90	0,80	

présents, coefficients définis comme le rapport entre l'énergie sonore absorbée et celle reçue. τ est exprimé en secondes. Pour des locaux de dimensions moyennes (jusqu'à 10 000 m^3) et pour des fréquences inférieures à 2 000 Hz, le terme en *m* est négligeable, et la formule précédente devient :

$$\tau = \frac{0{,}161\ V}{S\alpha}$$

Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur des coefficients d'absorption de différents matériaux à diverses fréquences, on peut consulter le *tableau* V.

Comme on peut le voir d'après ce tableau, le coefficient d'absorption dépend sensiblement de la fréquence du son et augmente avec elle pour presque tous les matériaux, et donc le temps de réverbération τ diminue lorsque la fréquence augmente. Comme, durant une conférence ou un concert symphonique, les fréquences en jeu sont nombreuses, il est pratique de donner les valeurs de α et donc de τ à une fréquence moyenne choisie habituellement autour de 2 000 Hz. Pour obtenir une bonne audition, il est souhaitable que τ soit compris entre 1 et 3 s. En général, le temps de réverbération d'un local est naturellement trop grand, ce qui produit de désagréables queues sonores, qu'on peut diminuer en dotant le local de tapis, draps et tentures, et en escomptant aussi le pouvoir absorbant du public.

Compte tenu des grandes différences de valeurs de α pour différents matériaux, la relation qui donne τ devient très imprécise lorsqu'il y a plusieurs matériaux d'absorption acoustique différente dans le local. C'est pour cela qu'on préfère calculer le produit $S\alpha$ pour chaque matériau, faire la somme des différents produits, et donc écrire :

$$\tau = \frac{0{,}161\ V}{\sum_i S_i \alpha_i}$$

où S_i est la surface exposée au son du matériau ayant pour coefficient d'absorption α_i. La somme est étendue aux *n* types de matériaux présents dans la salle.

Enregistrement et reproduction des sons

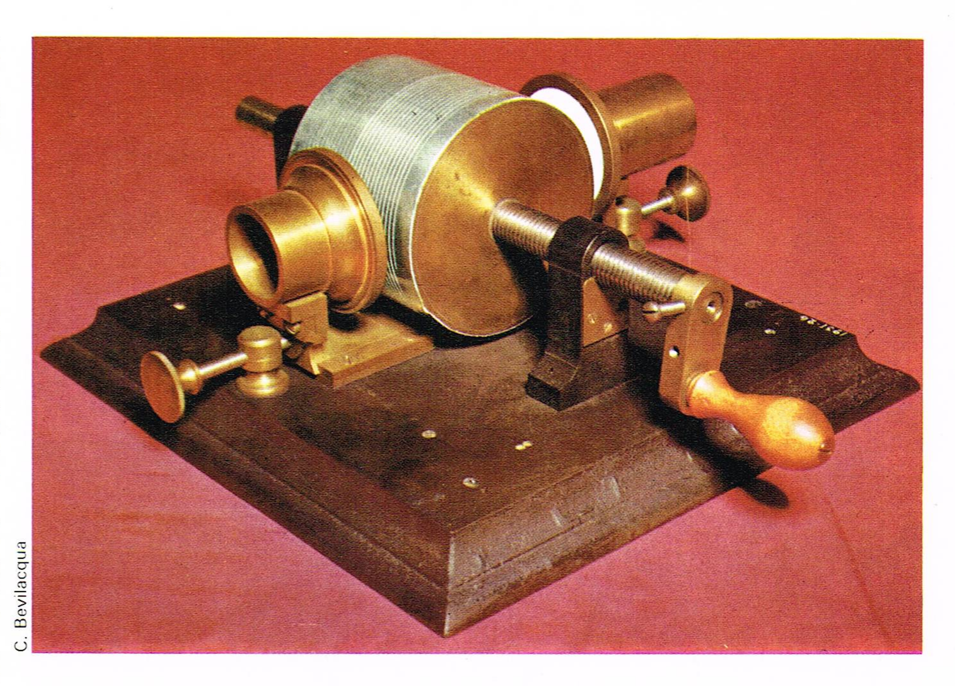
Nous avons vu qu'un phénomène sonore résulte de la propagation, sous forme d'ondes longitudinales, d'une altération (pression acoustique) de la pression préexistante. L'enregistrement du son est la technique grâce à laquelle la variation de la pression acoustique en fonction du temps est transcrite sur un support. Par exemple, la pression acoustique peut être transformée en une « trace », mécanique ou magnétique dans les deux types d'enregistrement les plus importants, alors que le temps est transformé en une dimension caractéristique du support mobile, longueur du sillon du disque ou longueur du ruban magnétique.

Dans la reproduction, le son est émis par lecture du support porteur de l'information. La coordonnée d'espace du support le long de laquelle est distribué l'enregistrement redevient coordonnée de temps du phénomène sonore.

Enregistrement mécanique

Nous avons déjà vu comment le phonautographe de Scott, puis, en 1877, le phonographe d'Edison utilisaient un diaphragme pour assurer l'adaptation des impédances entre l'air en vibration et un stylet enregistreur ou lecteur. Dans le phonographe d'Edison, un système d'horlogerie maintenait en mouvement de rotation uniforme un tambour cylindrique recouvert de cire sur laquelle l'extrémité en saphir du stylet enregistreur s'enfonçait plus ou moins selon que le diaphragme était soumis à une surpression ou à une sous-pression. Le mouvement se traduisait ainsi par un sillon profond et large pour les surpressions. Un tel dispositif transforme la modulation de la pression de l'air en une modulation de profondeur et de largeur du sillon. Pour la reproduction, on fait tourner le cylindre dans le même sens, et c'est le diaphragme qui est entraîné par la pointe de saphir et qui, ainsi, réémet le son.

Après Edison, les progrès sont rapides ; d'abord l'utilisation d'un cornet acoustique permet d'améliorer le couplage entre l'air et le diaphragme et d'augmenter l'intensité du son, puis en 1897, avec Berliner, on passe du tambour cylindrique au disque avec un sillon en spirale modulé en profondeur ; on peut ainsi reproduire des disques par un procédé galvanoplastique dont le principe est le même que celui utilisé actuellement.



C. Bevilacqua

▲ ***Le phonographe d'Edison (Musée britannique des sciences, Londres).***

Après la Première Guerre mondiale, le développement de l'électronique permet de découpler la fonction prise de son de la fonction gravure, en interposant entre les deux une chaîne d'amplification électronique. Cela permet d'optimiser la prise de son en utilisant des microphones de haute performance (microphones à condensateur) et d'optimiser la fonction gravure par des dispositifs électromécaniques appropriés. Vers 1920, la forme du sillon évolue : d'une modulation en profondeur on passe à une modulation en largeur. En ce qui concerne la reproduction du son, l'électrophone apparaît : il est composé d'une table de lecture, sur laquelle tourne le disque, d'une tête de lecture (qui transforme la modulation de dimension du sillon en modulation d'une tension électrique), d'une chaîne d'amplification électronique et de haut-parleurs.

Dans les techniques actuelles d'enregistrement, on utilise en général des enregistrements intermédiaires, magnétiques. La gravure sur le disque ne se fait qu'après dosage des divers signaux fournis par l'enregistrement sur bande magnétique. Cela permet de contrôler l'enregistrement, et éventuellement de le corriger.

Le dispositif fondamental pour la reproduction est la tête de lecture constituée d'une pointe (de saphir ou de diamant) reliée à un transducteur, qui transforme la vibration mécanique de la pointe en variation d'un signal électrique. Les transducteurs utilisent les mêmes principes que ceux décrits pour les microphones ; les plus utilisés sont de type *piézo-électrique* (cristal ou céramique), à *bobine mobile*, à *fer mobile* et à *électret*. La tension électrique ou le courant fourni par la tête de lecture est amplifié par un préamplificateur, puis par un amplificateur de puissance qui alimente le haut-parleur.

Afin d'améliorer les caractéristiques des sons produits, on doit satisfaire les critères de réponse en fréquence déjà considérés lors de l'étude des transducteurs.

Il est également nécessaire que les distorsions (non-linéarités) soient très faibles, car elles peuvent se traduire par une altération du timbre (production de parasites). Le bruit de fond d'origine électrique ou mécanique doit aussi être minimisé ; c'est cette considération qui a conduit à la recherche de matériaux très peu granuleux pour la fabrication des disques. Cela a permis de passer d'une vitesse de rotation de 75 tours par minute à des vitesses plus lentes de 33 tours 1/3 ou 16 tours 2/3 par minute avec une augmentation correspondante de la durée de l'enregistrement.

Bien que les améliorations techniques diverses aient permis d'atteindre des vitesses de rotation de disques aussi basses que 16 tours 2/3 par minute, on conserve les vitesses de rotation de 45 et 33 tours par minute pour la haute fidélité.


Kerdiles - Rapho

▲ ***Pupitre de commande d'un studio d'enregistrement de Radio Monte-Carlo.***

▼ ***Un acousticien du début du siècle recueillant les cris d'une marchande d'asperges dans un phonographe muni d'un cornet acoustique.***


Boyer - Viollet

La fabrication actuelle des disques commerciaux s'effectue à partir du disque original, en aluminium recouvert de matière plastique, obtenu à partir de l'enregistrement magnétique, par un procédé galvanoplastique. On obtient une deuxième copie métallique positive de ce disque (c'est-à-dire telle que les reliefs sont transformés en creux) à partir de laquelle sont fabriquées les matrices définitives utilisées pour l'impression des disques commerciaux.

Enregistrement magnétique

La technique d'enregistrement magnétique prit naissance, en 1892, avec les travaux de W. Poulsen, mais c'est seulement en 1930 que l'Allemand Stille donna à l'enregistrement sa conception actuelle ; le support mobile était un ruban d'acier qui se déroulait à partir d'une bobine débitrice et qui se réenroulait sur une bobine réceptrice passant, lors de la partie rectiligne du trajet, à proximité de trois têtes (d'effacement, d'enregistrement et de reproduction). En 1931, on passa au ruban de cellulose (F. Pfeumer) ; en 1941, on introduisit le principe de l'effacement et de la préaimantation (ou polarisation) haute fréquence (M. Camras et D. E. Woobridge).

Actuellement, on utilise fréquemment comme support mobile un ruban de téréphtalate de polyéthylène (mylar) recouvert sur une face de matériau magnétique.

Pour clarifier les problèmes relatifs à l'enregistrement magnétique, considérons le cas du *son pur* et donc d'un courant sinusoïdal susceptible de créer une aimantation le long du ruban. Au cours de l'enregistrement, on a une aimantation qui suit la même loi que le courant, c'est-à-dire qui change de sens chaque fois que le courant s'annule ; on obtient ainsi une succession de régions assimilables à des aimants élémentaires de sens alternés avec une périodicité égale à $v\,f$ (v est la vitesse du ruban, f la fréquence du son) et une aimantation, fonction croissante du courant. Au cours de la reproduction du son, la variation d'aimantation crée une variation du flux dans le circuit magnétique de la tête de reproduction, donc une force électromotrice induite et une tension aux bornes de la bobine. Ce signal, convenablement amplifié, peut être envoyé sur un haut-parleur qui reproduit le son pur d'origine. Si le son d'origine n'est pas un son pur, le phénomène est analogue et résulte de la superposition de sons purs.

Le fait que la longueur des aimants élémentaires augmente avec la vitesse et diminue avec la fréquence fait que la fidélité de l'enregistrement croît avec la vitesse, mis à part quelques phénomènes de distorsion ; les vitesses normalement utilisées sont : 4,75, 9,5, 19 et 38 pouces/mn (cette unité pratique, pouce/mn, est couramment utilisée).

Dans l'enregistrement magnétique, le problème de la fidélité est rendu difficile, du fait que le processus décrit est non linéaire : l'aimantation résiduelle des grains d'oxyde de fer n'est pas proportionnelle au courant d'aimantation. La solution adoptée pour résoudre ce problème est celle de la *polarisation* ou *préaimantation*. Au courant correspondant au signal à enregistrer, on ajoute soit le courant haute fréquence utilisé pour l'effacement, soit un courant continu de façon que l'aimantation soit déplacée vers la zone centrale de la courbe d'aimantation où la linéarité est bien meilleure ; on réduit ainsi de beaucoup la distorsion harmonique.

Le magnétophone

De ce qui vient d'être dit, on peut prévoir quels seront les éléments principaux d'un magnétophone. On trouve tout d'abord deux bobines : la *bobine débitrice* qui contient le ruban à enregistrer ou à écouter et la *bobine réceptrice* qui contient le ruban enregistré ou écouté.

Pendant l'enregistrement ou l'écoute, le ruban se déroule devant trois têtes successives (qui sont parfois rassemblées). La première sert à effacer ce qui était éventuellement enregistré et parfois à polariser la bande, la seconde est la tête d'enregistrement et la troisième la tête de lecture. La vitesse de déroulement doit être très régulière pour éviter de créer des modulations parasites de fréquence. Un régime de déroulement rapide est utilisé pour le rembobinage. Dans ce régime, le ruban est écarté des têtes précédemment décrites.

Un magnétophone comprend en outre un oscillateur de fréquence ultrasonore qui fournit le courant d'effacement ou celui de préaimantation, un préamplificateur d'enre-

gistrement qui sert à adapter les impédances électriques entre les dispositifs fournissant le signal à enregistrer et les têtes d'enregistrement, un indicateur électronique de niveau qui sert à contrôler les niveaux d'enregistrement et de reproduction afin de les maintenir entre des limites données. Des préamplificateurs de lecture sont incorporés à l'appareil qui comprend parfois en outre des amplificateurs de puissance et des haut-parleurs.

Stéréophonie

La stéréophonie est une technique de reproduction ou de diffusion des sons qui a pour but de donner à l'auditeur la sensation que produiraient les sources sonores d'origine.

Il faudrait théoriquement un grand nombre de microphones distribués dans l'espace à proximité des sources, reliés à des appareils d'enregistrement et de reproduction connectés chacun à des haut-parleurs dont les positions correspondraient à celles des microphones. En pratique, une reproduction très améliorée est produite avec seulement deux canaux. Deux microphones recueillent les sons provenant principalement pour l'un de la zone gauche de l'ensemble des sources, et pour l'autre de la zone droite. Lors de la reproduction, les signaux électriques alimentent deux haut-parleurs situés à distance convenable (de 2 à 4 m) dans les deux parties différentes de la salle d'écoute, et parfois un troisième haut-parleur central pour les fréquences jusqu'à 300 Hz.

Selon ce critère, il serait suffisant de n'utiliser que deux micros pour la prise de son, mais on obtient des résultats meilleurs, du point de vue musical, en effectuant la prise de son avec davantage de micros et en répartissant entre les canaux les signaux électriques issus de chaque micro, de façon à optimiser l'impression à l'écoute. Pour avoir une reproduction fidèle, il faut que les deux canaux soient les plus semblables possible avec la même courbe de réponse. L'insertion des deux canaux d'enregistrement a posé des problèmes plus difficiles à résoudre dans le cas de l'enregistrement sur disque que dans le cas de l'enregistrement magnétique.

Dans le cas du disque, il s'agit en fait de recueillir les signaux provenant des deux canaux avec une parfaite simultanéité, ce qui revient à enregistrer en même temps les deux signaux sur un disque unique. Les premiers disques stéréophoniques avaient deux sillons indépendants juxtaposés qu'il fallait utiliser avec deux pointes juxtaposées. On était ensuite passé à un sillon unique avec deux gravures à 90°, une en profondeur et l'autre latérale correspondant chacune à un canal. La pointe recevait ainsi des sollicitations mécaniques dans les deux directions et se déplaçait donc selon la résultante des deux ; la tête de lecture possédait des organes sensibles aux composantes du mouvement selon les deux directions. Comme on ne réussissait pas à rendre identiques les caractéristiques des deux canaux à cause de la différence des systèmes mécaniques, on est passé actuellement au système dit 45/45 ; chacun des deux canaux est gravé par déviation latérale à 45° de part et d'autre des deux parois du sillon de façon que le sillon présente ses deux parois ondulées de façon différente.

Dans le mode d'enregistrement magnétique, la stéréophonie pose des problèmes plus faciles à résoudre. Les magnétophones stéréophoniques sont en fait à deux pistes parallèles avec un seul ruban magnétique ; les deux pistes sont enregistrées et reproduites simultanément mais séparément, chacune ayant son propre appareil d'enregistrement et de reproduction indépendant.

Les techniques d'enregistrement et de reproduction des sons sont en constante progression. Outre les progrès de l'électronique et de la mécanique, un nombre plus grand de canaux est parfois utilisé (quadriphonie).

Les infrasons

Les ondes infrasoniques sont les ondes de fréquences plus faibles que la limite inférieure d'audibilité, c'est-à-dire d'environ 20 Hz. Ces ondes sont susceptibles de se propager à des distances considérables de leur point de formation (milliers de kilomètres dans l'atmosphère). La vitesse de ces ondes est la même que celle des ondes acoustiques, mais, compte tenu de leur fréquence très basse, on les décrit en général par leur longueur d'onde ; ainsi une onde de 0,1 Hz a une longueur d'onde dans l'air de 3 400 m. Il est intéressant de noter que la modulation de pression associée à ces ondes dans l'atmosphère est en général nettement plus faible que les variations de pression purement climatiques dues aux vents et turbulences de l'air. Néanmoins, le caractère périodique et régulier des infrasons les rend faciles à reconnaître : il suffit pour cela d'avoir plusieurs détecteurs suffisamment éloignés les uns des autres pour ne pas être soumis aux mêmes turbulences accidentelles. En correlant les signaux issus de ces divers détecteurs, on annule les fluctuations indépendantes les unes des autres alors que les signaux dus à l'onde infrasonique s'ajoutent. Des ondes infrasoniques naturelles existent, produites par des phénomènes géophysiques. Il est intéressant de noter que la couche d'atmosphère comprise entre le sol et une altitude d'environ 50 km où existent des couches chaudes réfléchissantes constitue un véritable piège dans lequel les ondes infrasoniques peuvent se propager. Un certain nombre d'études sont poursuivies actuellement pour essayer de mieux connaître les phénomènes qui leur sont associés.

Les ultrasons

Les ondes ultrasonores sont les ondes de fréquences supérieures à celles du domaine audible. En pratique, elles débutent à environ 20 kHz. La limite supérieure en fréquence de ces ondes est, comme nous le verrons plus loin, constamment repoussée. En pratique, on peut distinguer les ondes de faible amplitude des ondes de forte amplitude dans la mesure où elles conduisent à des applications fondamentalement différentes.

Les *ondes de faible amplitude* sont propagées dans des milieux dans lesquels on cherche une information qui peut être une distance, une information scientifique, technique, médicale, etc. Elles ne modifient pas substantiellement les caractéristiques propres du milieu dans lequel elles se propagent.

Les *ondes de forte amplitude*, au contraire, sont utilisées pour produire des modifications de la matière en exploitant l'énergie importante qui leur est associée. Les applications sont par exemple le soudage, le nettoyage ou le forage par ultrasons. Ce peut être aussi l'accélération de processus chimiques, etc.

C'est Galton qui, en 1883, après avoir mis au point un sifflet (qui porte son nom) capable de produire dans l'air des vibrations de fréquence élevée, utilisa le premier ces ondes pour étudier la réponse en fréquence de l'oreille humaine.

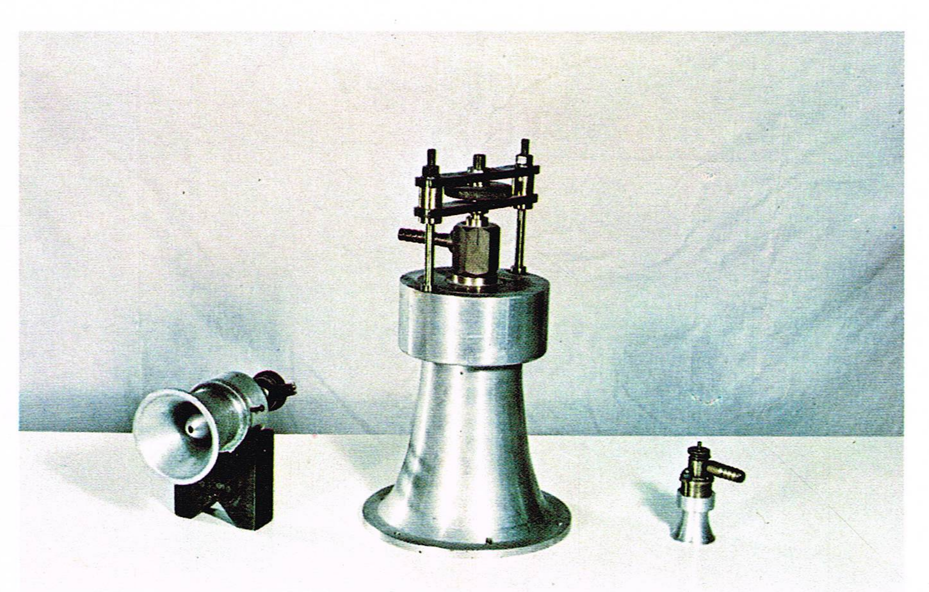
La véritable naissance des ultrasons se situe néanmoins en 1915. Cette année-là, un projet de détection par ultrasons des sous-marins était présenté au ministre de la Marine par un ingénieur russe, Constantin Chilowski. Peu après, Paul Langevin, alors directeur des études de l'École supérieure de physique et de chimie de la ville de Paris, réalise, au laboratoire d'électricité générale de l'École, la première mise en évidence de propagation d'ondes ultrasonores à la fréquence de 40 000 Hz. Assisté de Chilowski et de deux de ses anciens élèves, M. Tournier et F. Holweck, il utilise comme émetteur un transducteur électrostatique (condensateur chantant) et comme détecteur un pendule de torsion.

Peu après, des essais eurent lieu dans la Seine, au pont National. Un an plus tard, Langevin mettait en application l'effet piézo-électrique découvert en 1880 par les frères Pierre et Jacques Curie.

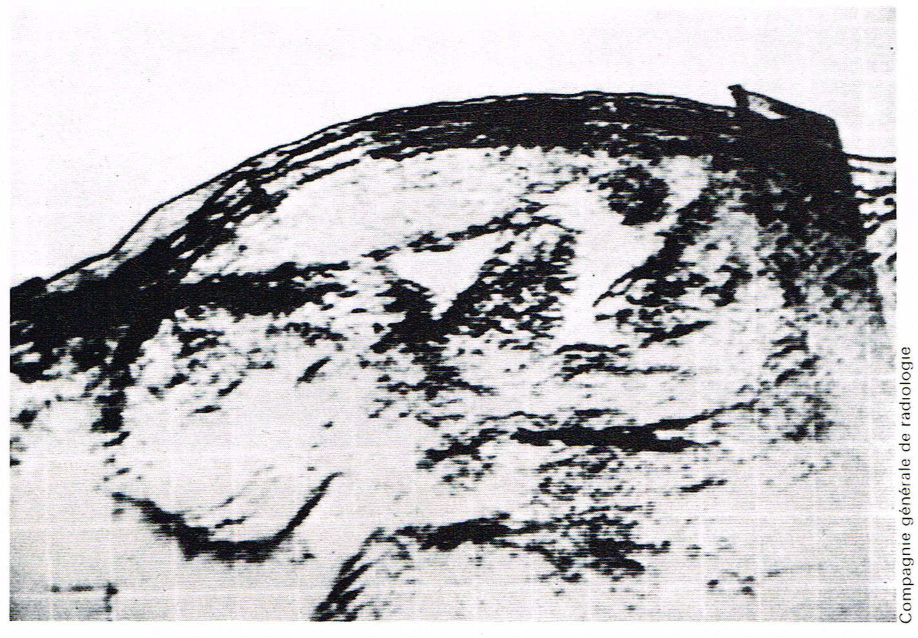
A partir de ces travaux, les recherches et applications dans le domaine des ultrasons devaient connaître un essor irrésistible. En 1925, Pierce met au point un interféromètre à ultrasons utilisant un transducteur en quartz piézo-électrique. Les travaux de Pierce, suivis en 1928 par ceux de Herzfeld et Rice, montrent que l'interaction des ondes ultrasonores et de la matière permet des études des propriétés physiques des matériaux.

En 1932, Lucas et Biquard, en France, et Debye et Sears, aux États-Unis, découvrent simultanément le phénomène de diffraction des ondes lumineuses par le réseau périodique que constitue la succession des nœuds et des ventres de pression associés à une onde stationnaire ultrasonore.

En 1934, Sokolov met au point un dispositif de visualisation à ultrasons et ouvre ainsi le domaine du contrôle non destructif et de l'imagerie acoustique.



Centre national de la recherche scientifique - Laboratoire de mécanique et d'acoustique de Marseille



Compagnie générale de radiologie

▲ *En haut, sifflets Levavasseur, générateurs d'ultrasons. En bas, image d'un fœtus dans le ventre de sa mère réalisée avec un appareillage de visualisations à ultrasons par échographie; on distingue, outre le fœtus, le placenta, en haut.*

Après la Seconde Guerre mondiale, s'inspirant des techniques d'impulsions utilisées en radar, de nombreux chercheurs font évoluer rapidement les domaines d'application des ultrasons. Parallèlement, les fréquences utilisées ne cessent de s'élever.

Actuellement, les ondes ultrasonores sont utilisées dans un très grand nombre de domaines. En recherche fondamentale, afin d'étudier les propriétés de la matière, on la perturbe périodiquement à l'aide d'une onde ultrasonore. Outre les propriétés mécaniques des matériaux étudiés, on peut également obtenir des renseignements sur les propriétés électroniques. C'est ainsi que, grâce à l'utilisation d'ondes ultrasonores, un grand nombre de propriétés électroniques de métaux ont été déterminées (surfaces de Fermi, masses effectives, propriétés supraconductrices). Les ondes ultrasonores permettent également d'obtenir des informations très intéressantes sur les propriétés d'impuretés magnétiques distribuées dans des diélectriques. Dans un système caractérisé par une distribution discrète des énergies, il est possible de modifier les populations relatives des divers niveaux énergétiques par absorption ou émission de quanta d'énergie de vibration, c'est-à-dire de *phonons*. De même, les propriétés thermiques des matériaux, qui sont directement liées à l'existence dans les matériaux de phonons, peuvent être déterminées en étudiant la propagation d'ondes ultrasonores.

En visualisation, les ondes ultrasonores sont très utilisées : supposons que l'on envoie dans un milieu 1 une impulsion ultrasonore courte. Cette impulsion se propage dans le milieu jusqu'à la surface de séparation avec un autre milieu 2. Si les deux milieux ont des impédances acoustiques non égales, une partie de l'énergie est réfléchie et une partie est transmise. On peut donc recueillir un écho ultrasonore dont le retard τ par rapport à l'impulsion d'émission est directement lié à la distance de la surface réfléchissante d et à la vitesse v du son dans le milieu 1 : $\tau = 2\,d/v$.

Cette technique très utilisée permet, par exemple, de détecter des icebergs ou des poissons dans la mer; elle permet de détecter des défauts dans des pièces métalliques; elle permet également de visualiser les surfaces de discontinuité des impédances acoustiques dans le corps humain. Toute une instrumentation a été développée, pour assister les diagnostics médicaux.

Des appareillages d'échographie sont utilisés pour la recherche des kystes et des tumeurs.

De nombreuses techniques de visualisation par ondes ultrasonores sont en cours de développement, utilisant non plus le temps de propagation mais la *phase des ondes (holographie)*.

De nouveaux systèmes apparaîtront certainement au cours des prochaines années, en particulier consécutifs à la mise au point de transducteurs nouveaux (électrets).

Dans l'industrie, les ondes ultrasonores sont très utilisées, pour le soudage, le travail de pièces mécaniques, le nettoyage, l'accélération des réactions chimiques, etc. Nombreux sont les champs auxquels ces techniques peuvent être appliquées, et nombreux seront les développements de ces systèmes dans le futur.

Conclusion

Comme nous avons pu le voir tout au long de ce texte, l'acoustique apparaît comme une discipline à caractère très pluridisciplinaire. Quelle distance sépare l'étude des propriétés électroniques des métaux de la visualisation du fœtus dans le ventre de sa mère! Quelle distance sépare la construction d'une bonne salle d'écoute de la mise au point d'un dispositif de détection sous-marine! Quelle distance entre un appareil de soudage par ultrasons et un dispositif d'affaiblissement des sons ambiants pour l'amélioration de la qualité de la vie! Et pourtant ce sont toujours les mêmes lois fondamentales qui sont utilisées : les règles qui régissent la propagation de perturbations périodiques, l'application de conditions aux limites particulières aux interfaces, les phénomènes d'interférence, d'adaptation d'impédances, etc.

L'acoustique est probablement l'une des sciences les plus anciennes que nous connaissions; c'est également l'une de celles qui ont actuellement une vie très active. Il suffit pour s'en convaincre de voir le nombre de centres de recherches, le nombre de publications, le nombre d'industries qui lui sont consacrés dans le monde.

BIBLIOGRAPHIE

BERANEK L. L., *Acoustic Measurements,* John Wiley and Sons Inc., New York. - BIQUARD P., *Paul Langevin scientifique, éducateur, citoyen,* éditions Seghers, Paris. — BLITZ J., *Fundamentals of Ultrasonics,* Butterworths, London. — CADY W. G., *Piezoelectricity,* Mc. Graw Hill, New York. — CRAWFORD F. S. Jr., *Berkeley Physics Course,* Mc. Graw Hill Book Company, New York. — DIEULESAINT E. et ROYER D., *Ondes élastiques dans les solides (applications au traitement du signal),* Masson, Paris. — GAYFORD M. L., *Electroacoustics,* Newnes-Butterworths, London. — HUNT F. V., *Electroacoustics,* Wiley, New York. — LEHMANN R., *les Transducteurs électro et électromécaniques, haut-parleurs et microphones,* éditions Chiron, Paris. — LEIPP E., *Acoustique et musique,* Masson, Paris. — LINDSAY R. B., *Acoustics, Historical and Philosophical Development,* Dowden, Hutchinson and Ross Inc., Straudsburg PA. — LUCAS R., *Acoustique,* éditions scientifiques Claude Bernard, Paris. — MASON W. P., *Physical Acoustics,* Van Nostrand, New York. — OLSON H. F., *Acoustical Engineering,* Van Nostrand, New York. — RAYLEIGH lord, *Theory of Sound,* Dover Publications, New York. — SABINE W. C., *Collected Papers on Acoustics,* Harvard University Press. — STEPHENS R. W. B. et BATES A. E., *Acoustics and Vibrational Physics,* Edward Arnold Publishers Ltd., London.



R.G. Everts - Rapho

▲ ***Météore en forme d'arc présentant les couleurs du spectre, l'arc-en-ciel résulte de la réfraction et de la réflexion des rayons du Soleil dans les gouttes d'eau.***

OPTIQUE

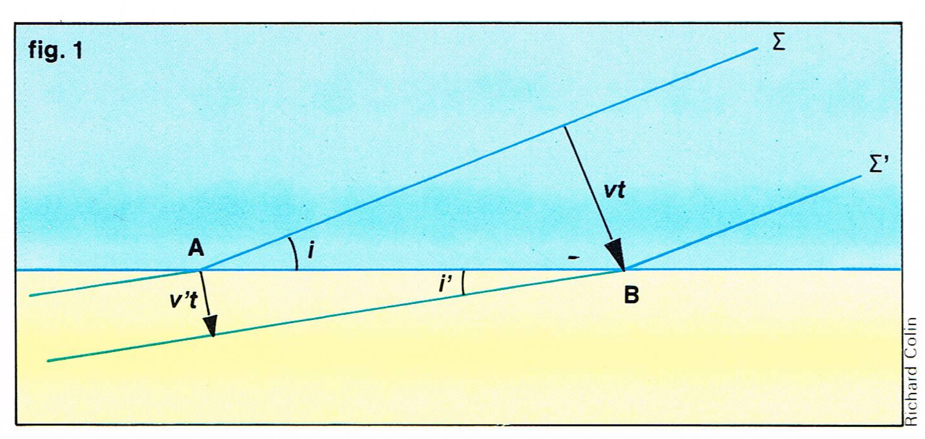
L'optique est la partie de la physique qui étudie la lumière. Ses résultats s'appliquent en fait à l'ensemble des radiations électromagnétiques. On distingue traditionnellement l'optique géométrique, qui concerne la propagation, la réflexion et la réfraction de la lumière, et l'optique physique, qui concerne les phénomènes d'interférence, de diffraction et de polarisation. Il faut y ajouter l'étude des interactions rayonnement-matière et les résultats modernes d'optique cohérente et d'émission stimulée. La théorie de la relativité, qui est fondée sur le fait que la vitesse de la lumière dans le vide est une constante universelle, est quelquefois rattachée à l'optique.

Nature de la lumière

Les idées des philosophes grecs anciens et arabes furent mises en forme pour la première fois par *Descartes* dans son traité *Dioptrique* en 1637. Il supposait que tout corps lumineux envoyait dans toutes les directions une multitude de corpuscules extrêmement petits et animés d'une très grande vitesse. Ceux-ci se propageaient en ligne droite et rebondissaient sur les obstacles qu'ils rencontraient. On expliquait ainsi la réflexion de la lumière par un processus de choc mécanique, ce qui rendait bien compte des faits expérimentaux. Pour expliquer la réfraction, Descartes était obligé d'admettre que les corpuscules, en pénétrant dans un milieu transparent d'indice plus élevé que celui qu'ils quittaient, voyaient leur vitesse augmenter. Cette idée pouvait se justifier si les milieux d'indice élevé, c'est-à-dire en général les milieux denses, exerçaient une attraction sur les grains lumineux. La théorie corpusculaire fut soutenue par Newton, qui dut la compliquer pour expliquer les phénomènes nouvellement découverts de dispersion et de coloration des lames minces.

Parallèlement à cette théorie, une autre école élaborait l'hypothèse de la nature ondulatoire de la lumière. On savait depuis l'Antiquité que le son était produit par la vibration de milieux matériels. Par analogie avec l'acoustique, on pouvait supposer que la lumière était un mouvement oscillatoire d'un milieu matériel. Cette hypothèse fut énoncée pour la première fois par *Grimaldi,* qui découvrit la diffraction ; la théorie fut reprise par *Huygens,* dans son *Traité de la lumière* (1690).

Elle fut complétée par *Bernoulli* et *Euler* qui supposèrent que la fréquence de la vibration était liée à la couleur : cela expliquait la dispersion. La théorie était capable d'expliquer à la fois les phénomènes purement ondulatoires comme la diffraction et les interférences, et les lois de l'optique géométrique, réflexion et réfraction. Pour cette dernière, il suffit d'admettre que la vitesse de la lumière dans un milieu est inversement proportionnelle à l'indice (*fig.* 1). Huygens, par analogie avec la



▲ *Figure 1 ; une onde plane rencontre la surface de séparation* **AB** *de deux milieux : dans le premier, la vitesse de la lumière est v, dans le second, v'. La surface d'onde Σ arrive au bout du temps t en Σ' ; elle a parcouru dans les deux milieux, respectivement, les distances vt et v't. On en déduit la relation entre les angles* sin *i* = *n* sin *i'*, *qui n'est autre que la loi de la réfraction, qui définit l'indice* $n = \frac{v}{v'}$ *du deuxième milieu par rapport au premier.*

propagation du son dans les gaz, avait supposé que la lumière était une vibration longitudinale d'un milieu hypothétique, appelé éther.

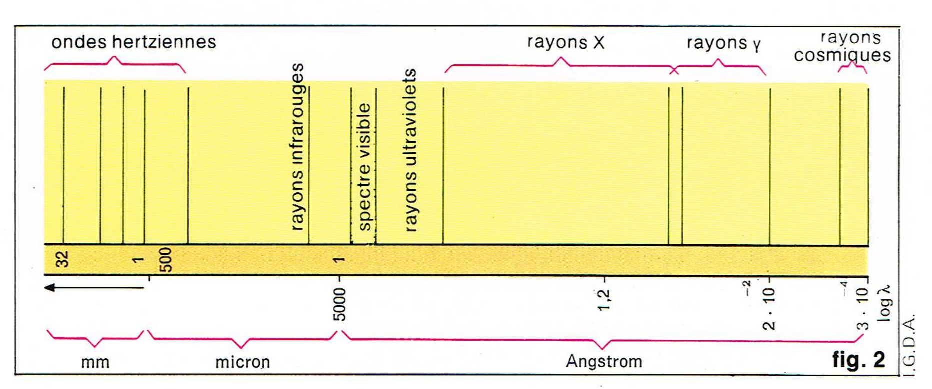
Fresnel apporta une modification en montrant que la vibration était transversale, ce qui impliquait qu'on pût la polariser. La lumière naturelle n'étant pas polarisée, le phénomène était resté inaperçu avant sa découverte par *Malus*. La plus grande difficulté restait le support lui-même, c'est-à-dire ce mystérieux éther, dont les propriétés étaient passablement contradictoires : il devait remplir le vide (puisque la lumière se propage dans le vide) et n'opposer aucune résistance au mouvement des corps matériels ; il devait être cependant très élastique, puisque la vitesse de la lumière est très élevée.

La solution fut trouvée par *Maxwell*, qui synthétisa dans ses équations (1865) toutes les découvertes d'électromagnétisme du XIXe siècle. La lumière est bien un phénomène vibratoire, mais aucun milieu matériel n'est nécessaire à sa propagation ; c'est une action électrique et magnétique qui se déplace dans le vide à une vitesse *c*, fixée par la théorie de l'électromagnétisme. Les champs électrique et magnétique varient sinusoïdalement avec une fréquence ν. Ils sont dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation et perpendiculaires entre eux. On définit, comme pour toute vibration, une période T et une longueur d'onde λ, la fréquence, la période et la longueur d'onde étant respectivement le nombre d'oscillations par seconde, la durée d'une oscillation et la distance parcourue pendant celle-ci. On a alors les relations suivantes $T = 1/\nu$ et $\lambda = cT$. Les longueurs d'ondes lumineuses sont comprises entre $4\,000 \cdot 10^{-8}$ et $7\,500 \cdot 10^{-8}$ cm (10^{-8} cm = 1 angström). Notre œil peut discerner les diverses fréquences qui lui apparaissent comme différentes couleurs. L'ordre des longueurs d'onde décroissantes est rouge, orange, jaune, vert, bleu, violet. Les radiations infrarouge et ultraviolette ne présentent pas de différence fondamentale, sinon que notre vue ne les perçoit pas.

Ces premières vérifications expérimentales de la théorie de Maxwell furent faites par *Hertz*, qui découvrit ainsi les ondes hertziennes ; il vérifia qu'elles avaient toutes les propriétés optiques des ondes lumineuses, tout en prouvant qu'il s'agissait d'ondes électromagnétiques. Leur longueur d'onde est supérieure à celle des infrarouges et peut aller jusqu'à plusieurs kilomètres.

De nouvelles découvertes allaient enrichir le tableau des ondes électromagnétiques pour aboutir au spectre représenté *figure* 2. *Roentgen* découvrit les rayons X en bombardant un métal par des électrons de haute énergie, puis les Curie isolaient les rayons γ parmi tous les types de rayonnements produits par la radio-activité. On voit sur la *figure* 2 que le spectre de la lumière visible représente une bande très étroite dans l'ensemble des radiations électromagnétiques. Au XXe siècle, l'étude des propriétés du corps noir, puis de l'interaction matière-rayonnement, a révolutionné les idées sur la lumière, comme sur l'ensemble de la physique d'ailleurs. La mécanique quantique nous a appris qu'à toute particule est associée une onde dont l'intensité est égale à la probabilité de présence de cette particule. En optique, apparaît une nouvelle notion, celle de photon, introduite par *Einstein* (1906). Le photon est un corpuscule de lumière, un peu au sens de Descartes, possédant une énergie $E = h\nu$ et une quantité de mouvement $P = E/c$ (*h* est la constante de Planck). La mécanique quantique conserve le caractère ondulatoire de la lumière, et la théorie de Maxwell reste utilisable, sauf lorsque l'on considère des échanges d'énergie entre matière et rayonnement. Pour traiter correctement ce problème, il faut faire intervenir à la fois la mécanique quantique et la relativité, c'est-à-dire la théorie quantique des champs. Sur le plan expérimental, c'est l'effet photo-électrique qui a été à l'origine de l'idée de photon. Le phénomène d'émission stimulée, prédit théoriquement par Einstein, a permis la réalisation du maser, puis du laser. La découverte du laser a fait énormément progresser l'optique ces dernières années, une des applications les plus intéressantes étant l'holographie.

▼ *Figure 2 ; spectre des ondes électromagnétiques : en abscisse est portée la longueur d'onde en échelle logarithmique.*



Vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière est une des constantes fondamentales de la nature. C'est la vitesse avec laquelle se propagent toutes les radiations électromagnétiques, quelle que soit leur fréquence ; les équations de Maxwell relient la constante *c* aux constantes des interactions électrique et magnétique ; aucun signal ne peut être transmis à une vitesse supérieure à *c* ; enfin la vitesse de la lumière est la même pour tout observateur galiléen, c'est-à-dire non soumis à une accélération. Ces deux dernières propriétés sont en contradiction avec la mécanique classique et sont à la base de la théorie de la relativité. C'est dire que la mesure de la vitesse de la lumière est d'une grande importance, à la fois théorique et expérimentale. Bien entendu, dans tout ce qui suit, nous parlerons de la vitesse de la lumière dans le vide ; la vitesse de la lumière dans un milieu matériel est toujours plus petite que *c* et égale à *c/n*, où *n* est l'indice de réfraction. En particulier, les mesures de *c* faites dans l'air doivent être corrigées. La valeur numérique la plus récente est *c* = 299 793 km/s.

Cette vitesse très élevée a fait croire pendant longtemps que la lumière se propageait instantanément. *Galilée* avait tenté de la mesurer en plaçant deux observateurs à quelques kilomètres de distance, munis de lanternes. L'un agitait sa lampe au signal de l'autre, qui notait le temps de réponse. Le résultat montrait que *c* était plus grand que tout ce qui était mesurable. La première preuve expérimentale que la vitesse de la lumière n'est pas infinie fut donnée en 1676 par *Rœmer*. Il observa que le mouvement d'Io, le satellite le plus proche de la planète Jupiter, ne suivait pas un horaire régulier. Il y avait une variation dans les périodes des éclipses d'Io par Jupiter. En fait, les périodes réelles sont toutes égales à 42 h 29 mn, mais la lumière met un certain temps pour aller de Jupiter à la Terre. Comme le trajet est variable suivant les positions des deux planètes autour du Soleil, c'est-à-dire suivant la date de la mesure, il en résulte un changement apparent dans les résultats des mesures terrestres. Le retard accumulé dans une demi-année est égal à 20 mn, ce qui correspond à la différence de trajet lumineux entre les positions J_1T_1 et J_2T_2 (*fig.* 3). Connaissant le diamètre de l'orbite terrestre, Rœmer en déduisit une première mesure, assez peu précise, de la vitesse de la lumière.

Une autre méthode astronomique est fondée sur le phénomène de l'aberration des étoiles. En 1725, *Bradley* commença une série d'observations précises sur la variation saisonnière apparente de la position des étoiles. Il observa qu'une étoile au zénith (c'est-à-dire vue en regardant verticalement) semblait décrire un cercle, au

cours d'une année, avec un diamètre angulaire de 45,5° d'arc. Il l'expliqua en faisant intervenir la vitesse v de la Terre autour du Soleil, égale à 30 km/s (*fig.* 4). Lorsque la lumière parcourt la distance MC pour parvenir à l'observateur, la Terre parcourt la distance AC ; la direction réelle de l'étoile est S, sa direction apparente est S′. On a la relation :

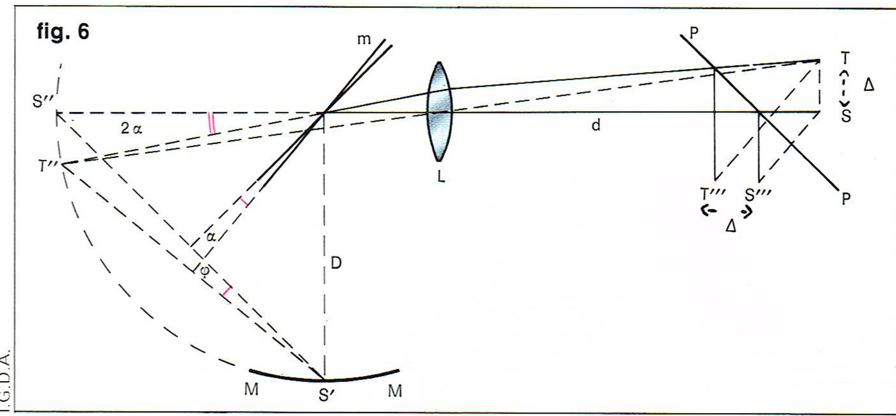
$$\frac{MC}{AC} = \frac{c}{v}$$

et l'aberration est égale à :

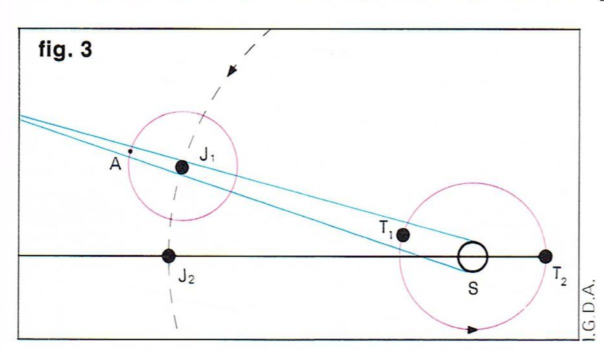
$$\alpha = \frac{v}{c} \sin \omega$$

où ω est l'angle sous lequel est vue l'étoile.

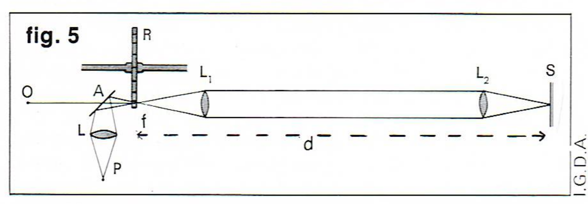
D'autres mesures ont été faites, cette fois en utilisant un laboratoire terrestre. L'appareillage de Fizeau (1848) est représenté sur la *figure* 5. L'organe principal est une



▲ ***Figure 6 : dispositif de Foucault pour la mesure de la vitesse de la lumière.***



◀ ***Figure 3 : les éclipses du satellite (A) de Jupiter (J) sont observées depuis la Terre (T) ; la distance parcourue par la lumière varie suivant la date.***



◀ ***Figure 5 : dispositif de Fizeau servant à mesurer la vitesse de la lumière (la roue dentée est vue par la tranche).***

roue dentée R, tournant à grande vitesse, qui intercepte ou laisse passer alternativement la lumière au point f, selon qu'à cet endroit se présente une dent, puis un intervalle entre deux dents. La lumière d'une source O traverse une lame semi-transparente A, et passe à travers l'ouverture f lorsque celle-ci n'est pas obturée par une dent. Les lentilles L_1 et L_2 servent à former un faisceau parallèle. La lumière effectue un aller et retour entre le point f et le miroir S, lesquels sont séparés par une distance d. Elle est enfin réfléchie par la lame A et concentrée au point P par la lentille L. Pour observer une image en P, il faut donc que la roue n'intercepte la lumière ni à l'aller, ni au retour, c'est-à-dire que le temps t du trajet $2\,d$ soit égal au temps que met un intervalle de la roue R pour remplacer l'intervalle précédent au point f. On connait le nombre de dents de la roue R, ainsi que sa vitesse de rotation, ce qui donne la valeur de t. On en déduit la vitesse de la lumière : $c = 2\,d/t$.

Le dispositif de Foucault (1850) a l'avantage d'être plus lumineux et plus précis. Il est représenté sur la *figure* 6. Une source lumineuse S envoie de la lumière à travers une lame semi-transparente P. Une lentille L donnerait une image S″ de la source S, mais un miroir m envoie cette image en S′. Le miroir M renvoie la lumière dans la direction opposée, et on obtient finalement l'image S‴. Mais m est un miroir tournant à grande vitesse, qui, pendant que la lumière a fait l'aller et retour de longueur 2 D, a tourné lui-même de l'angle α. L'image de S′ vient donc en T″, puis en T‴. Si l'on appelle Δ la distance S‴T‴, et ω la vitesse angulaire de rotation, on en déduit : $c = 4\,dD\omega/\Delta$. La théorie exacte du phénomène, qui tient compte de la loi de la réflexion sur un objet en mouvement, ne modifie pas le résultat physique.

Les méthodes modernes utilisent souvent des ondes électromagnétiques de fréquence plus faible que la lumière. On peut mesurer le temps nécessaire à une onde radar pour effectuer le trajet aller-retour entre un émetteur et un réflecteur situés à 100 km de distance l'un de l'autre. Un intervalle de temps de l'ordre de 10^{-9} s peut être mesuré avec une horloge à quartz. Une autre méthode consiste à mesurer séparément la longueur d'onde λ et la fréquence ν. On en déduit alors la vitesse de la lumière : $c = \lambda\nu$. Une onde électromagnétique est introduite dans une cavité résonnante ; celle-ci ne fonctionne que si une demi-longueur d'onde est contenue un nombre entier de fois dans les dimensions de la cavité. Quant à la fréquence, elle est mesurée par des techniques électroniques usuelles. Des dizaines d'autres méthodes ont été utilisées depuis un siècle. Toutes donnent des résultats compatibles entre eux, quelle que soit la fréquence.

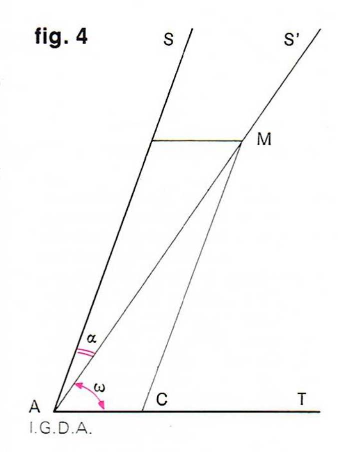
Optique géométrique

La lumière qui atteint notre œil peut provenir de sources lumineuses ou de corps éclairés qui renvoient vers l'observateur une partie de la lumière qu'ils reçoivent. Lorsqu'ils reçoivent la lumière incidente, les corps peuvent se subdiviser en corps transparents et opaques. Les premiers laissent passer toute la lumière reçue, alors que les seconds en absorbent la majeure partie, cette absorption dépendant en général de la couleur, c'est-à-dire de la fréquence de la radiation. Un corps noir absorbe tout, un corps blanc renvoie tout.

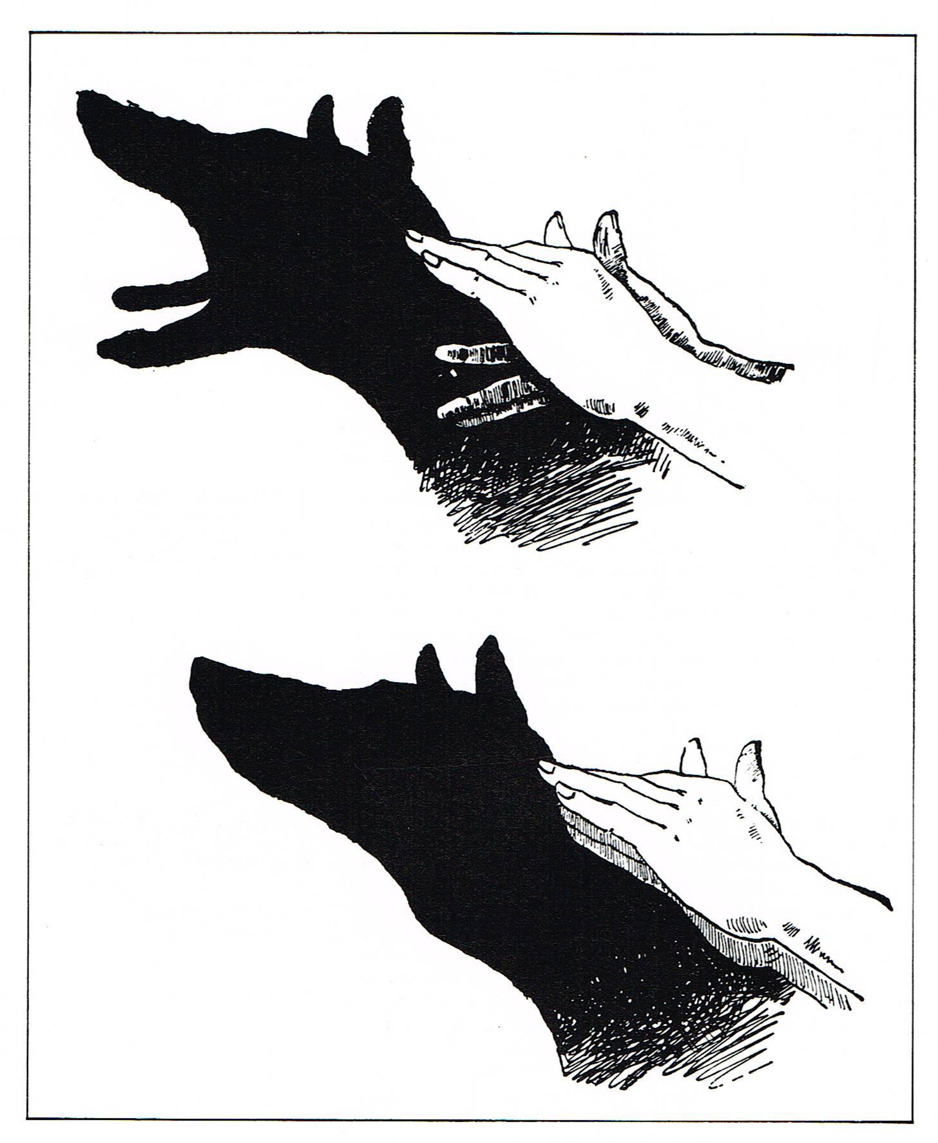
La distinction entre opaque et transparent n'est pas toujours nette. La transparence est fonction de la matière, mais aussi de conditions expérimentales particulières. Par exemple, l'or est opaque, comme tous les métaux, mais, si l'on prépare une feuille très mince, celle-ci est transparente. Les corps transparents peuvent être diaphanes ou translucides : tous les deux laissent passer la lumière, mais les premiers permettent d'observer les objets au travers, tandis que les seconds ne le permettent pas, sauf si l'objet est placé tout contre eux. La lumière traversant un corps translucide ressort après avoir été diffusée dans toutes les directions. Une plaque de verre, de l'eau propre, sont des exemples de corps diaphanes ; un verre dépoli ou un papier huilé sont des corps translucides.

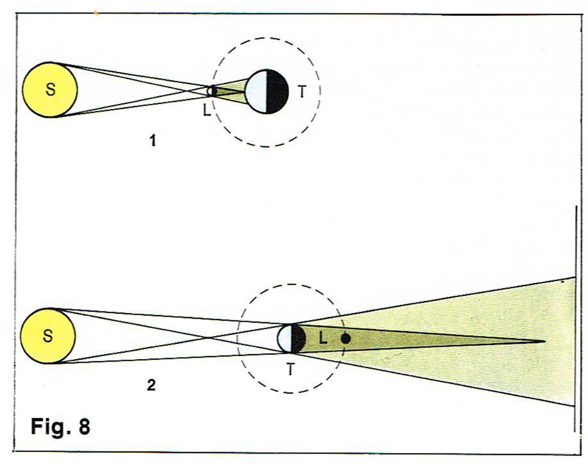
La notion de *propagation rectiligne* de la lumière est facile à comprendre intuitivement. L'expérience quotidienne prouve que, si, sur le segment de droite joignant notre œil au point que nous observons, on interpose un objet opaque, la vision du point disparaît. On en déduit la notion de rayon lumineux : c'est une droite le long de laquelle se propage la lumière. Il s'agit d'une idéalisation théorique, car il est impossible, expérimentalement, d'isoler un rayon seul. On peut réaliser un faisceau très étroit qui prend le nom de *pinceau lumineux :* on peut définir alors un rayon comme la limite d'un pinceau infiniment étroit.

La conséquence la plus immédiate de la propagation rectiligne est l'existence de l'ombre. Lorsqu'une source lumineuse éclaire un objet opaque, on observe au-delà de celui-ci une zone sombre, le *cône d'ombre*. Si on coupe le cône d'ombre par un écran, on voit se découper la silhouette de l'objet ; elle est obtenue géométriquement en traçant tous les rayons issus de la source et tangents à l'objet. Si la source n'est pas ponctuelle, le phénomène est un peu plus compliqué, car il existe des points qui sont éclairés par une partie seulement de la source. On distingue dans ce cas l'ombre et la pénombre, et il n'existe pas de discontinuité d'éclairement sur l'écran

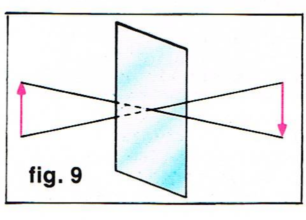


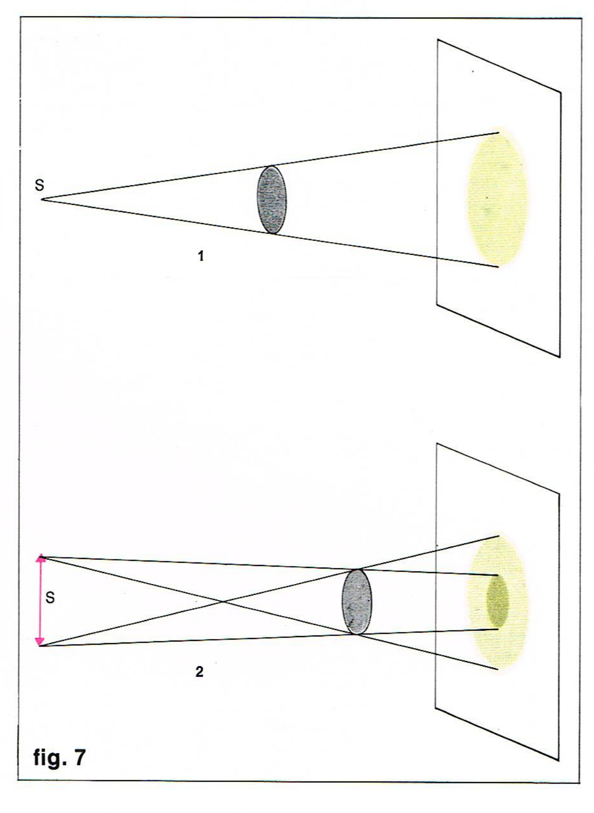
▲ ***Figure 4 : graphique illustrant le phénomène d'aberration des étoiles.***





▲ *Ci-dessus, la conséquence la plus immédiate de la propagation rectiligne de la lumière : l'existence de l'ombre. Une application simple et amusante : deux mains interposées entre un écran ou un mur et une lumière suffisent à reproduire des silhouettes de personnages ou d'animaux... A droite, figure 8 - éclipse de Soleil* (1) *: l'éclipse est totale lorsque l'observateur est dans le cône d'ombre, partielle lorsqu'il est dans la pénombre; éclipse de Lune* (2)*: l'éclipse est totale lorsque la Lune passe dans le cône d'ombre de la Terre, partielle lorsqu'elle passe dans la pénombre.*





(*fig.* 7). Les éclipses du Soleil et de la Lune s'expliquent par ces propriétés. La *figure* 8 en donne la représentation (les dimensions des astres ne sont pas respectées).

Une autre conséquence de la propagation rectiligne de la lumière est la formation de l'image dans une chambre noire. Si l'on perce un trou très fin avec une aiguille dans une feuille de carton et que l'on place un écran parallèle à une dizaine de centimètres, on observe une image renversée du paysage. Chaque point lumineux d'un objet envoie des rayons qui, pour atteindre l'écran, ne peuvent passer que par le trou. Chaque point de l'écran n'est donc éclairé que par un seul point de l'objet, ce qui explique qu'il y ait formation d'une image (*fig.* 9). Si l'on augmente la dimension du trou, la luminosité augmente, mais l'image devient floue. En effet, chaque point de l'écran est illuminé par plusieurs points à la fois. A la limite, si le trou (qu'on appelle un diaphragme) est largement ouvert, on n'observe plus qu'un éclairement uniforme.

Le principe de la propagation rectiligne de la lumière, fondement de l'optique géométrique, n'est vérifié que si toutes les dimensions considérées dans les appareillages sont grandes par rapport à la longueur d'onde de la lumière. Cette dernière étant inférieure au micron, l'approximation est largement valable dans les montages courants; la mise en évidence du phénomène de la diffraction nécessite des techniques expérimentales un peu plus fines.

On appelle *principe d'indépendance des rayons lumineux* le fait qu'un faisceau de lumière rencontrant sur son chemin un autre faisceau n'est perturbé en aucune manière par celui-ci.

Un rayon lumineux atteignant la surface d'un corps peut être *diffusé*, c'est-à-dire dispersé dans toutes les directions, ou *absorbé*. Il peut aussi être *réfléchi*, c'est-à-dire renvoyé à l'extérieur, ou encore *réfracté*, c'est-à-dire qu'il pénètre à l'intérieur du corps transparent.

Réflexion

La réflexion se produit si la surface est lisse : les aspérités sont petites par rapport à la longueur d'onde de la lumière. C'est le cas pour tous les métaux, les corps vitreux, lorsqu'ils sont polis, et la surface des liquides. La réflexion peut être totale (métaux) ou partielle (eau, verre). On ne récupère cependant jamais exactement l'intensité incidente, et on définit un pouvoir réflecteur (inférieur à l'unité) comme le rapport des intensités réfléchie et incidente. La meilleure valeur est obtenue pour l'argent, qui est utilisé pour cette raison dans la fabrication des miroirs.

Les lois de la réflexion (*fig.* 10) sont les suivantes :

— *le rayon réfléchi est situé dans le plan défini par le rayon incident et la normale à la surface;*

— *l'angle du rayon réfléchi et de la normale est égal à l'angle du rayon incident et de la normale.*

Connaissant ces lois, on peut construire l'image que donne d'une source ponctuelle un miroir plan. La *figure* 11 montre que tous les rayons issus de S convergent en un point S', symétrique de S par rapport au plan. Une telle image est appelée *virtuelle*, car elle est formée par le prolongement des rayons et non par les rayons eux-mêmes. L'œil peut l'observer, mais elle ne peut pas apparaître sur un écran, contrairement à une image réelle.

fig. 12

M

F

F'

1

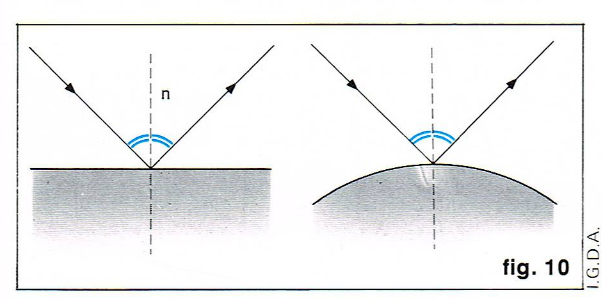
M

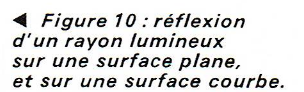
F

2

Richard Colin

◀ *Figure 12 : marche des rayons dans un miroir elliptique* (1) *et un miroir parabolique* (2).





◀ *Figure 10 : réflexion d'un rayon lumineux sur une surface plane, et sur une surface courbe.*

fig. 11

S

S'

I.G.D.A.

◀ *Figure 11 : formation de l'image d'un point* S *dans un miroir plan.*

Considérons un ellipsoïde de révolution dont la surface interne est réfléchissante, et une source ponctuelle placée à l'un des foyers (*fig.* 12). On démontre, en géométrie élémentaire, que la normale en un point M d'une ellipse est bissectrice de l'angle formé par les segments joignant le point aux deux foyers. Donc, tous les rayons issus de F convergent au point F', qui est ainsi l'image réelle de F. Cette propriété est utilisée lorsque l'on veut concentrer en un point la totalité de l'énergie lumineuse issue d'une source ponctuelle. Si, au lieu d'avoir une source proche, on a une source à l'infini (c'est-à-dire à une distance grande par rapport aux dimensions des appareils), on utilise un miroir parabolique. Celui-ci est constitué d'un paraboloïde de révolution, dont l'axe est parallèle à la direction de la source. Ce montage est utilisé notamment comme miroir principal des télescopes astronomiques. L'image de l'étoile est obtenue au foyer F.

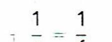
On appelle *miroir sphérique* une calotte sphérique réfléchissante; le miroir est concave ou convexe, selon que l'on utilise la partie interne ou externe de la sphère. L'angle d'ouverture α est l'angle sous lequel on voit la calotte depuis le centre; l'axe optique est la droite issue du centre, bissectrice de cet angle. On constate que les objets à l'infini donnent une image située dans un plan perpendiculaire à l'axe optique : le plan focal. Cette propriété est en fait une approximation, car seul un miroir parabolique peut donner une image d'un objet à l'infini. Cependant, si l'on satisfait aux conditions de Gauss, c'est-à-dire :

— si l'angle d'ouverture est faible,

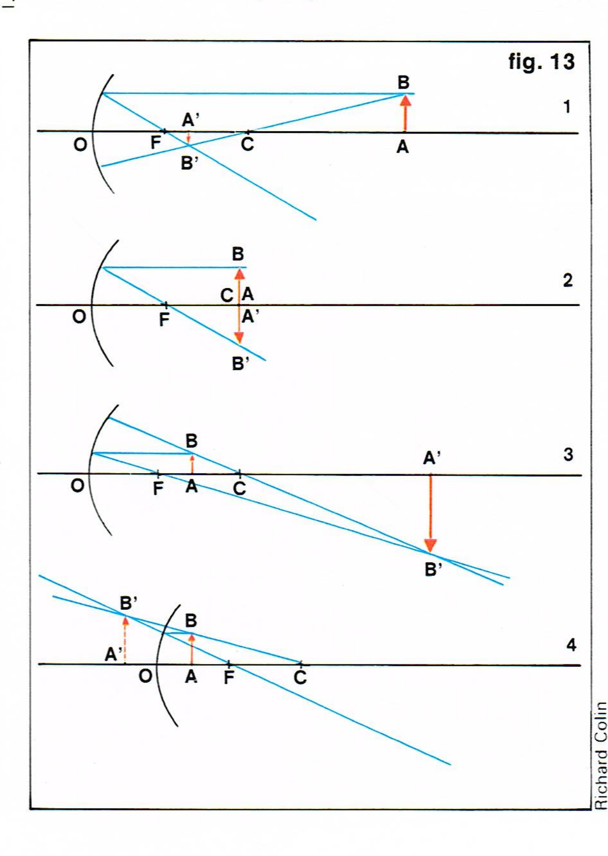
— si les rayons lumineux ne forment jamais un angle très grand avec l'axe optique,

— si les objets sont sensiblement plans et perpendiculaires à l'axe optique,

on constate que tout objet, quelle que soit sa position dans l'espace, donne toujours une image. Celle-ci peut être réelle ou virtuelle; sa dimension diffère en général de celle de l'objet, mais les proportions sont toujours respectées. On appelle optique paraxiale l'étude des propriétés des systèmes qui satisfont à ces conditions de Gauss. Lorsqu'on s'éloigne un peu de ces conditions, apparaissent des phénomènes perturbateurs, les aberrations, qui détruisent la netteté des images. Le but de l'optique paraxiale est de trouver la position et la dimension de l'image, connaissant celles de l'objet et, bien entendu, les caractéristiques du système optique. Pour un miroir sphérique, il y a une seule quantité qui puisse intervenir : c'est le rayon R de la sphère. On appelle distance focale la quantité $f = R/2$; c'est la distance du centre au foyer, point d'intersection du plan focal et de l'axe optique. La *figure* 13 représente différents cas possibles de formation de l'image, pour un miroir concave. Les constructions géométriques se font en utilisant les propriétés suivantes : les rayons parallèles à l'axe sont réfléchis en passant par le foyer; les rayons passant par le centre C ne sont pas déviés. Si l'on appelle respectivement p et q les distances entre le miroir et l'objet, et le miroir et l'image, comptées parallèlement à l'axe optique, on a la formule :

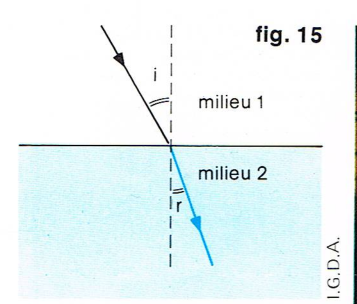


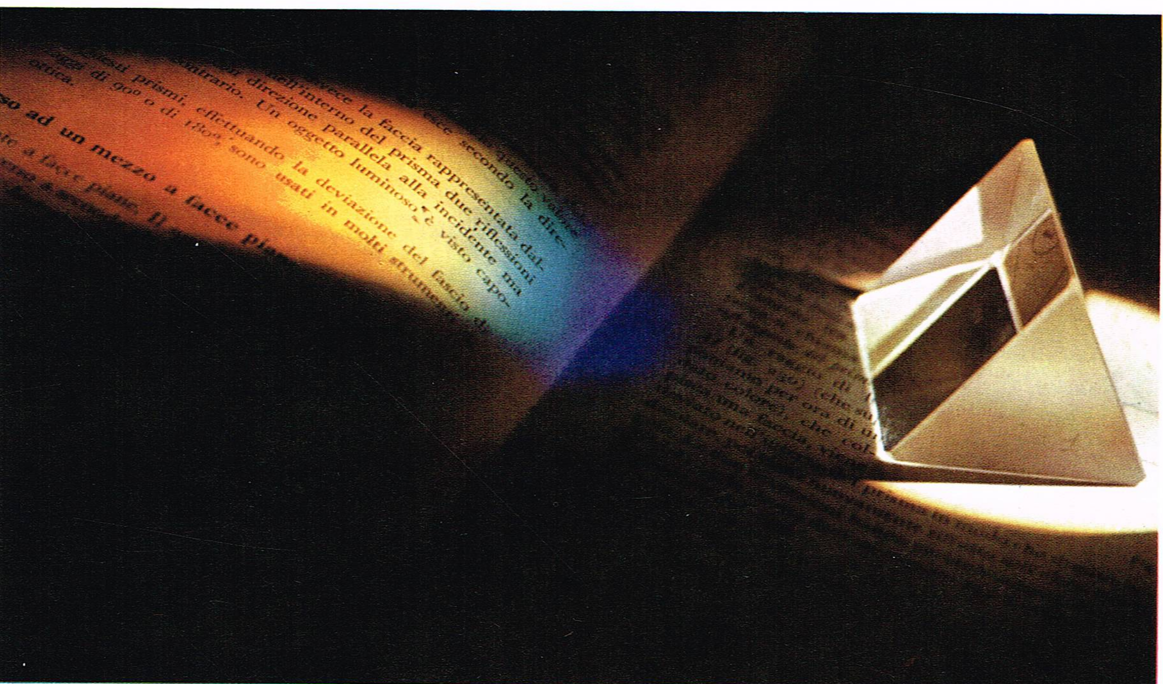

(0) $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$



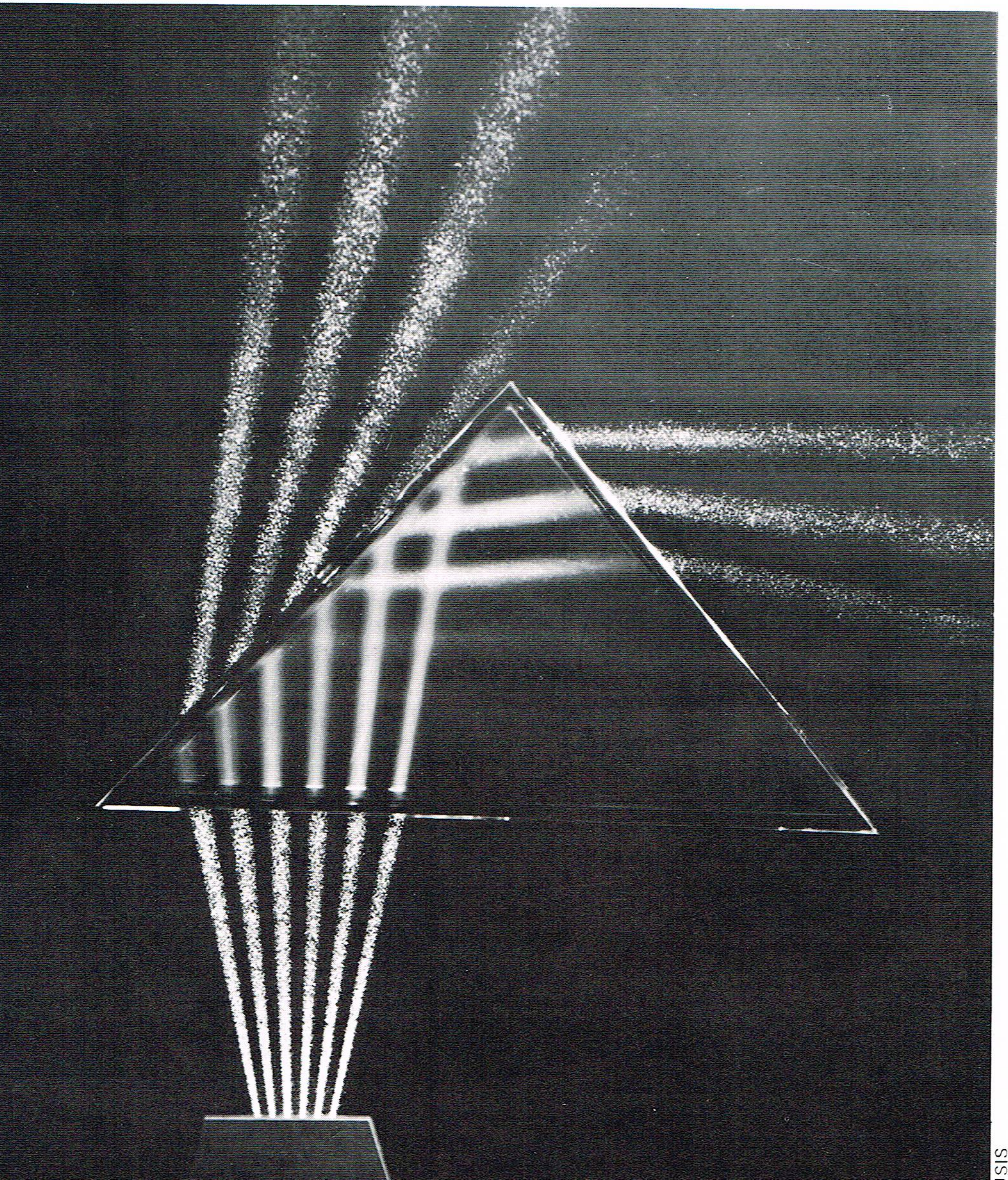
◀ *Figure 13 : différents cas possibles de formation de l'image pour un miroir concave.*

◀ *Page ci-contre, en bas, figure 9; une conséquence de la propagation rectiligne : la formation d'une image renversée des objets par un diaphragme dans une chambre noire. Figure 7 : ombre et pénombre, avec une source ponctuelle* (1), *et une source étendue* (2).




I.G.D.A.
P. Castano

▲ *Figure 15 : réfraction d'un rayon lumineux; les angles incident et réfracté sont notés i et r.*
▶ *Décomposition de la lumière blanche par un prisme; le faisceau incident arrive par la droite.*
▼ *A gauche, la réfraction : un rayon lumineux atteignant un corps transparent est en partie réfléchi et en partie réfracté.*
A droite, figure 14; formation de l'image A′B′ dans un miroir convexe.


USIS

Elle est valable dans tous les cas, à la condition de prendre pour *p* ou *q* des quantités négatives, quand on a affaire à un objet ou une image virtuels. Les dimensions relatives sont données par la formule :

$$\frac{A'B'}{AB} \quad \frac{A'C}{AC}$$

On constate que l'image et l'objet jouent des rôles complètement symétriques, ce qui est une conséquence du principe de retour inverse de la lumière. La *figure* 14 représente différents cas d'utilisation d'un miroir convexe. Le plan focal étant situé derrière le miroir, on obtient toujours une image virtuelle avec un objet réel. Il faut, dans la formule **(0)**, compter négativement la distance focale.

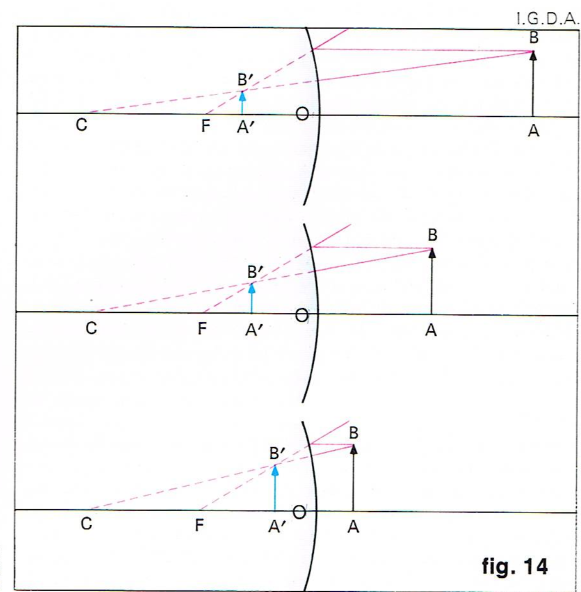
Réfraction

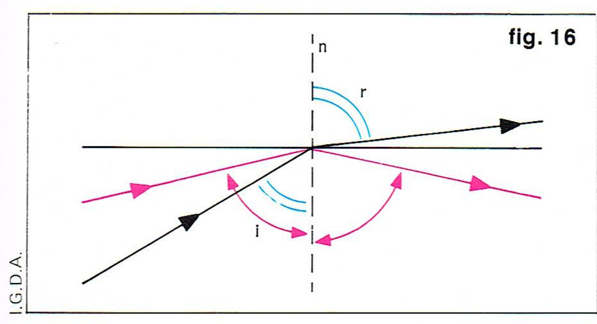
Un rayon lumineux atteignant un corps transparent est en partie réfléchi et en partie réfracté.

Les lois de la réfraction, ou lois de Descartes, sont les suivantes :

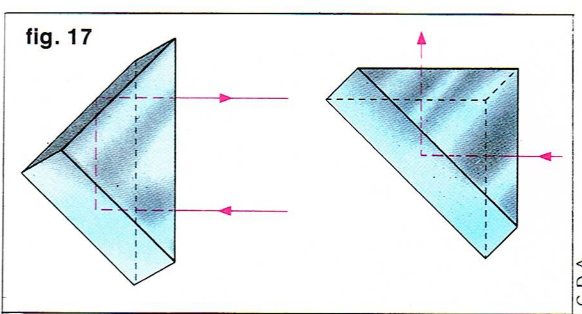
— *le rayon réfracté est situé dans le plan défini par le rayon incident et la normale à la surface;*

— *l'angle r formé par le rayon réfracté avec la normale est relié à l'angle d'incidence i par la relation :*





I.G.D.A.



I.G.D.A.

◀ *A gauche, figure 16 ; passage de la lumière d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent : réfraction (en noir) et réflexion totale (en rouge). A droite, figure 17 : prismes à réflexion totale.*

$$n_2 \sin r = n_1 \sin i$$

Les angles i et r sont représentés sur la *figure* 15. On appelle indice de réfraction des milieux 1 et 2 la quantité n_1 ou n_2. Cette quantité, posée conventionnellement égale à 1 pour le vide, est supérieure à l'unité pour tous les matériaux. Elle varie avec la longueur d'onde de la lumière utilisée : dans un verre ordinaire, elle est égale à 1,538 pour le violet et 1,511 pour le rouge. Le phénomène, appelé *dispersion,* est à l'origine de l'*aberration chromatique* dans les instruments d'optique : les images produites par les radiations de différentes couleurs ne sont pas superposées. La lumière blanche, qui est formée de l'addition de l'ensemble des couleurs du spectre, est ainsi décomposée. Cela est utilisé pour fabriquer certains types de spectrographes.

Le tableau suivant donne l'indice de réfraction pour quelques matériaux communs, avec la lumière jaune d'une lampe au sodium ($\lambda = 5\,893$ Å) :

Matériau	Indice
Air	1,000 292 6
Eau (20 °C)	1,33
Verre au zinc crown	1,52
Verre au plomb lourd	1,90
Diamant	2,4

Dans la plupart des applications pratiques, on admet que l'indice de l'air est égal à 1. On a vu que l'indice n'était autre que le rapport des vitesses de la lumière dans le vide et dans le milieu.

Lorsqu'un rayon lumineux entre dans un milieu plus réfringent, il se rapproche de la normale. Il existe un angle d'incidence, appelé *angle limite,* correspondant à un angle réfracté égal à 90°. Au-delà de l'angle limite, on observe le phénomène de réflexion totale (*fig.* 16). La surface de séparation se comporte comme un miroir, et le rayon réfléchi a une intensité égale à celle du rayon incident. Ce phénomène est utilisé quand on a besoin de changer la direction d'un faisceau lumineux, sans qu'il y ait atténuation de lumière comme dans la réflexion ordinaire. L'indice du verre ordinaire est égal à 1,50, ce qui donne un angle limite de 42°. Un prisme de verre permet de réaliser la déviation d'un faisceau lumineux de 90° ou 180° (*fig.* 17).

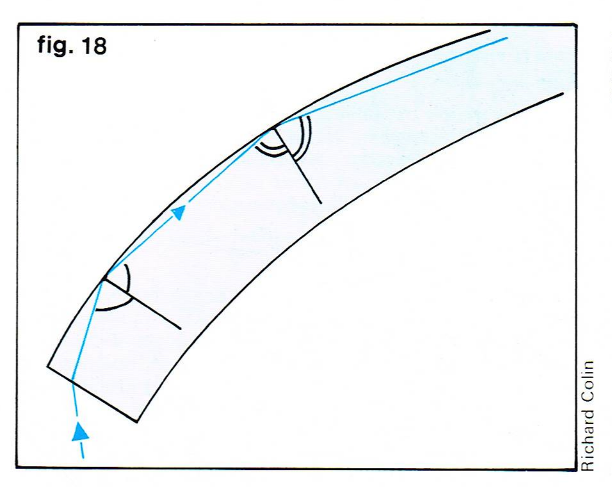
Une autre application intéressante de la réflexion totale est la fabrication des fibres optiques. Il s'agit d'un tube plein, de verre ou de plastique, dont la courbure est faible. Un rayon entrant dans l'axe subit une série de réflexions totales qui le conduisent à l'autre extrémité (*fig.* 18). Il n'y a pas d'autre atténuation que celle qui résulte d'une transparence imparfaite du milieu. On réalise ainsi la transmission d'une information lumineuse à l'aide d'un système optique très simple et robuste. Il est possible également de transmettre une image décomposée par points, par un faisceau de fibres parallèles.

Dioptres

On appelle dioptre plan le système optique que forment deux milieux transparents séparés par une surface plane. Tout objet donne une image, pourvu que les rayons ne soient pas trop inclinés par rapport à la direction de la normale, c'est-à-dire que $\sin i \simeq i$. L'image est virtuelle et apparaît rapprochée, quand elle est observée depuis le milieu le moins réfringent (*fig.* 19). L'expérience nous montre ainsi qu'un bâton plongé dans l'eau apparaît brisé et que le fond d'une rivière paraît plus proche qu'il n'est en réalité.

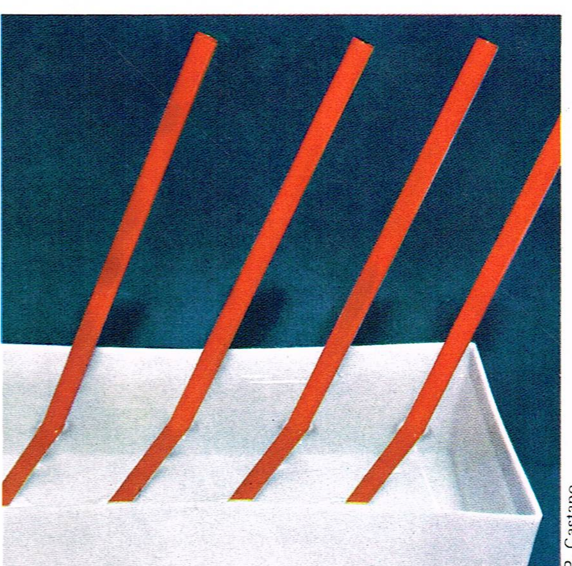
Une *lame à faces parallèles,* une plaque de verre par exemple, ne modifie pas la direction des rayons lumineux, puisque ceux-ci subissent deux réfractions successives. L'image a la même dimension que l'objet, mais elle est légèrement rapprochée, d'une distance inférieure à l'épaisseur de la lame : une vitre bien faite ne modifie pas la vision des objets.

La variation de densité des *différentes couches de l'atmosphère* entraîne une variation de l'indice de réfraction de l'air en fonction de l'altitude. On a affaire à une série continue de dioptres plans, et la propagation de la lumière n'est plus rectiligne. Le cas se produit les jours de grande chaleur, lorsque le sol et les couches d'air en contact avec lui sont surchauffés. Un rayon lumineux issu d'un point élevé et se dirigeant vers le sol s'incurve vers le haut, atteint l'angle limite, et est réfléchi vers l'œil de l'observateur. Celui-ci observe au sol une image du ciel ou d'objets lointains, ce qui fait croire à l'existence d'une nappe d'eau (*fig.* 20). C'est le phénomène de mirage.

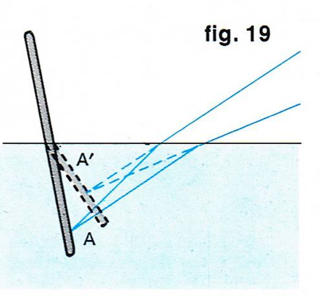


Richard Colin

◀ *Figure 18 : une fibre optique conduit la lumière par une série de réflexions totales.*

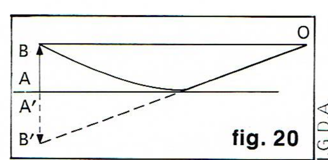


P. Castano



◀▼ *A gauche, un bâton immergé obliquement dans l'eau apparaît brisé ; ci-dessous, figure 19 : formation d'une image par un dioptre plan.*

N. Cirani



I.G.D.A.

▲ *En haut, phénomène de mirage dans le désert de Nubie. En bas, figure 20 : marche des rayons lumineux dans le phénomène de mirage.*

Le prisme

Le prisme est un système optique formé par deux dioptres plans faisant entre eux un angle A. Un rayon lumineux pénétrant avec l'incidence i_1 est réfracté suivant r_1, puis atteint l'autre face avec l'incidence r_2, enfin ressort suivant i_2 (*fig.* 21). Appelant D la déviation totale, on a l'ensemble des quatre formules :

$$\sin i_1 = n \sin r_1 \qquad A = r_1 + r_2$$
$$\sin i_2 = n \sin r_2 \qquad D = i_1 + i_2 - A$$

n étant l'indice du milieu externe par rapport au milieu interne. Connaissant i_1, on peut calculer toutes les autres quantités. La déviation minimale est obtenue lorsque $i_1 = i_2$.

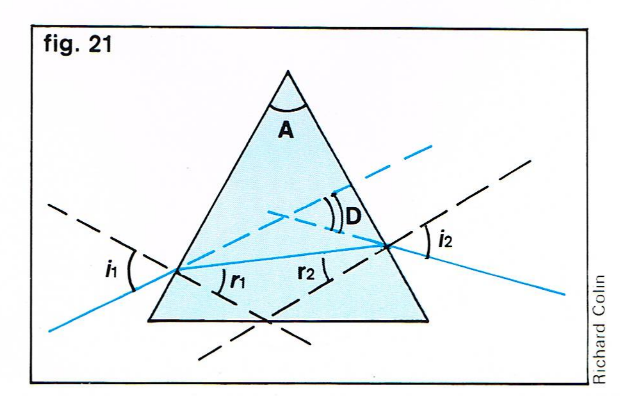
On montre que l'on a alors la relation :

$$n \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{D + A}{2}$$

En général, un prisme ne donne pas d'image ; cependant, si l'angle A est petit et si l'angle d'incidence des rayons est faible, il en existe une. Elle est virtuelle si l'objet est réel, a même dimension, et sa position est obtenue à partir de celle de l'objet en faisant une rotation d'angle D autour de l'arête du prisme. Dans ce cas, les formules se simplifient et donnent : $D = (n - 1)$ A. La déviation est alors indépendante de l'angle d'incidence.

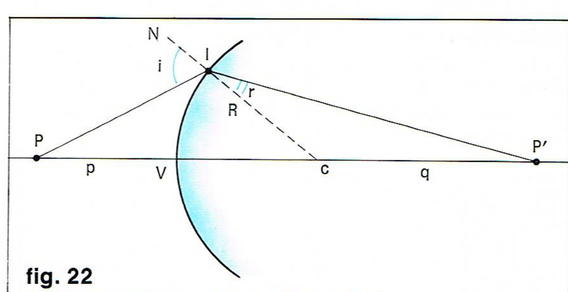
Dioptres sphériques

Lorsque la surface de séparation de deux milieux a la forme d'une sphère, on a un dioptre sphérique. Définissons, comme pour un miroir sphérique, un axe optique. Les conditions d'obtention d'une image sont les mêmes que dans le cas précédent : ce sont les conditions de Gauss. Appelons R le rayon de courbure de la calotte sphérique, n_1 et n_2 les indices de réfraction des deux milieux ($n_2 > n_1$) ; les points P et P′ sont des points conjugués, points d'intersection d'un rayon avec l'axe optique (*fig.* 22). Les distances de ces points à la surface du dioptre sont : $p = PV$, $q = P'V$. Nous utilisons toujours la même convention : si P ou P′ est situé sur une partie de rayon virtuelle, la distance correspondante est comptée négativement. On a alors la formule :



Richard Colin

▶ *Figure 21 : déviation d'un rayon lumineux dans un prisme.*



I.G.D.A.

▶ *Figure 22 : rayon réfracté par un dioptre sphérique.*

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Elle donne la position et la nature de l'image, connaissant celle de l'objet. Remarquons que la distinction entre P et P′ se rapporte au milieu dans lequel ils se trouvent et non au fait que l'un correspond à l'image, l'autre à l'objet. On retrouve donc la symétrie de retour inverse de la lumière qui avait été observée pour les miroirs sphériques. Il existe deux points pour lesquels les conditions de Gauss sont inutiles, c'est-à-dire que tous les rayons issus de P convergent en P′, quelle que soit l'ouverture du dioptre. Ce sont les points d'Young (ou de Weierstrass) situés en :

$$p = -\frac{n_1 + n_2}{n_1} R, \qquad q = \frac{n_1 + n_2}{n_2} R$$

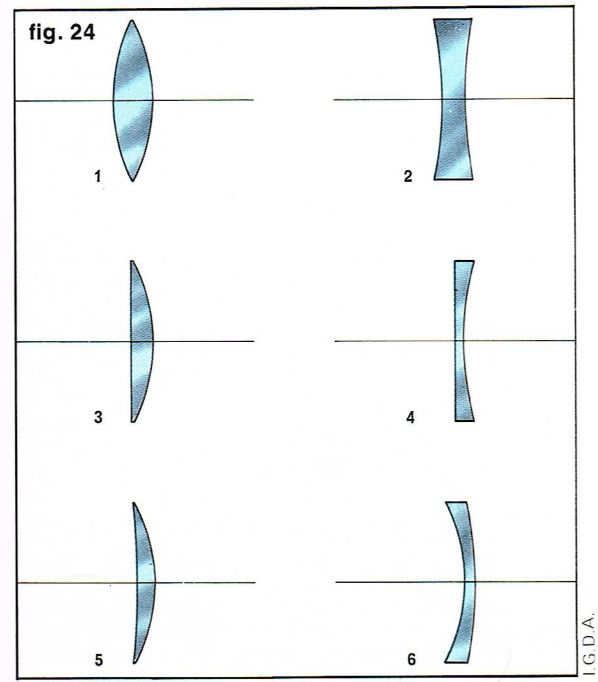
Lentilles épaisses

Une lentille épaisse est formée par deux dioptres sphériques limitant un milieu d'indice n par rapport à l'air. Un exemple simple est fourni par la sphère représentée sur la *figure* 23.

En optique paraxiale, on définit toujours le foyer comme étant le point où convergent les rayons issus de l'infini. Le calcul montre que la distance du foyer à la sphère est :

$$f' = \frac{R\,(2 - n)}{2\,(n - 1)}$$

Si l'on utilise un verre très dense ($n \simeq 2$), le foyer est pratiquement situé sur la surface du deuxième dioptre. Il suffit alors de recouvrir ce dernier d'une couche d'argent pour renvoyer la lumière dans la direction d'où elle est



venue. Un système optique appelé Scotchlite utilise cette propriété. En pratique, on colle un grand nombre de sphères de verre très petites sur un support quelconque. On réalise ainsi des catadioptres d'automobiles et des écrans de cinéma à haute luminosité.

Lentilles minces

Une lentille est dite mince lorsque son épaisseur est faible devant les rayons de courbure de ses deux faces. Il en résulte immédiatement que l'ouverture est petite ; d'ailleurs, une lentille est toujours utilisée en optique paraxiale. La *figure* 24 représente différents types de lentilles vues en coupe, dans l'ordre des numéros croissants : biconvexe, biconcave, plan convexe, plan concave, ménisques (ou concavo-convexe) convergent et divergent. On appelle centre optique l'intersection de l'axe optique avec le bloc de verre : c'est un point, puisque l'on néglige l'épaisseur. Les rayons passant par le centre optique ne sont pas déviés. R et R′ étant les rayons de courbure des deux faces, la formule du dioptre sphérique permet d'écrire :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

Les distances sont comptées à partir du centre optique. On voit qu'une seule quantité suffit à caractériser les propriétés de la lentille, c'est la distance focale f :

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

Il existe deux foyers, situés de part et d'autre de la lentille, à la distance f. Tout rayon, parallèle à l'axe optique, est réfracté en passant par l'un d'eux. Cette propriété, ainsi que celle du centre optique, permet de construire facilement les images (*fig.* 25).

fig. 25 — Lentilles convergentes

1 B A F F′ A′ B′ f f
2 B A F F′ A′ B′
3 B A F F′ A′ B′
4 B F A F′
5 B′ A′ B F A F′

Distance D de la lentille à l'objet	1	2	3	4	5
	2 f < D < ∞	D = 2 f	f < D < 2 f	D = f	O < D < f
Image	réelle, renversée, plus petite que l'objet	réelle, renversée, égale à l'objet	réelle, renversée, plus grande que l'objet	répétée à l'infini	virtuelle, droite, plus grande que l'objet

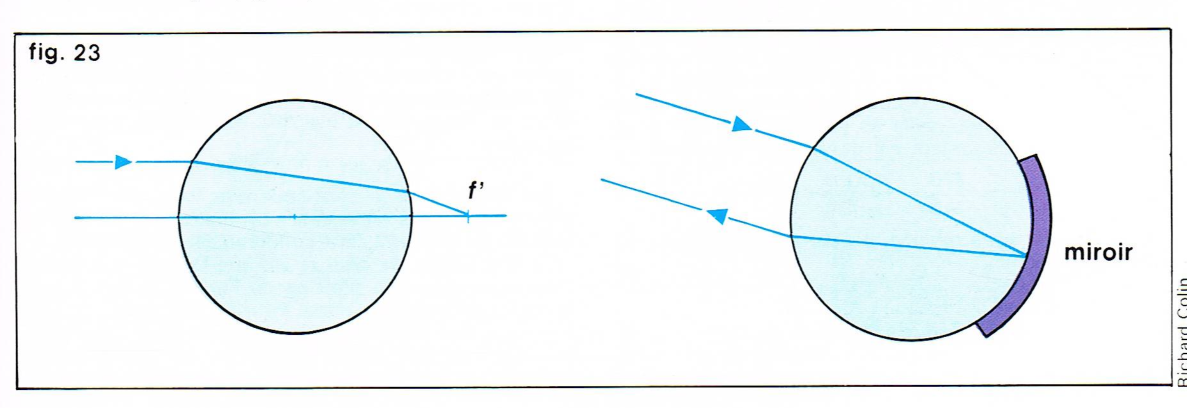
Lentilles divergentes

B B′ A F A′

quelle que soit la position de l'objet, l'image est toujours virtuelle, droite, plus petite que l'objet.

B B′ A A′ F — B B′ F A A′

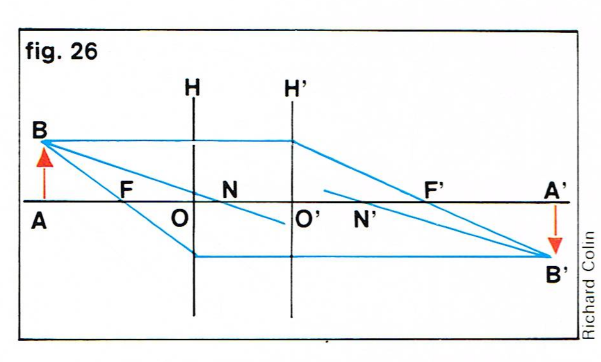
Richard Colin

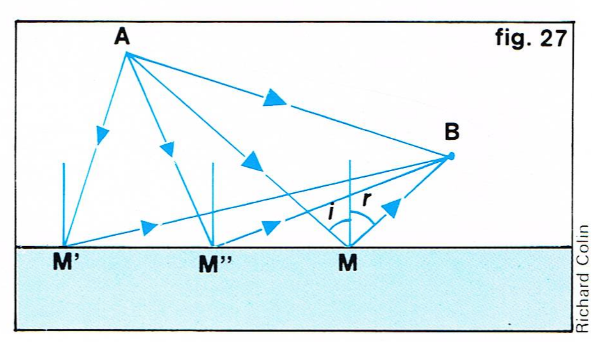


▲ *A gauche, figure 24 : les différents types de lentilles. Ci-dessus, figure 25 : constructions des images d'un objet données par des lentilles convergentes et divergentes.*

◀ *Figure 23 : foyer d'une lentille sphérique et principe du Scotchlite.*

▶ *A gauche, figure 26 : schéma d'un système centré, avec les plans principaux HH′, les foyers FF′, les points nodaux NN′. A droite, figure 27 : déduction de la loi de la réflexion par le principe de Fermat : des exemples de chemins possibles sont AMB, AM′B, AM″B, AB. AB est le minimum absolu, AMB, le minimum relatif : ce sont donc des trajets empruntés effectivement par des rayons lumineux.*





Une lentille convergente donne d'un objet réel une image réelle, sauf lorsque la distance objet-lentille est inférieure à la distance focale. Pour une lentille divergente, la distance focale est négative et les foyers sont virtuels. Un objet réel donne toujours une image virtuelle plus petite que lui. Les dimensions relatives sont données par la formule : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{p}{q}$.

L'image est renversée à chaque fois qu'elle se trouve de l'autre côté de la lentille par rapport à l'objet ; ils sont alors ou tous les deux réels, ou tous les deux virtuels.

La *puissance* d'une lentille mince est mesurée en *dioptries*. Elle est égale à l'inverse de la distance focale, mesurée en mètres. On fabrique couramment des lentilles de 50 dioptries, c'est-à-dire une distance focale de 2 cm. C'est aussi l'ordre de grandeur de la puissance du cristallin de l'œil humain. La puissance est une quantité linéaire, au sens suivant : si l'on accole deux lentilles minces, la puissance totale est égale à la somme de celles des deux composants.

Systèmes centrés

On appelle système centré un système optique possédant une symétrie de révolution. On démontre qu'il doit être utilisé dans les conditions de Gauss pour donner une image quelle que soit la position de l'objet. Il existe cependant un cas de dégénérescence où l'on obtient toujours une image, mais celle-ci a alors même dimension que l'objet : cela se produit par exemple avec un miroir plan. Un système centré est composé de dioptres, éventuellement de miroirs sphériques, ayant tous même axe optique. Il est important d'en étudier les propriétés générales, car tous les instruments d'optique comportent des systèmes centrés, en particulier des combinaisons de plusieurs lentilles minces.

Il existe deux *foyers*, définis de façon usuelle : images des deux points à l'infini dans la direction de l'axe optique. On peut définir des *plans principaux* HH′ qui sont les lieux des intersections des rayons incidents parallèles à l'axe avec les rayons émergents passant par le foyer correspondant (*fig.* 26). Dans ces plans, le grandissement est unitaire. On définit encore les *points nodaux* NN′ qui sont des points conjugués tels qu'un rayon émergent passant par l'un soit parallèle au rayon incident passant par l'autre. La formule suivante permet de connaître la position de l'image en fonction de celle de l'objet :

$$\frac{n_2}{O'A'} - \frac{n_1}{OA} = \frac{n_2}{O'F'}$$

O et O′ étant les intersections des plans principaux et de l'axe optique, n_1 et n_2 les indices des milieux extrêmes. Pour une lentille mince ou un miroir sphérique, les points O et O′ sont confondus au centre de la lentille, ou à l'intersection du miroir et de l'axe optique. On retrouve la formule **(0)** avec cependant une condition de signe différente : les distances sont comptées algébriquement et non plus suivant la nature, réelle ou virtuelle, de l'objet et de l'image. Le grandissement est donné par la formule :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{n_1}{n_2}\frac{O'A'}{OA}$$

Il existe une autre relation, en prenant cette fois l'origine aux foyers :

$$FA \cdot F'A' = FO \cdot F'O'$$

Si l'image d'un objet situé à l'infini est également rejetée à l'infini, comme c'est le cas dans les instruments astronomiques, on dit que le système est télescopique ou afocal (il ne possède pas de foyers). Le grandissement est alors constant, et le déplacement de l'image sur l'axe est proportionnel à celui de l'objet.

Principe de Fermat

Les lois fondamentales de l'optique géométrique, propagation rectiligne, réflexion, réfraction, peuvent être rassemblées sous une forme plus synthétique, qu'on appelle principe de Fermat.

Considérons deux points quelconques A et B, et cherchons quel est le trajet que doit suivre un rayon lumineux partant de A pour atteindre B. On suppose connue la vitesse de propagation de la lumière en tout point de l'espace dans la région qui nous intéresse. Parmi toutes les courbes AB possibles que l'on peut tracer, il y en a au moins une qui donne une durée de trajet minimale. Il peut y en avoir plusieurs, si le système optique comporte une symétrie géométrique, par exemple ; il peut aussi y avoir un minimum absolu et un minimum relatif. En toute généralité, le principe de Fermat énonce que la durée de propagation le long d'un rayon présente un extrémum (minimum, ou plus rarement maximum).

Dans un milieu homogène, la vitesse de la lumière est la même en tout point ; la droite étant le plus court chemin d'un point à un autre, on en déduit la loi de propagation rectiligne de la lumière. Dans le phénomène de la réflexion (*fig.* 27), le segment AB est le trajet de durée la plus courte, mais un calcul géométrique simple montre que, parmi tous les chemins AMB, AM′B, AM″B, etc., le trajet AMB, satisfaisant à la condition $i = r$, est un minimum relatif. On peut également retrouver la loi de la réfraction, l'indice optique d'un milieu étant défini comme le rapport des vitesses de la lumière dans le vide et dans la matière. On appelle *chemin optique* entre deux points la durée du trajet de la lumière, multiplié par *c*. Si un rayon traverse plusieurs milieux d'indice n_1, n_2, ..., sur des distances l_1, l_2, ..., le chemin optique est donc égal à :

$$D = n_1 l_1 + n_2 l_2 + ...$$

Le principe de Fermat peut être appliqué directement à la recherche des images. En effet, pour qu'il y ait une image B d'un point objet A, il faut que tous les rayons issus de A se recoupent en B. On dit que le système optique est stigmatique pour le couple AB. Une condition nécessaire et suffisante est que tous les chemins optiques réalisés entre A et B soient égaux. Cela peut s'appliquer directement aux ensembles que nous avons déjà rencontrés : stigmatisme rigoureux pour les foyers d'un miroir elliptique, l'infini et le foyer d'un miroir parabolique, ou les points de Young-Weierstrass d'un dioptre sphérique ; stigmatisme approché pour un prisme mince ou une lentille en optique paraxiale.

Il existe une condition générale pour un système de révolution. Supposons qu'il soit stigmatique pour un couple de points conjugués AA′ situés sur son axe, on peut montrer qu'il l'est encore pour des points voisins BB′, situés dans les plans de front passant par AA′, moyennant la condition des sinus :

$$n\, AB \sin \alpha = n'\, A'B' \sin \alpha'$$

Les angles α et α' sont ceux que font, avec l'axe, les rayons conjugués en A et A′. Un instrument stigmatique satisfaisant de plus à cette condition est dit *aplanétique*.

Le **théorème de Malus** est une formation différente, mais équivalente du principe de Fermat, faisant appel à la notion de surface d'onde. Pour un ensemble de rayons lumineux tous issus d'un point source unique, il existe des surfaces normales à tous les rayons ; les distances entre deux surfaces quelconques, comptées le long des rayons,

sont toutes égales à une même valeur. Dans un milieu isotrope, les surfaces d'onde sont toutes les sphères ayant pour centre le point source. Le terme même de surface d'onde est directement issu de la théorie ondulatoire : il s'agit des surfaces de phase constante.

Le théorème de Malus est utile lorsque l'on veut simplifier le calcul des différences de chemins optiques au travers d'appareils plus ou moins complexes. En effet, si l'on connaît une surface d'onde, il est inutile de calculer les chemins optiques complets depuis la source ponctuelle, mais simplement depuis la surface d'onde. Cette propriété est très utile dans l'étude des interférences et de la diffraction.

Interférence et diffraction

Les interférences et la diffraction sont des phénomènes typiquement ondulatoires qui interviennent en optique lorsque la longueur d'onde n'est pas négligeable devant les dimensions de l'appareillage. Nous nous contenterons de rappeler les notions fondamentales, étudiées en mécanique et en acoustique.

Montages interférentiels simples

Il y a interférence lorsque deux ondes de même période arrivent au même point. Si a et a' sont les amplitudes des deux vibrations, φ la différence de phase, l'amplitude A de la vibration résultante est donnée par :

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2\,aa' \cos\varphi$$

Il y a interférence constructive si les ondes sont en phase ($\varphi = 0$), destructive si les ondes sont en opposition de phase ($\varphi = \pi$). Si de plus les amplitudes sont égales, il y a annulation pure et simple lorsque $\varphi = \pi$. Un problème particulier se pose en optique, du fait de la très grande fréquence des vibrations, de l'ordre de 10^{14} hertz. Dans la plupart des sources, l'émission est produite par des atomes excités dont les électrons retombent sur l'état fondamental. Pendant le temps d'observation nécessaire à la rétine ou à la plaque photographique, le processus se reproduit des milliards de fois, en différents points de la source. Lorsque l'on tente de faire des interférences avec des rayons provenant de points différents, on observe en fait un grand nombre d'émissions avec des différences de phase variées. De telles sources sont dites incohérentes ; pour produire des interférences avec elles, il faut utiliser deux rayons provenant du même point. Nous laisserons pour le moment de côté le cas des sources cohérentes, c'est-à-dire, pour le domaine optique, des lasers, et pour le domaine des radiofréquences, des masers et des émetteurs radio.

Les expériences simples d'interférence utilisent le dispositif général suivant (*fig.* 28) : par un procédé quelconque, on forme deux images S_1 et S_2 d'une source ponctuelle, séparées d'une distance d ; à une distance D, dans la zone de recouvrement des rayons, on place un écran E. Soit L_1 et L_2 les chemins optiques des deux ondes entre les deux sources secondaires S_1 et S_2 et un point M observé sur l'écran. La différence de phase est égale à :

$$\varphi = 2\pi \frac{L_1 - L_2}{\lambda}$$

λ étant la longueur d'onde de la lumière. Dans le plan médiateur de S_1S_2, les chemins optiques sont égaux, et on a donc en O sur l'écran une frange brillante. Pour un point situé à une distance h de cette frange, on a :

$$L_1 - L_2 = \frac{h}{D} d$$

dans l'approximation où h et d sont beaucoup plus petits que D. On a donc un système de franges parallèles équidistantes, alternativement noires et brillantes. L'interfrange correspond à un déphasage de 2π ; il est égal à :

(1) $$i = \lambda \frac{D}{d}$$

Pour des valeurs typiques de $\lambda = 0{,}5\,\mu$, $D = 1$ m, $d = 1$ mm, on a $i = 0{,}5$ mm ; on se trouve donc bien dans l'approximation citée plus haut.

Dans l'expérience des miroirs de Fresnel (*fig.* 29), les deux images sont formées par deux miroirs faisant entre eux un angle faible. Il existe d'autres systèmes optiques, comme les biprismes de Fresnel utilisant la déviation de deux prismes d'angle faible, ou les bilentilles de Billet, formées de deux demi-lentilles d'axe optique différent (*fig.* 30).

L'expérience des trous d'Young, de construction très simple, est en fait plus complexe, car elle fait appel au phénomène de diffraction (*fig.* 31). Deux trous très fins sont percés dans un écran : il n'y a plus alors propagation rectiligne de la lumière, S_1 et S_2 se comportent comme des sources secondaires et présentent une région d'interférence.

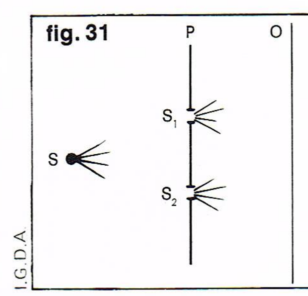
En pratique, il est impossible d'avoir une source strictement ponctuelle, au sens géométrique du terme. Supposons qu'elle ait une certaine hauteur h ; les points extrêmes de la source donneront des systèmes de franges déplacés l'un par rapport à l'autre sur l'écran d'une hauteur égale à h, en première approximation. Pour que les franges restent visibles, il suffit que les systèmes formés par différents points de la source se superposent sensiblement, c'est-à-dire que h soit plus petit que l'interfrange i. Si l'on considère maintenant la direction perpendiculaire à la figure et parallèle aux franges, il y a toujours superposition. Il est donc possible d'utiliser une fente au lieu d'une source ponctuelle, cet artifice permettant d'augmenter considérablement la luminosité. Dans le cas de l'expérience d'Young, les trous sont également des fentes. D'autre part, le fait d'observer sur un écran diffusant a l'inconvénient de donner lieu à un énorme gaspillage de lumière. Si on le supprime et que l'on regarde à l'œil nu, ou mieux avec une loupe, la position qu'il occupait, on continue à voir les franges.

Phénomènes en lumière blanche

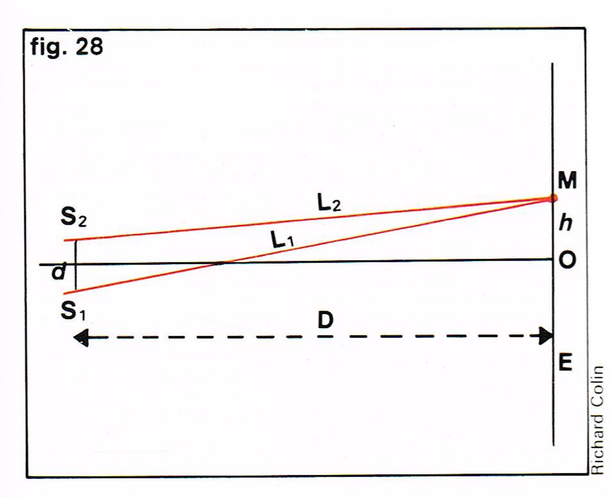
Dans tous les dispositifs précédemment décrits, nous avons supposé que la lumière utilisée était monochromatique. Si ce n'est pas le cas, le phénomène se complique, car d'après la formule **(1)**, à chaque longueur d'onde correspond une valeur différente de l'interfrange i. On a donc plusieurs systèmes de franges de différentes couleurs qui se chevauchent. Au centre de l'écran, les chemins optiques sont égaux, la différence de marche est nulle, et toutes les radiations interfèrent additivement : la

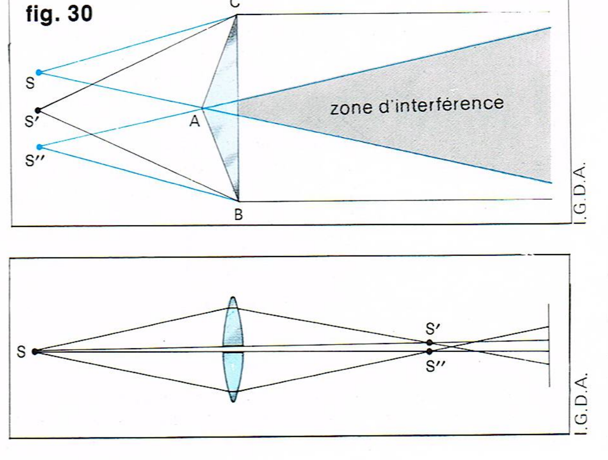
fig. 29

▲ *Figure 29 ; dispositifs des miroirs de Fresnel : les miroirs MM′ et M′M″ donnent de la source* S *deux images cohérentes* S′ *et* S″ *qui interfèrent au point* O.



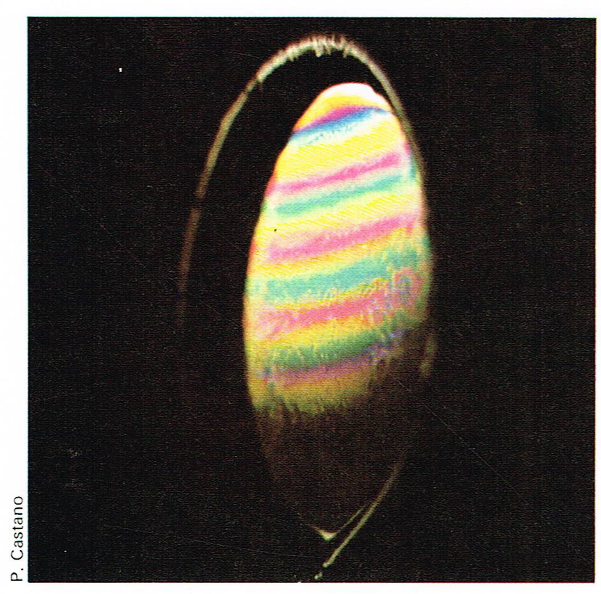
▼ *Figure 31 ; expérience d'Young : la source* S *donne en* S_1 *et* S_2 *des vibrations en phase ; par diffraction, les deux trous envoient des rayons dans toutes les directions, il y a donc une zone d'interférence sur l'écran* O.





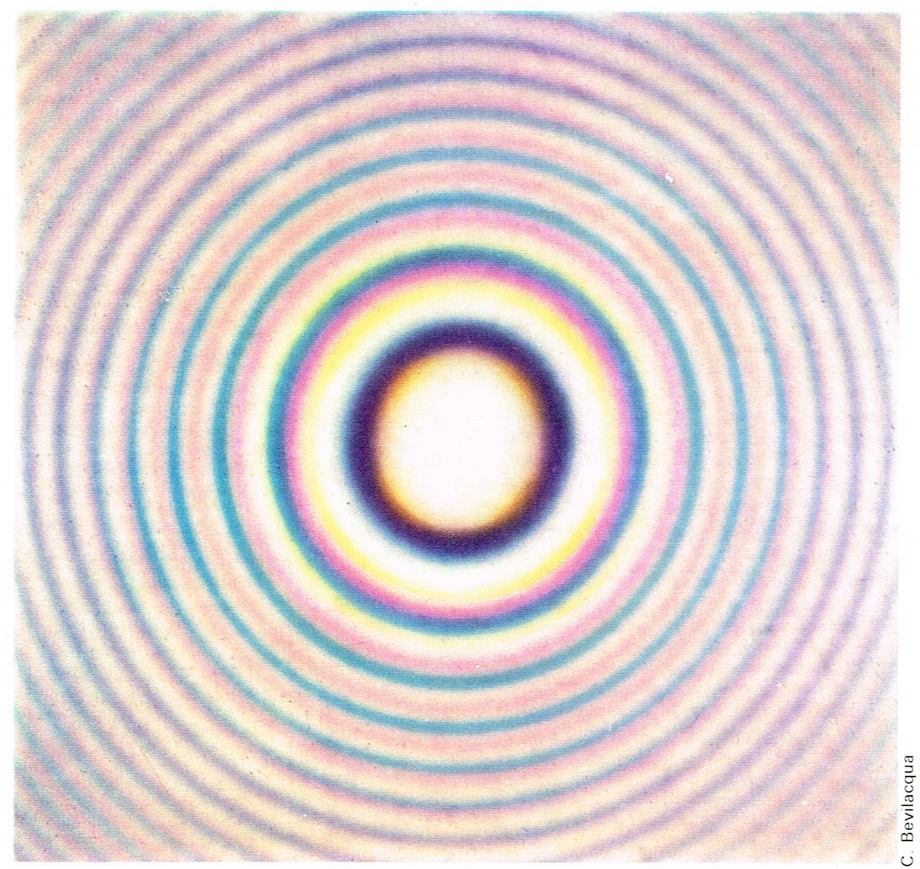
◀ *A gauche, figure 28 : les sources* S_1 *et* S_2*, très rapprochées, sont les images d'une même source ponctuelle (non figurée) ; on observe des franges sur l'écran* E. *A droite, figure 30 : dispositifs des biprismes de Fresnel et des bilentilles de Billet.*

▶ *Franges d'interférence en lumière blanche : teintes de Newton.*

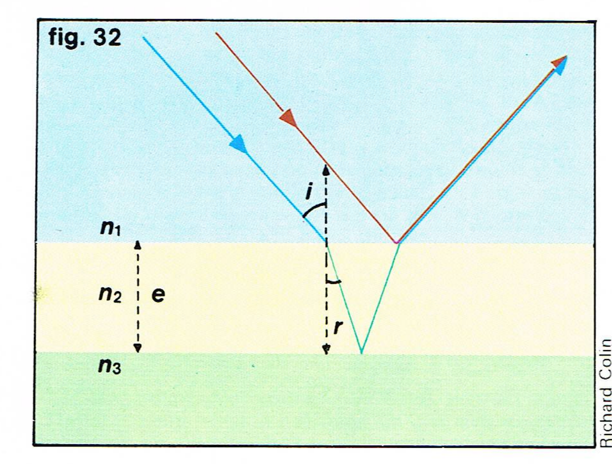


P. Castano

▼ *Anneaux de Newton en lumière blanche.*



C. Bevilacqua



▶ *Figure 32 ; interférence par une lame mince : les deux rayons concernés sont dessinés en bleu et en rouge.*

Richard Colin

frange centrale est donc blanche. Lorsque l'on commence à s'écarter de celle-ci, la lumière de plus courte longueur d'onde présente une frange sombre. On observe donc un mélange de couleurs d'où le bleu est absent, c'est-à-dire un brun-rouge. En continuant, c'est le rouge qui disparaît, et il reste une teinte bleutée. Pour chaque valeur de la différence de chemin optique $\delta = L_1 - L_2$, il existe une teinte caractéristique, dont l'ensemble forme l'échelle des teintes de Newton. Lorsque δ dépasse 5μ, on a un mélange complexe qui, à l'œil, n'apparaît plus coloré : c'est un blanc d'ordre supérieur. L'analyse au spectroscope montre un spectre où les radiations telles que

$$\lambda = \delta/\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

k étant un entier, sont absentes ; on dit que l'on a un spectre cannelé.

Il existe aussi une échelle des teintes de Newton à frange centrale noire, qui présente des colorations exactement complémentaires de l'échelle ordinaire. On l'observe lorsqu'une des deux ondes a subi un déphasage de π, par exemple à la suite d'une réflexion vitreuse supplémentaire.

Les montages interférentiels décrits permettent de mesurer de façon précise l'épaisseur e d'un objet transparent d'indice n. Il suffit d'interposer cet objet sur le trajet d'une des deux ondes, ce qui introduit une variation de chemin optique égale à $\delta = e\,(n - 1)$. Si l'objet est très mince, on voit en lumière blanche, au centre de l'écran, une teinte dont l'identification donne une évaluation de δ. Si l'objet est plus épais, des franges se forment au point d'observation, et il suffit alors de compter leur nombre. On ne peut pas mesurer des valeurs de δ très grandes, car on obtient rapidement un blanc d'ordre supérieur. Il faut alors compter les franges en lumière monochromatique, mais il existe de toute façon une limitation due au fait qu'une source n'est jamais strictement monochromatique et possède une certaine largeur de raie. Quoi qu'il en soit, les mesures de distances par une méthode interférentielle sont les plus précises qui existent ; ainsi la définition actuelle du mètre comme étalon de longueur est, depuis 1957 : 1 650 763,77 fois la longueur d'onde dans le vide de la radiation orangée de l'isotope 86 du krypton.

Interférences des lames minces

Trois milieux transparents d'indices n_1, n_2 et n_3 déterminent une lame d'épaisseur e qui peut, sur une région peu étendue, être assimilée à une lame à faces parallèles. Deux rayons provenant d'une source éloignée ressortent confondus et donnent des interférences, l'un étant réfléchi sur le premier dioptre, l'autre sur le deuxième (après réfraction sur le premier) [*fig.* 32]. La différence de marche est égale géométriquement à

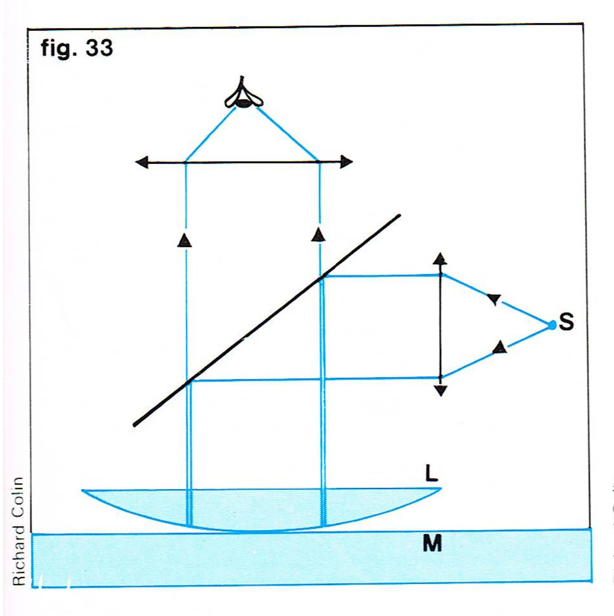
$$\delta = 2\, n_2\, e \cos r \qquad (2)$$

Il faut tenir compte, de plus, d'un déphasage de π, à chaque fois que se produit une réflexion, lorsque le premier milieu est moins réfringent que le second. Aux deux rayons représentés sur la figure peuvent se superposer des rayons ayant subi des réflexions multiples sur deux surfaces. Cependant, dans les cas usuels, leur intensité est faible, compte tenu du facteur de réflexion, et on peut les négliger.

Si l'on opère avec un faisceau parallèle de lumière venant d'une source à l'infini, l'épaisseur de la lame étant strictement constante, la différence de marche est fixée, et l'on observe une intensité uniforme. Par contre, si l'épaisseur varie, il se produit des franges alternativement brillantes et obscures. L'expérience peut être faite en prenant la couche d'air comprise entre un plan de verre et la surface sphérique d'une lentille plan-convexe (*fig.* 33). On obtient des cercles appelés anneaux de Newton, centrés sur le point de contact du plan et de la sphère ; les rayons sont proportionnels aux racines carrées des premiers nombres entiers.

Interférences à ondes multiples

Considérons une lame à faces parallèles plongée dans l'air et dont le coefficient de réflexion est augmenté par un dépôt d'argent. Les différents rayons transmis ne sont plus d'intensité négligeable les uns par rapport aux autres (*fig.* 34), et chaque double réflexion supplémentaire introduit une différence de phase constante φ.



◀ ***Figure 33; montage permettant d'observer les anneaux de Newton : franges d'égale épaisseur entre la lentille* L *et le miroir* M.**

Appelons ρ le facteur de réflexion de chaque surface; on peut calculer l'amplitude résultante comme la somme géométrique des amplitudes de tous les rayons. On trouve alors l'intensité :

$$I = \frac{(1-\rho)^2}{(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

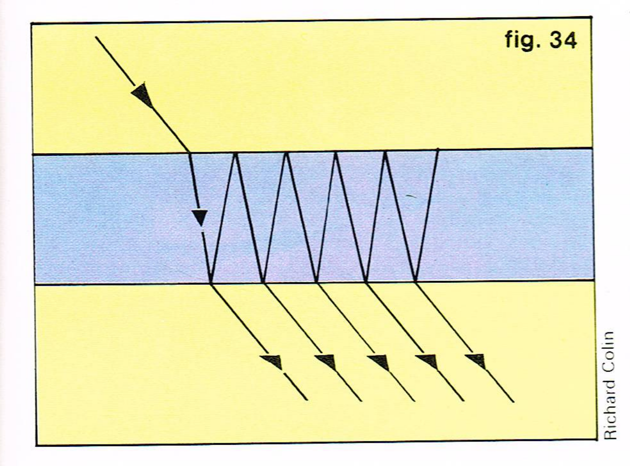
Les positions des franges sont les mêmes que dans le cas d'une interférence à deux ondes, mais, si ρ est voisin de 1, les maximums sont beaucoup plus pointus et les minimums beaucoup plus plats. Les franges ont l'aspect de raies brillantes et fines se détachant sur un fond noir très obscur. Cette propriété se révèle utile lorsque l'on veut faire des mesures précises.

En général, l'épaisseur est constante, et on observe des anneaux à l'infini. Si la source n'est pas monochromatique et présente un spectre de raies, celles-ci sont bien séparées, grâce à leur finesse.

L'interféromètre de Pérot-Fabry est formé de deux plaques de verres dont l'écartement est réglable, ce qui permet de limiter une lame mince d'air. Il est utilisé en spectroscopie pour la mesure précise des longueurs d'onde, ainsi que dans la réalisation des lasers, comme cavité résonnante. Un étalon interférentiel est un appareil semblable, mais dont l'écartement est fixe. Il sert à filtrer de façon très sélective les longueurs d'onde.

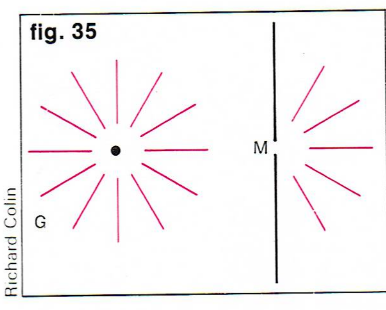
Principe de Huygens-Fresnel

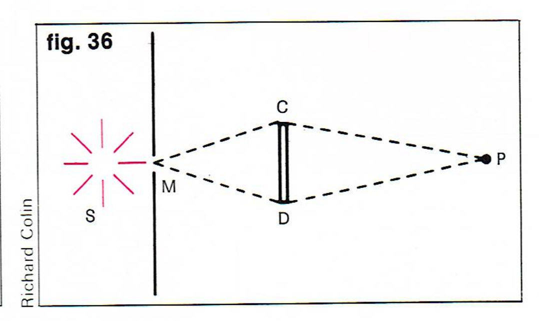
Le phénomène de la diffraction se manifeste tout d'abord par un écart par rapport au principe de la propagation rectiligne de la lumière. Une ouverture très fine M, percée dans un écran éclairé par une source G (*fig.* 35), laisse passer des rayons qui forment un angle non nul avec la direction GM. Le point M se comporte comme une source secondaire qui émet dans toutes les directions, d'autant mieux que le trou est plus petit. Une autre expérience consiste à placer un objet opaque dans le faisceau d'une source ponctuelle et à observer l'ombre portée sur un écran (*fig.* 36). Si le principe de propagation rectiligne était vérifié, on devrait avoir une limite nette, sans pénombre. En fait, la lumière pénètre dans l'ombre géométrique, tandis qu'on aperçoit, à l'extérieur, une série de franges.



◀ ***Figure 34 : interférences à ondes multiples par une lame à faces parallèles.***

Le principe de Huygens fournit une première interprétation qualitative de la diffraction. Il affirme que, lorsque l'on connaît une surface d'onde S, on peut construire une des surfaces d'onde suivantes S′ en additionnant toutes les vibrations produites par des sources fictives convenablement réparties sur S. Autrement dit, tout point de l'espace touché par la lumière se comporte comme une nouvelle source secondaire. Toutes ces sources dérivées interfèrent, et l'onde résultante reproduit celle qui est observée réellement en un point plus éloigné. Il y a ainsi propagation de proche en proche, de surface d'onde en surface d'onde. Le principe de Huygens n'est qu'une traduction géométrique du théorème de Malus, la surface d'onde S′ étant l'enveloppe des ondes sphériques provenant des sources fictives. Pour faire des calculs complets, il est nécessaire de préciser cette hypothèse, ce qui est fait par le *postulat de Fresnel :* un point de la surface S peut être considéré comme une source dont l'amplitude et la phase sont précisément égales à celles de la vibration arrivant en ce point.





▲ ***Figure 35 : diffraction par une petite ouverture* M.**
Figure 36 : diffraction au voisinage d'un écran* CD *; on observe de la lumière au point* P*, contrairement aux lois de l'optique géométrique.

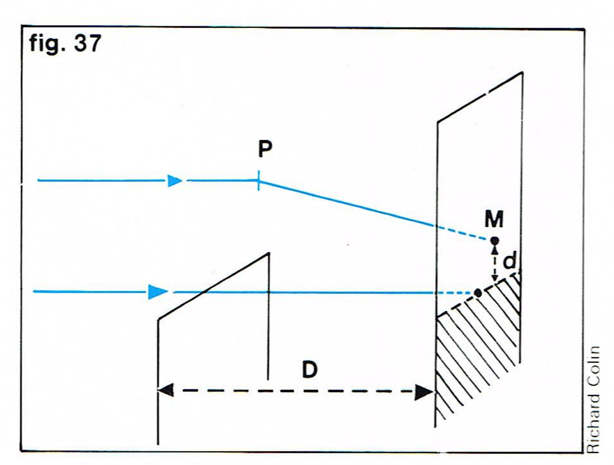
Il subsiste une difficulté d'ordre théorique lorsque l'on essaie d'appliquer sans précaution le principe de Huygens : chaque source fictive, si elle se comporte effectivement comme une source réelle, émet dans toutes les directions, en particulier dans le sens inverse de propagation des rayons lumineux.

Une théorie plus rigoureuse a été élaborée par *Helmholtz* et *Kirchhoff* à partir de l'équation générale des ondes. Le résultat est le suivant : l'onde produite par une source ponctuelle O en un point M peut être calculée comme la somme d'ondes produites par des sources fictives F réparties sur une surface fermée quelconque S contenant O et ne contenant pas M. Chaque source a pour phase la phase produite en F par le point O, additionnée de $\frac{\pi}{2}$. Son amplitude est une certaine fonction, donnée par la théorie, de l'amplitude en F. Sa distribution angulaire n'est pas isotrope, mais présente un maximum vers l'avant et est nulle dans la direction de la source O ; cette dernière propriété résout donc la difficulté de principe soulevée par le postulat de Fresnel.

En fait, si l'on ne s'intéresse pas à la phase de la vibration reconstruite et que l'on se limite au calcul des intensités dans un domaine angulaire pas trop grand, le principe de Huygens-Fresnel fournit le résultat correct, tel qu'il est observé expérimentalement. D'ailleurs, la formule de Kirchhoff n'est valable que pour des ondes scalaires; la méthode, appliquée aux ondes électromagnétiques, qui sont des ondes vectorielles, ne donne de solution que dans un petit nombre de cas, et implique de grandes difficultés mathématiques.

Les problèmes de diffraction peuvent être résolus simplement à l'aide du principe de Huygens-Fresnel, à l'approximation suivante : considérons un écran quelconque ayant une ouverture qui laisse passer la lumière venant de la source; on admet qu'en tout point de l'ouverture la vibration est la même que s'il n'y avait pas d'écran, et qu'en dehors de l'ouverture elle est strictement nulle. Autrement dit, la présence d'un corps opaque ne perturbe pas la propagation des ondes avant qu'elles arrivent sur lui; d'autre part, le matériau dont il est fait

▶ *Figure 37 : diffraction de Fresnel.*



ne joue aucun rôle. On peut montrer, dans les cas où la résolution exacte est possible, que cela n'est pas vrai pour les points se trouvant à une distance de l'écran inférieure à quelques longueurs d'onde.

Diffraction de Fresnel

On dit qu'il y a diffraction de Fresnel lorsque l'on observe sur un écran des franges au voisinage de l'ombre géométrique d'un obstacle. Considérons, pour fixer les idées, le cas d'un demi-plan opaque éclairé par une source à l'infini, et d'un écran placé à une distance D (*fig.* 37). Appelons A l'amplitude reçue par le point M, situé à une distance *d* de l'ombre géométrique. Elle est formée par l'interférence des ondes provenant de toutes les sources secondaires P couvrant le demi-plan non obturé. Leur amplitude est inversement proportionnelle à la distance PM, c'est-à-dire que seuls les points P proches contribuent à la sommation. Leur différence de phase par rapport à M est égale à :

$$\varphi = 2\pi \frac{PM}{\lambda}$$

Tous calculs faits, on trouve l'intensité I, égale au module carré de l'amplitude :

$$I = |A|^2 = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{2} - C(V)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} + S(V)\right]^2\right\}$$

où V est la variable sans dimension :

$$V = d\sqrt{\frac{2}{\lambda D}}$$

et C et S sont les intégrales de Fresnel :

$$C(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi}{2}t^2dt \qquad S(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi}{2}t^2dt$$

Les fonctions C et S sont calculables numériquement, et il en existe des tables. La *figure* 38 représente la variation de l'intensité I en fonction de V. S'il y avait propagation rectiligne, on aurait $I = 0$ pour $V < 0$ et $I = 1$ pour $V > 0$. La courbe montre qu'il y a un faible éclairement dans la zone d'ombre, au voisinage de la limite, et que, dans la zone éclairée, il y a des franges de minimum non nul et d'amplitude décroissante. La diffraction se manifeste dans une zone où $V \simeq 1$, ce qui donne, avec les valeurs numériques $D = 1$ m, $\lambda = 0{,}5\ \mu$: $d = 0{,}5$ mm. Comme dans le cas des interférences, l'utilisation d'une source étendue fait disparaître le phénomène, sauf dans le cas particulier d'une fente parallèle à l'arête de l'obstacle. De même, si l'on opère en lumière blanche, on observe des franges colorées, puisque la longueur d'onde intervient dans le résultat du calcul.

Diffraction de Fraunhofer

La diffraction de Fraunhofer est différente de la précédente : on observe à l'infini l'onde résultante après le passage d'un faisceau parallèle à travers une ouverture de dimension finie. Le faisceau perd son parallélisme, et il apparaît de la lumière progressant dans des directions différentes de la direction initiale. On peut traiter le problème en toute généralité, quelle que soit la forme de l'ouverture, en définissant la transparence $u(x, y)$ de l'écran : c'est la quantité par laquelle il faut multiplier l'amplitude incidente en chaque point M de coordonnées (x, y) pour avoir l'amplitude de la source fictive en ce point (*fig.* 39). Dans les parties opaques de l'écran, $u = 0$, et, dans les parties totalement transparentes, $u = 1$; la seule limitation sur cette fonction est qu'elle soit nulle au-delà d'une certaine valeur de x et de y, c'est-à-dire en fait que l'ouverture ne s'étende pas jusqu'à l'infini. Appelons k un vecteur d'onde, qui est défini comme suit :

— sa direction est celle des rayons lumineux, c'est donc la normale à une surface d'onde ;

— sa longueur est égale à : $k = \frac{1}{\lambda}$.

Lorsque l'on a une source à l'infini dans une direction perpendiculaire à l'écran, celui-ci reçoit des ondes planes qui lui sont parallèles. L'observateur étant à l'infini, il reçoit des ondes planes dont la direction est définie par la normale à celle de $\vec{k}$, comme c'est indiqué sur la figure. La différence de phase entre deux rayons parallèles, l'un issu de l'origine des coordonnées O, l'autre d'un point quelconque M, est égale à :

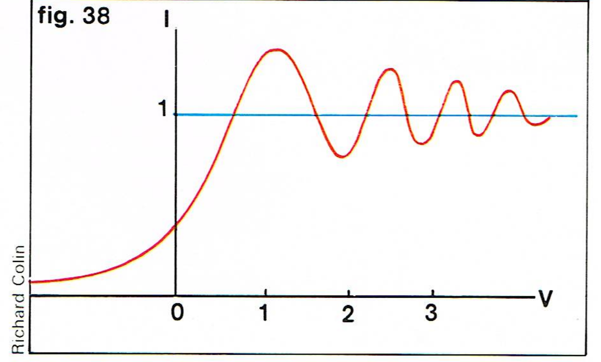
$$\varphi = 2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}$$

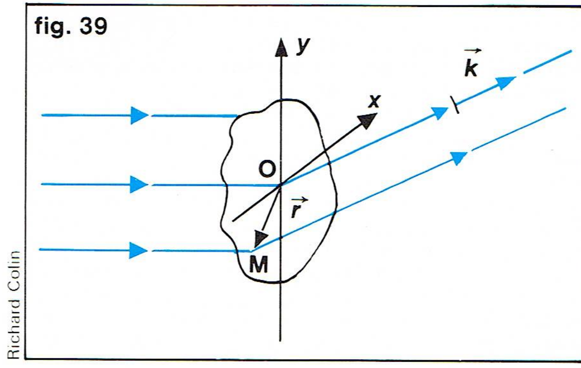
où $\vec{r}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Il y a une infinité de vibrations qui s'additionnent, venant de tous les points de la surface de l'écran. Il faut donc calculer l'amplitude résultante $A(\vec{k})$, dans la direction $\vec{k}$ par l'intégrale :

$$\textbf{(3)} \qquad A(\vec{k}) = \iint e^{2i\pi\vec{k}\cdot\vec{r}}\,u(x, y)\,dx\,dy$$

Dans cette formule, on emploie la notation exponentielle des mouvements vibratoires qui permet de représenter à la fois l'amplitude $u(x, y)$ et la phase $2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}$. L'intégrale est étendue à tous les points de l'écran, conformément au principe de Huygens-Fresnel. L'intensité recueillie par l'observateur dans la direction de $\vec{k}$ est égale au module du carré de l'amplitude. Elle dépend en fait de deux variables, qui sont les deux angles définissant la direction des rayons lumineux. Du point de vue mathématique, l'opération définie par la formule **(3)** qui fait correspondre à une fonction de plusieurs variables $u(x, y)$ une autre fonction du même nombre de variables $A(\vec{k})$ s'appelle une *transformation de Fourier*. On la retrouve de façon assez universelle en optique, ainsi que dans d'autres domaines de la physique. La diffraction de Fraunhofer permet d'avoir une méthode simple de détermination numérique d'une transformée de Fourier. Il suffit de cons-





▶ *A gauche, figure 38 : courbe représentant l'intensité lumineuse au voisinage de l'ombre géométrique dans la diffraction de Fresnel. A droite, figure 39 : diffraction de Fraunhofer.*

truire un écran ayant pour transparence la fonction $u\ (x, y)$ et de photographier la figure de diffraction obtenue. Dans le cas où l'onde incidente n'est pas parallèle à l'écran, mais fait avec lui l'angle θ, l'ensemble de la figure de diffraction subit une rotation d'angle θ.

Lorsque l'écran est percé par une fente de largeur d et de très grande longueur, la figure de diffraction obtenue comporte une frange centrale brillante et des franges alternativement claires et sombres, parallèles et régulièrement espacées. L'intensité des maximums décroît de façon inversement proportionnelle au carré de la distance du centre. L'angle séparant deux franges est égal à λ/d. Il est d'autant plus petit que la fente est plus large et, à la limite où la longueur d'onde devient négligeable devant la dimension d, on se trouve dans le cas de l'optique géométrique : aucun rayon lumineux n'a une direction différente de celle des rayons incidents. Si, au lieu d'une fente de grande longueur, l'ouverture est un rectangle de côtés d_1 et d_2, on observe un phénomène analogue aux franges, mais en deux dimensions. Il apparait des rectangles brillants séparés par des lignes sombres, l'intensité décroissant comme précédemment lorsque l'on s'éloigne du centre. Ils ont tous des dimensions égales, et les ouvertures angulaires de leurs côtés sont : λ/d_1 et λ/d_2.

Le cas le plus fréquent en pratique est celui d'une ouverture circulaire, un support de lentille mince par exemple. On démontre alors par la théorie des fonctions de Bessel que l'on a des franges circulaires à centre brillant, d'intensité décroissante. Elles ne sont pas régulièrement espacées, l'interfrange décroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre. Le calcul montre que la tache reçoit 84 % de l'énergie lumineuse et que l'angle du premier anneau noir est égal à $1,22\ \lambda/2\ R$, où R est le rayon de l'ouverture.

L'expérience d'interférence par les trous de Young fait appel à la diffraction en prenant, comme sources secondaires, les ouvertures de l'écran. Dans ce cas, si l'on appelle d la largeur des fentes et D leur distance, il y a, à l'intérieur des grandes franges de diffraction, d'interfrange λ/d, de petites franges d'interférence, d'interfrange λ/D. Il faut remarquer enfin que, dans tous ces phénomènes donnant lieu à la formation de franges, l'énergie lumineuse, c'est-à-dire l'intensité, est, comme il se doit, conservée. On peut calculer que ce qui manque dans une frange obscure est toujours exactement compensé par ce qui est en excès dans les franges brillantes ; il y a donc simplement déplacement spatial de l'énergie sur des distances de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de la lumière.

Diffraction dans les instruments d'optique

Pour qu'il y ait formation d'une image dans un instrument d'optique, il faut que tous les rayons provenant d'un point de l'objet convergent au point correspondant de l'image. Or les systèmes optiques ont tous des dimensions limitées et donnent donc lieu à des phénomènes de diffraction.

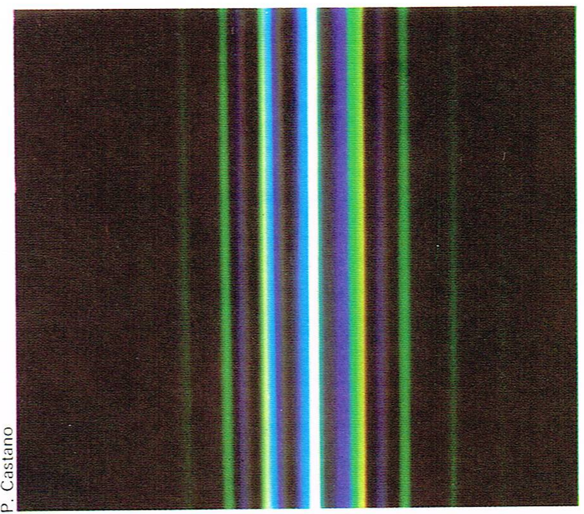
Dans une lunette astronomique, par exemple, toute la lumière reçue doit passer par la lentille qui se comporte ainsi comme une ouverture circulaire percée dans un écran. L'image d'une étoile n'est pas un point mais une tache appelée tache d'Airy. Lorsque deux étoiles de même éclat sont très rapprochées, leurs taches d'Airy se recouvrent partiellement, et il est impossible de distinguer si l'on a affaire à une ou deux images. On appelle *pouvoir séparateur* d'un instrument d'optique l'angle minimal que doivent présenter entre eux deux objets pour pouvoir être distingués. Pour l'augmenter, on a intérêt à avoir des surfaces optiques de très grandes dimensions. Mais cette condition est souvent contradictoire avec d'autres corrections (aberrations, défauts de construction).

La longueur d'onde de la lumière n'est pas du tout une limite inférieure de la dimension des objets qui restent visibles. Cela tient à ce que l'image d'un point n'étant pas un point mais une tache, l'image d'un objet étendu n'est pas identique à l'objet. Par exemple une ligne très mince donne, par diffraction, une bande assez large, relativement moins lumineuse que le reste de l'image. Mais l'œil est très sensible au contraste, et il est capable de percevoir une variation d'éclairement de l'ordre de 4 %. On s'explique ainsi que l'on puisse voir un fil très fin se détachant sur le ciel, bien que sa largeur angulaire soit très inférieure



Palais de la Découverte, Paris

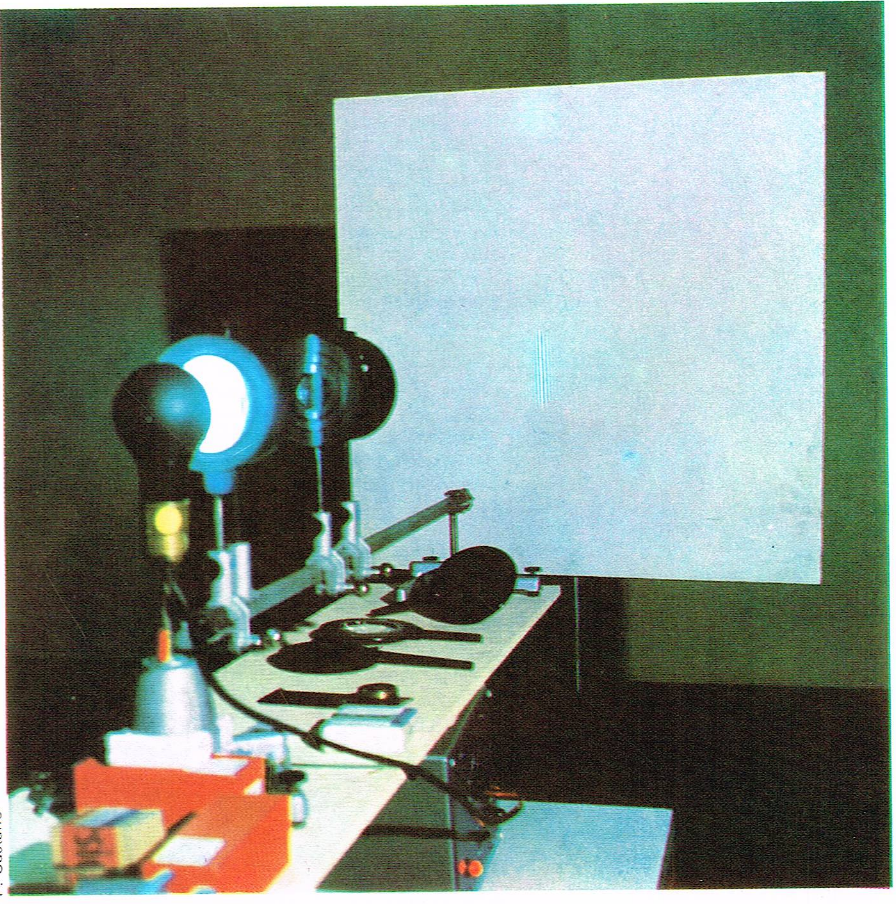
▲ Figure de diffraction obtenue par observation d'une source ponctuelle de lumière blanche à travers une trame textile à 2 dimensions.



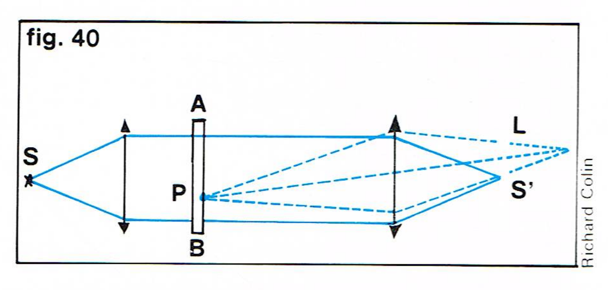
P. Castano

◀ Figure de diffraction obtenue avec une lampe à mercure.

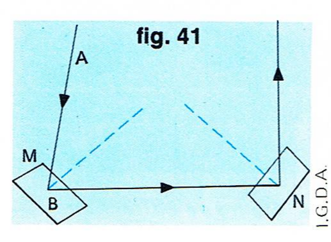
▼ Expérience de diffraction par une fente.



P. Castano



▶ *Figure 40 : observation en contraste de phase d'une lame AB présentant un défaut P. La lame L possède un dépôt de fluorure de magnésium en S'.*



▲ *Figure 41 : schéma de l'expérience de Malus, mettant en évidence la polarisation de la lumière par réflexion sur une lame de verre.*

au pouvoir séparateur de l'œil. De même, des détails plus petits que 0,1 μ peuvent être mis en évidence au microscope s'ils sont isolés et éclairés latéralement, sur un fond noir : c'est le principe de l'ultramicroscope.

Contraste de phase

Le contraste de phase est une méthode due à *Zernike* et *Lyot*, permettant d'observer au microscope des objets transparents. Ces derniers ne modifient pas l'intensité de la lumière transmise et sont donc en principe indétectables à l'œil. Cependant ils introduisent un déphasage si leur indice de réfraction est différent de celui du milieu environnant. C'est le cas par exemple, en biologie, pour des détails cellulaires non colorables.

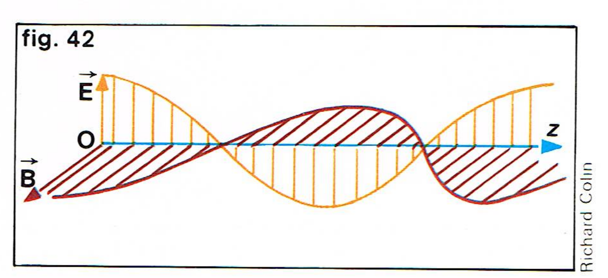
La *figure* 40 représente un montage de contraste de phase, où l'objet observé par transparence est noté AB. Il est éclairé par une source ponctuelle S, qui donne une image en S', laquelle n'est pas un point matériel mais une tache de diffraction. Un défaut situé sur AB introduit un faible déphasage, et tout se passe comme si l'on avait une petite composante de vibration, ayant une avance de phase de $\pi/2$. A cause de sa petite dimension, il diffracte la lumière bien au-dehors de la tache de diffraction S'. Si l'on introduit en S' une lame très mince donnant un déphasage de $\pi/2$, on modifie l'onde principale, mais non celle qui vient de P. On a donc addition en phase de l'onde principale et de la composante formée par P, ce qui provoque une variation d'intensité lumineuse, rendant l'objet visible. En pratique, une lame de verre est placée dans le plan focal de l'objectif, et la surépaisseur locale est obtenue par un dépôt de fluorure de magnésium.

Réseaux

Un réseau est constitué par une surface, en général plane, sur laquelle sont tracés une série de traits parallèles et équidistants. Un type usuel est formé d'une plaque de verre comportant 500 traits au millimètre, sur une longueur de quelques centimètres. On réalise ainsi une expérience d'Young à ondes multiples, chaque trait diffractant la lumière et se comportant comme une source secondaire. La largeur angulaire d'une frange d'interférence obtenue est : $\Delta\theta = \lambda/Ne$, où N est le nombre de traits et e la distance séparant deux traits.

D'autre part, l'angle séparant deux franges est égal à : $\theta = \lambda/e$; on voit que la finesse dépend directement de N et de e.

Lorsque l'on éclaire en lumière non monochromatique, la frange centrale ne présente pas de dispersion, mais les franges latérales montrent un spectre, puisque l'angle θ est fonction de la longueur d'onde. On a donc réalisé un spectrographe qui possède la propriété d'être linéaire en λ et d'en donner une mesure absolue. Les réseaux sont très utilisés, car ils permettent une dispersion et un pouvoir de résolution meilleurs que les prismes, malgré leur prix plus élevé. Il est possible également de fabriquer des réseaux métalliques employés par réflexion ; on évite ainsi, notamment dans l'ultraviolet, l'absorption liée à l'emploi de masses de verre.



▶ *Figure 42 : onde électromagnétique plane, monochromatique, polarisée rectilignement ; $\vec{E}$ et $\vec{B}$ représentent les champs électrique et magnétique.*

Dans le domaine des ondes radio-électriques, un réseau peut être constitué en utilisant une série d'antennes identiques régulièrement espacées, traitant le même signal. L'intérêt est d'avoir, aussi bien en émission qu'en réception, une très grande directivité, l'ouverture angulaire étant donnée par la formule $\Delta\theta = \lambda/Ne$. Cette propriété est utilisée par exemple en radio-astronomie, pour mesurer la direction de sources célestes.

Polarisation

Lumière naturelle et lumière polarisée

La polarisation de la lumière a été observée pour la première fois par Huygens en 1690 sur des rayons ayant traversé un cristal de spath d'Islande. En 1810, Malus mit en évidence la polarisation par réflexion par l'expérience suivante : un pinceau lumineux AB frappe une lame de verre M sous un angle d'incidence égal à 57° ; on recueille le rayon réfléchi sur une lame identique N, sous le même angle (*figure* 41). En observant l'éclairement produit sur un écran, on constate que, si les deux plans de réflexion sont confondus, l'intensité est maximale, tandis que, si les deux plans sont perpendiculaires, la lumière est éteinte. Cela montre que la lumière ayant subi une réflexion vitreuse sous un angle de 57° ne possède plus la symétrie de révolution : elle possède une certaine orientation ; on dit qu'elle est polarisée. Le miroir M, qui produit de la lumière polarisée à partir de la lumière naturelle, s'appelle un *polariseur* ; le miroir N, qui permet de déterminer la direction de polarisation, s'appelle un *analyseur*. Ces deux définitions se rapportent à des différences de fonction et non à des différences de nature de l'appareillage. La figure formée par le polariseur M et les rayons incident et réfléchi possède un plan de symétrie qui n'est autre que le plan de réflexion. On peut convenir de définir l'orientation d'une lumière polarisée, produite par un moyen quelconque, par la direction de ce plan de polarisation. Tout polariseur, quel que soit son principe, possède lui aussi une direction privilégiée, qui est celle de la lumière polarisée qu'il produit. Lorsqu'une lumière polarisée traverse un analyseur, l'intensité transmise satisfait à la loi de Malus : elle est proportionnelle au carré du cosinus de l'angle des deux plans de polarisation.

Ces propriétés s'interprètent par le fait que la lumière est une onde électromagnétique formée par la propagation d'un champ électrique E et d'un champ magnétique B. La résolution des équations de Maxwell dans le vide conduit à une vibration se déplaçant à la vitesse c et ayant la structure suivante (*fig.* 42) :

— une direction de propagation suivant l'axe Oz ;

— un champ électrique suivant Ox : $E_x = f\left(t - \frac{z}{c}\right)$,

où f est une fonction quelconque ;

— un champ magnétique suivant Oy : $B_y = f\left(t - \frac{z}{c}\right)$.

Si l'onde est monochromatique, la fonction f est sinusoïdale :

$$E_x = B_y = A \cos k\,(ct - z)$$

le coefficient A est l'amplitude de l'onde, son carré A^2 est l'intensité. Comme dans tout phénomène vibratoire, l'énergie transportée est proportionnelle à l'intensité. On appelle plan de polarisation le plan contenant la direction de propagation et le vecteur champ magnétique. L'autre plan de symétrie de la figure contenant le champ électrique est appelé plan de vibration.

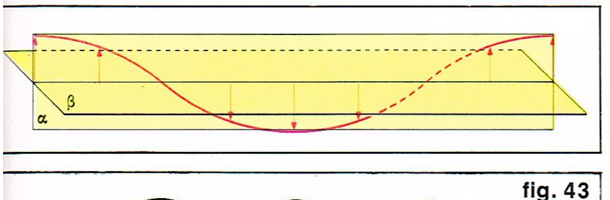
Les lois de l'électromagnétisme étant linéaires, il est toujours possible de superposer une onde à celle que nous venons de décrire. Considérons en particulier le cas où la direction de propagation Oz et la fréquence $\nu = kc/2\pi$ sont les mêmes mais où les composantes non nulles des champs sont E_y et B_x. Dans un plan fixe perpendiculaire à Oz, l'extrémité du vecteur champ électrique décrit au cours du temps une courbe donnée par les équations :

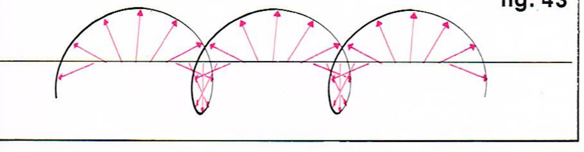
$$E_x = A \cos k\,(ct - z)$$
$$E_y = B \cos [k\,(ct - z) + \varphi]$$

Si le déphasage φ est quelconque, la courbe est une ellipse, et l'on dit qu'on a une polarisation elliptique. C'est le cas le plus général pour une somme d'ondes

monochromatiques ayant une direction donnée, puisque tout vecteur E peut être décomposé en deux composantes E_x et E_y. Si le déphasage est nul ou égal à π, l'ellipse se réduit à un segment de droite, et l'on a affaire à une polarisation rectiligne. C'est le cas de la lumière produite par réflexion vitreuse dans l'expérience de Malus.

Enfin, si les amplitudes A et B sont égales et si $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, la polarisation est circulaire, droite ou gauche suivant qu'un observateur recevant l'onde voit le champ électrique tourner dans le sens des aiguilles d'une montre





◀ *Figure 43 : champ électrique dans une onde polarisée rectilignement (en haut) [α plan de polarisation, β plan de vibration] et circulairement (en bas).*

I.G.D.A.

ou en sens inverse (*fig.* 43). Ces figures décrites par le champ magnétique sont exactement les mêmes, après rotation de $+ \frac{\pi}{2}$ autour de l'axe Oz.

La théorie électromagnétique montre que toute lumière est polarisée, mais cela n'est pas en contradiction avec l'existence de la lumière naturelle. En effet, dans les sources lumineuses usuelles, l'émission est provoquée par un grand nombre d'atomes émettant chacun de façon désordonnée pendant un intervalle de temps très court. Pendant le temps nécessaire à toute perception visuelle ou photographique, on observe une moyenne d'un grand nombre de trains d'ondes polarisées. Si aucun polariseur n'intercepte le rayon lumineux, il n'y a aucun plan privilégié et donc une parfaite symétrie de révolution. Certains dispositifs laissent passer toutes les polarisations mais atténuent préférentiellement certaines directions. C'est le cas des miroirs de l'expérience de Malus, lorsque l'angle d'incidence n'est pas égal à 57°. La lumière qui en résulte est dite partiellement polarisée.

Lorsqu'une onde polarisée rectilignement atteint un analyseur, celui-ci ne laisse passer que la composante qui lui est parallèle. L'amplitude transmise est donc égale à l'amplitude incidente multipliée par cos α, α étant l'angle des deux plans de polarisation. L'intensité étant égale au carré de l'amplitude, on retrouve la loi de Malus. La polarisation de la lumière naturelle conserve la moitié de l'énergie incidente.

Réflexion et réfraction par un milieu transparent

La propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux matériels peut être calculée à partir des équations de Maxwell. Un matériau est caractérisé par sa permittivité électrique ε, sa perméabilité magnétique μ et sa conductibilité γ. Il existe des corps anisotropes, comme les cristaux, pour lesquels ces coefficients ne sont pas les mêmes dans toutes les directions de l'espace; leur étude est plus complexe et nécessitera un paragraphe spécial. Un type particulièrement simple de milieux est celui où la conductibilité γ est nulle. Dans ce cas en effet, il n'y a pas de perte d'énergie par effet Joule; si de plus il n'y a pas de perte d'énergie par hystérésis diélectrique ou magnétique, le corps est parfaitement transparent. La solution trouvée pour la propagation dans le vide peut être appliquée avec les modifications :

$$\vec{E}' = \sqrt{\varepsilon}\,\vec{E} \qquad \vec{B}' = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\vec{B}$$

Il n'y a plus d'égalité entre les amplitudes des vecteurs E' et B' et la phase se déplace à la vitesse $v = c/n$, où n est l'indice de réfraction :

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

En pratique, on a toujours $\mu \simeq 1$ pour les isolants. La théorie précédente n'est qu'une approximation, car, lorsque l'on applique des champs de très haute fréquence à des atomes, l'inertie des charges électriques fait que la polarisation électrique ne suit pas instantanément les variations qui lui sont commandées : c'est le phénomène d'hystérésis. Il en résulte une absorption et, ε variant avec la fréquence, une dispersion. Il n'existe aucun corps qui soit complètement transparent pour l'ensemble du spectre des radiations électromagnétiques, cependant l'approximation reste valable dans un domaine de fréquence limite.

Lorsqu'une onde plane tombe sur la surface de séparation de deux milieux transparents d'indices n_1 et n_2, elle donne lieu à une onde réfléchie avec l'angle i et à une onde réfractée avec l'angle r. On peut toujours la décomposer en deux composantes polarisées rectilignement, l'une où le champ électrique est dans le plan d'incidence, l'autre dans le plan perpendiculaire, repérées respectivement par les symboles $A_\parallel$ et $A_\perp$. Pour trouver les rapports $R_\parallel$ et $R_\perp$ des amplitudes réfléchies sur les amplitudes incidentes, il suffit d'exprimer que les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique sont continues à la surface de séparation, conformément aux lois générales de l'électromagnétisme. On a alors les formules de Fresnel :

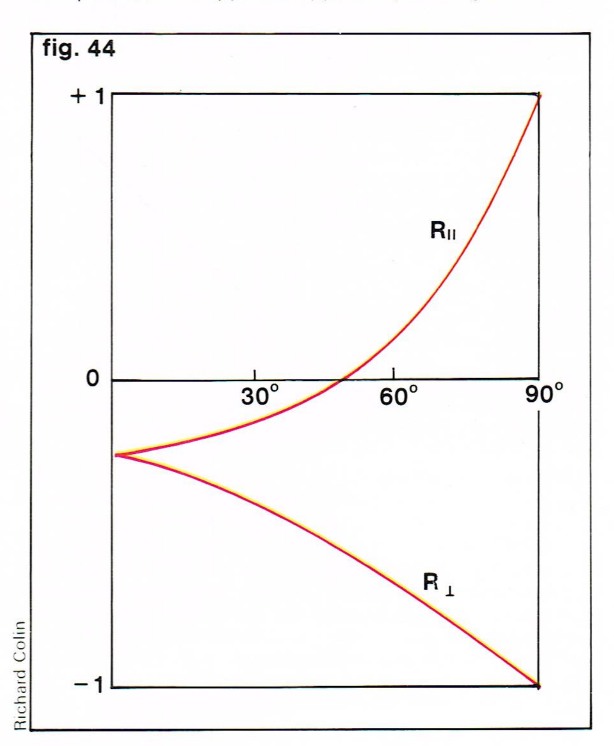
$$R_\parallel = \frac{\sin(r - i)}{\sin(r + i)} \qquad R_\perp = \frac{\text{tg}\,(r - i)}{\text{tg}\,(r + i)}$$

Le champ électrique réfléchi est toujours soit en phase, soit en opposition de phase avec le champ incident; dans ce dernier cas, R est négatif. La *figure* 44 représente la variation de R, pour $n_2 > n_1$, en fonction de i. On voit qu'il existe un angle d'incidence, appelé angle de Brewster, pour lequel $R_\perp = 0$. Il est tel que :

$$\text{tg}\, i = \frac{n_2}{n_1}$$

Pour le verre, $i = 57°$. C'est cette propriété qui permet de réaliser un polariseur à l'aide d'une lame de verre. Cependant un tel dispositif est peu lumineux, car le coefficient de réflexion est faible. La lumière réfléchie sur une nappe d'eau ou de neige, une vitre est toujours partiellement polarisée. Cette propriété est utilisée dans les lunettes polarisantes : des verres « Polaroïd » éliminent les reflets gênants et permettent, par exemple, à un pêcheur d'observer le fond d'une rivière sans être gêné par la réverbération.

Les formules de Fresnel donnent, par différence, l'amplitude de la lumière transmise. Il n'y a jamais qu'une polarisation partielle, mais, si l'on emploie un très grand nombre de surfaces successives, on obtient un bon polariseur. L'appareil, appelé « pile de glaces », est



◀ *Figure 44 : courbes représentatives de $R_\parallel$ et $R_\perp$ en fonction de l'angle d'incidence pour un dioptre air-verre; remarquer l'annulation de R pour l'angle de Brewster.*

Richard Colin

▶ *Figure 45 ; expérience des ondes stationnaires de Wiener : en traits pleins les ventres du champ électrique, en pointillé les nœuds.*

composé d'un certain nombre de plaques de verre placées sous incidence oblique. Il est très lumineux, et c'est le meilleur procédé pour les radiations infrarouges.

Réflexion totale et réflexion métallique

Dans le cas où $n_2 < n_1$ et $(n_1/n_2) \sin i > 1$, il y a réflexion totale, et toute l'énergie incidente est réfléchie. Les formules de Fresnel restent cependant applicables, à condition de considérer des rapports d'amplitudes R et $R_\perp$ complexes. L'introduction de ces quantités complexes signifie que les ondes ne sont plus en phase (ou en opposition de phase). Le déphasage obtenu par réflexion n'est pas le même pour les deux composantes, et il en résulte que, si l'onde incidente est polarisée rectilignement, l'onde réfléchie est polarisée en général elliptiquement.

La théorie indique également ce que devient l'onde réfractée lorsque l'angle d'incidence dépasse l'angle limite. La phase dans le second milieu est imaginaire, et l'onde décroît exponentiellement en fonction de la distance à la surface de séparation. Cette onde, appelée onde évanescente, ne transporte aucune énergie sur une distance supérieure à la longueur d'onde. On peut cependant l'observer, dans le cas des ondes hertziennes ayant une longueur d'onde de quelques centimètres, si l'on déplace un détecteur très proche du dioptre. Les équations de Maxwell donnent aussi une solution pour un milieu matériel parfaitement conducteur, un métal par exemple. Il existe à l'intérieur du métal une onde amortie ne transportant aucune énergie. L'onde réfléchie est en avance de phase sur l'onde incidente d'une valeur comprise entre $\pi/2$ et π. Dans le cas de la réflexion oblique, le déphasage n'est pas le même pour les deux composantes polarisées, de sorte que si l'onde incidente est polarisée rectilignement, l'onde réfléchie est polarisée elliptiquement.

Tous les déphasages calculés précédemment concernent le champ électrique. Cela se justifie, car c'est le champ électrique, et non le champ magnétique, qui provoque tous les effets lumineux, aussi bien les effets photochimiques sur la rétine ou sur une plaque photographique que l'excitation d'une substance fluorescente. Un moyen de le prouver expérimentalement est donné par l'expérience de Wiener (*fig.* 45). Un faisceau parallèle de lumière monochromatique tombe normalement sur un miroir métallique. Il y a interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie avec formation d'ondes stationnaires. Le champ électrique est nul sur la surface du miroir et dans des plans équidistants de $\lambda/2$; il est maximal dans des plans décalés de $\lambda/4$ par rapport à ces plans nodaux. Par contre, le champ magnétique est maximal là où le champ électrique est nul, et réciproquement. Une plaque photographique P est disposée près du miroir, légèrement inclinée par rapport à lui. Elle montre après développement une impression à l'endroit des ventres de champ électrique. L'expérience, réalisée avec une pellicule fluorescente, donne le même résultat.

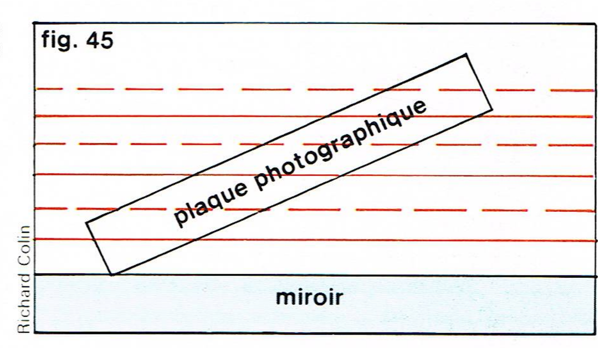
Le fait que le vecteur lumineux soit lié au champ électrique se comprend si l'on considère la force exercée par une onde électromagnétique sur une particule matérielle de charge e et de vitesse v :

$$\vec{f} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ étant égaux, la force est due essentiellement à $\vec{E}$, puisque la vitesse v est petite devant la vitesse de la lumière c. Par conséquent, bien que l'énergie lumineuse soit composée pour moitié d'énergie électrique et pour moitié d'énergie magnétique, on peut considérer que seul le champ électrique a une action sur la matière.

Optique cristalline

Dans un cristal, les atomes sont régulièrement disposés selon un réseau. Lorsqu'une onde électromagnétique de longueur d'onde comparable à celle des distances interatomiques frappe un cristal, il y a diffraction, comme pour un réseau ordinaire. Cela ne se produit qu'avec des rayons X. Pour les radiations optiques, le cristal se comporte comme un corps homogène. Par contre, il n'est pas en général isotrope, c'est-à-dire que ses propriétés ne sont pas les mêmes dans toutes les directions de l'espace. En particulier, sous l'action d'un champ électrique, le milieu acquiert une induction électrique qui est



linéaire, mais dont la direction n'est pas parallèle à celle du champ. La résolution des équations de Maxwell montre alors que la direction de propagation de l'énergie, c'est-à-dire le rayon lumineux, n'est plus perpendiculaire au plan d'onde. C'est la vitesse de propagation des plans d'onde, appelée vitesse normale, qui est égale à $\frac{c}{n}$ (n étant l'indice de réfraction). En second lieu, étant donné une direction de plan d'onde, le plan de polarisation, contenant le champ magnétique, ne peut pas avoir une direction quelconque autour de la normale. Il existe deux directions privilégiées, perpendiculaires entre elles, suivant lesquelles la vibration se propage à deux vitesses différentes. Une onde de polarisation rectiligne quelconque se sépare en deux composantes polarisées portées par ces directions. Il s'introduit entre celles-ci une différence de phase qui augmente proportionnellement à la distance parcourue. On obtient ainsi une polarisation elliptique qui varie au fur et à mesure de la propagation.

Le comportement optique d'un milieu anisotrope peut être complètement représenté par une ellipsoïde des indices, les demi-axes ayant les longueurs n_1, n_2, n_3. Si l'on se donne un plan d'onde d'orientation quelconque, il est possible de déterminer les directions privilégiées de polarisation, et les indices n' et n'' correspondants. L'intersection de l'ellipsoïde et d'un plan d'onde passant par son centre est une ellipse : les axes de cette ellipse indiquent les deux directions perpendiculaires cherchées, et les longueurs des demi-axes sont égales à n' et n''.

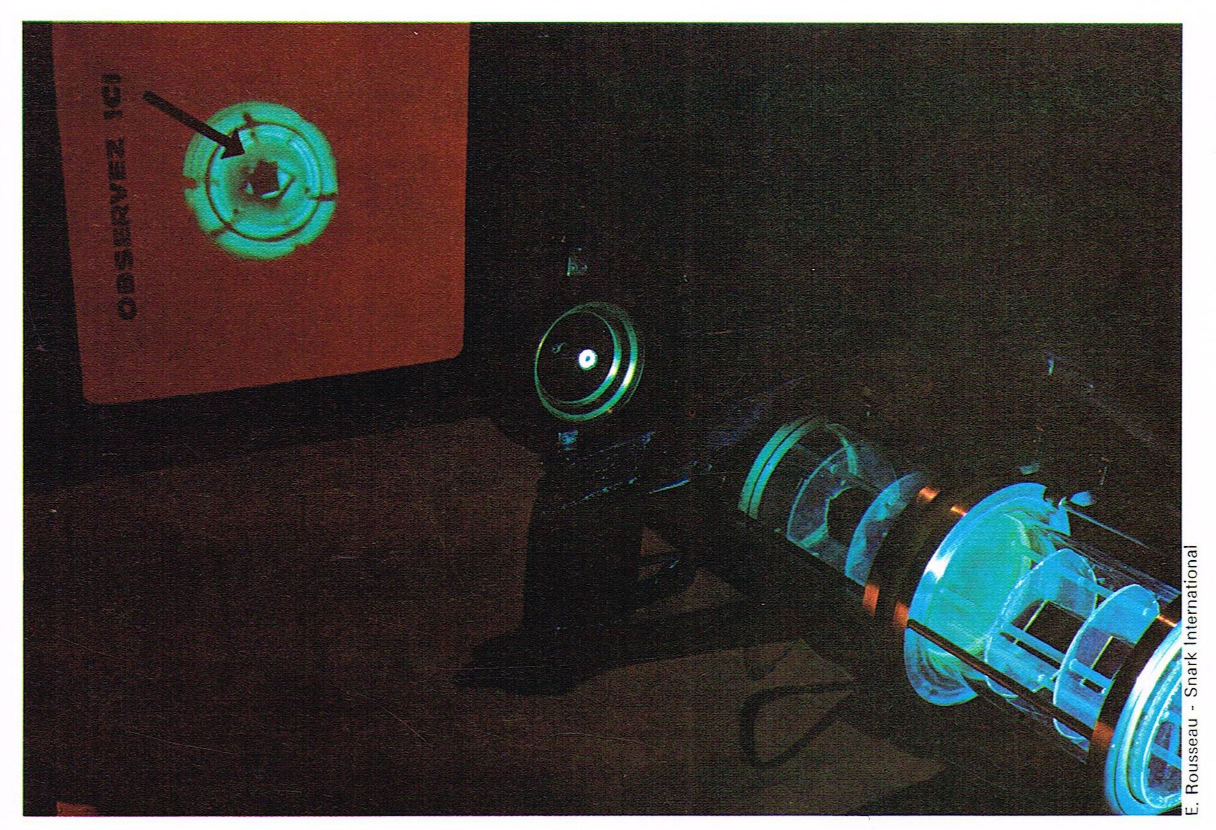
L'ellipsoïde des indices permet également de construire les surfaces d'onde, c'est-à-dire les surfaces atteintes par la lumière issue d'une source ponctuelle, au bout d'un temps donné. Pour un milieu isotrope ce sont des sphères, pour un cristal ce sont des surfaces à deux nappes, puisque à chaque direction de plan d'onde correspondent deux vitesses de propagation différentes.

L'orientation des axes principaux de l'ellipsoïde dépend évidemment de la nature et des symétries du cristal. Ceux qui ont la symétrie la plus élevée ont leurs trois indices n_1, n_2 et n_3 égaux. Ils se comportent donc, du point de vue optique, comme des corps isotropes ; c'est le cas du sel gemme (NaCl) et de la fluorine (CaF_2). Le second groupe est formé des cristaux ayant deux indices égaux. Leur ellipsoïde possède un axe de révolution appelé axe optique. Ces cristaux uniaxes sont les plus employés pratiquement. Leur surface d'onde est formée par une sphère et un ellipsoïde de révolution tangents aux deux pôles.

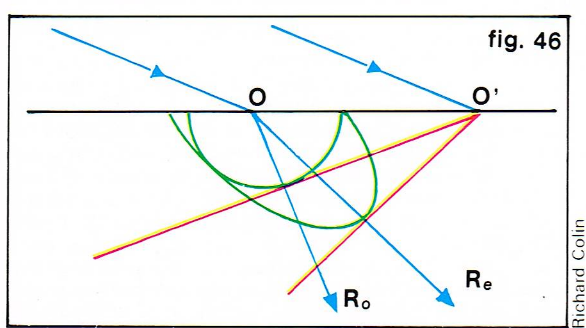
Le tableau suivant en donne quelques exemples, avec la valeur de leur indice ordinaire et de leur indice extraordinaire (l'indice extraordinaire est celui qui correspond à l'axe de révolution) :

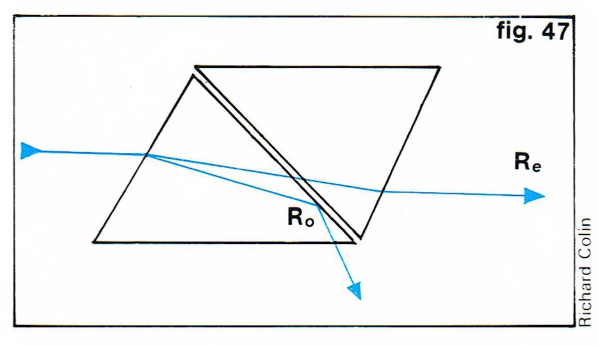
	n_o	n_e
Quartz (SiO_2)	1,544 2	1,553 3
Spath (CO_3Ca)	1,658 4	1,486 4
$NaNO_3$	1,585	1,336

Le spath est celui qui est le plus utilisé, car c'est lui qui présente la différence $n_o - n_e$ la plus importante, tout en étant facile à se procurer. Le troisième groupe, celui des cristaux biaxes, comprend ceux qui ont trois indices inégaux (mica, gypse, topaze).



◀ *Tout dispositif servant à produire de la lumière polarisée à partir de la lumière naturelle est appelé* polariseur : *il prend le nom d'*analyseur *lorsqu'il est utilisé pour polariser la lumière émergeant d'un appareillage. Ici, un ensemble polariseur-analyseur (Nicols).*





◀ *A gauche, figure 46 : construction des deux rayons réfractés à la surface d'un dioptre air-spath. La surface d'onde, centrée en O, est composée d'une sphère donnant le rayon ordinaire* OR_o, *et d'un ellipsoïde de révolution donnant le rayon extraordinaire* OR_e. *A droite, figure 47 : un prisme de Nicol élimine le rayon ordinaire* R_o. *Avant l'invention des Polaroïds, c'était le polariseur le plus employé.*

Polariseurs

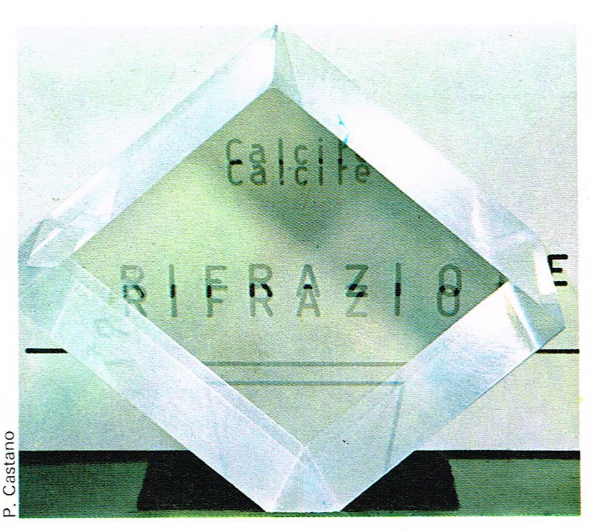
On appelle polariseur tout dispositif servant à produire de la lumière polarisée rectilignement, à partir de la lumière naturelle. Il est baptisé analyseur lorsqu'il est utilisé pour polariser la lumière émergeant d'un appareillage afin de déterminer sa direction de polarisation. Nous avons déjà décrit un premier type d'appareil utilisé pratiquement : la « pile de glaces ». Un autre procédé utilise un cristal de spath convenablement préparé : c'est le prisme de Nicol. Enfin certains corps ont la propriété d'absorber fortement une des composantes, et même de la supprimer si l'épaisseur est suffisante : on dit que de tels milieux sont dichroïques. C'est le cas de la tourmaline que l'on remplace maintenant par des lames appelées « Polaroïds ».

Considérons le dioptre plan formé par la surface de séparation d'un cristal de spath et l'air (*fig.* 46). Soit un rayon incident arrivant au point O, formé de lumière naturelle. Celle-ci doit être décomposée en deux composantes polarisées, correspondant aux deux directions privilégiées de propagation. La surface d'onde centrée en O permet de construire les deux rayons lumineux réfractés correspondants. Elle se compose d'une sphère et d'un ellipsoïde, puisque le milieu est uniaxe. Du point O', ayant même phase que la surface d'onde, menons les plans tangents à la sphère et à l'ellipsoïde : ce sont les deux plans d'onde cherchés. On en déduit les deux rayons réfractés : le rayon OR_o est le rayon ordinaire, qui suit les lois de Descartes ; le rayon OR_e est le rayon extraordinaire, qui ne les suit pas, et qui, en particulier, n'est généralement pas dans le plan d'incidence. Cette double réfraction, ou *biréfringence*, fait qu'une lame à faces parallèles donne deux images d'un même objet. Le principe du prisme de Nicol est de supprimer un des deux rayons par une réflexion totale. Un cristal de spath est scié en diagonale et recollé avec du baume du Canada dont l'indice de réfraction est tel qu'il réfléchit totalement le rayon ordinaire et laisse passer le rayon extraordinaire. Ce dernier sort polarisé perpendiculairement au plan d'incidence (*fig.* 47).

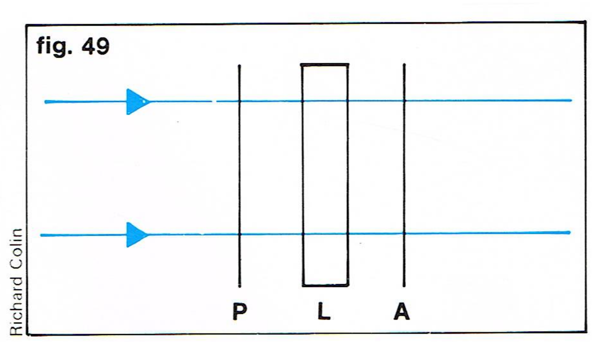
Dans le cas des ondes hertziennes, un ensemble de fils conducteurs parallèles se comporte comme un polariseur. Lorsque le champ électrique est parallèle à la direction des fils, il excite les électrons du métal qui peuvent se mouvoir librement. L'énergie du rayonnement est donc transférée au conducteur. Par contre, si le champ est perpendiculaire et si le parcours moyen des électrons pendant une période est plus grand que l'épaisseur du fil, l'onde n'est pas absorbée. Cela se produit lorsque la longueur d'onde est grande par rapport à cette épaisseur. La *figure* 48 représente le schéma d'un polariseur et d'un analyseur pour des ondes radio. Le procédé a été étendu au domaine des ondes lumineuses par le « Polaroïd », inventé en 1938 par Land. Une feuille de plastique constituée de longues chaînes hydrocarbonées est fortement étirée suivant une dimension. Cela a pour effet d'aligner les molécules. La feuille est ensuite plongée dans une solution contenant de l'iode. Celui-ci se fixe sur les chaînes et apporte des électrons de conduction qui peuvent se déplacer librement tout le long de la chaîne. On obtient ainsi une grille de conducteurs parallèles dont l'épaisseur est très inférieure à la longueur d'onde de la lumière. Les Polaroïds sont des polariseurs peu coûteux mais ils ont l'inconvénient d'absorber une partie de la lumière.

▶ *A gauche, double image produite par un cristal de spath d'Islande. A droite, figure 49 : le montage standard pour l'étude de la biréfringence d'une lame cristalline L consiste à la placer entre polariseur P et analyseur A, dans un faisceau de lumière parallèle. Chaque élément peut tourner autour de l'axe.*

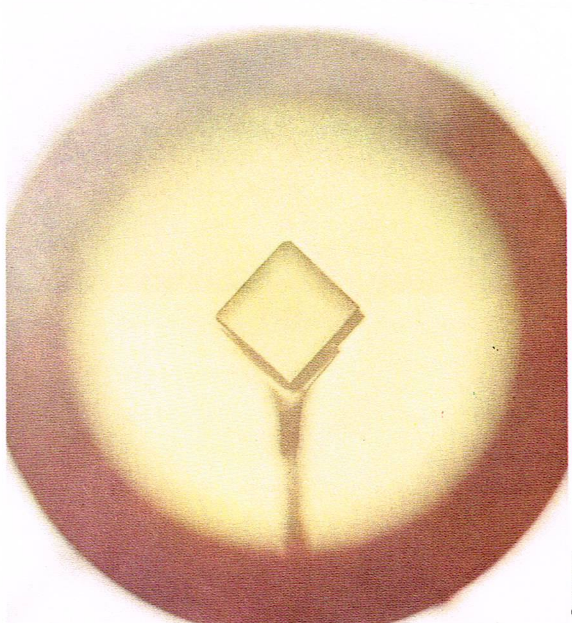
▶ *Page ci-contre, en haut, figure 50 : une masse de verre soumise à une force F développe une biréfringence variable en chaque point. Le montage de la figure 49 permet de rendre visibles les lignes d'égale tension.*



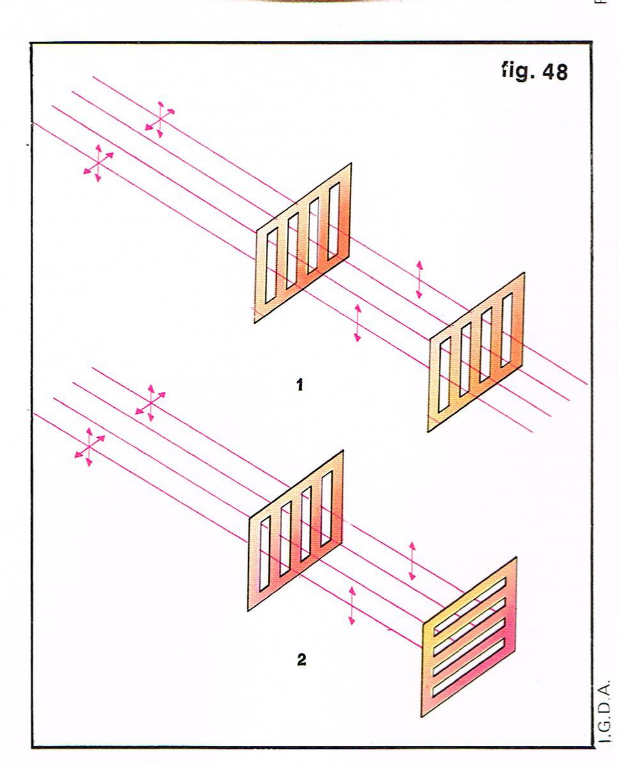
P. Castano



Richard Colin


P. Castano

▶ *Prisme de Nicol vu de face dans un montage optique.*



I.G.D.A.

▶ *Figure 48 ; action de deux trames de fils conducteurs sur un faisceau d'ondes hertziennes non polarisées naturellement : (1) polariseurs parallèles. (2) polariseurs croisés.*

Analyse d'une vibration lumineuse

Considérons une lame à faces parallèles, taillée dans un cristal biréfringent, éclairée par une onde plane polarisée rectilignement. On recueille à la sortie deux ondes polarisées selon les directions privilégiées de la lame, et présentant entre elles un déphasage. Celui-ci est égal à :

$$\varphi = \frac{2\pi (n' - n'')\, e}{\lambda}$$

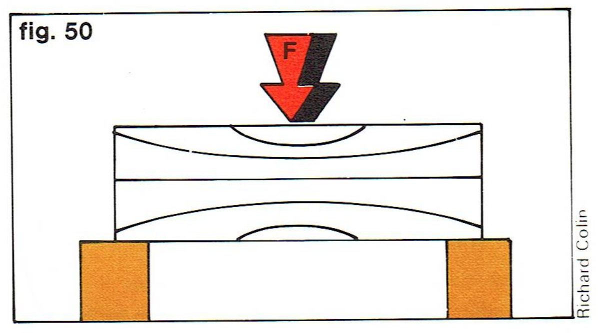
où e est l'épaisseur de la lame, n' et n'' les deux indices, et λ la longueur d'onde. La lumière obtenue est donc polarisée elliptiquement. On appelle lame quart d'onde une lame telle que $\varphi = \pi/2$. Dans le cas particulier où la vibration incidente est à 45° des directions privilégiées, la lumière émergente est polarisée circulairement. L'ensemble composé d'un polariseur et d'une lame quart d'onde est appelé pour cette raison polariseur circulaire. Il en existe deux types, droit ou gauche, selon le sens de rotation du vecteur champ électrique.

Pour analyser la polarisation d'une vibration lumineuse donnée, il suffit de disposer d'un polariseur rectiligne et d'une lame quart d'onde. Si la lumière est polarisée rectilignement, on le constate immédiatement avec l'analyseur ; il y a extinction pour une certaine direction. Si la lumière est elliptique, la lame quart d'onde, convenablement orientée, la transforme en lumière rectiligne, ce que l'on contrôle avec l'analyseur. Si la lumière est circulaire, l'orientation de la lame est indifférente. Enfin la lumière naturelle se reconnaît au fait qu'il n'y a aucune variation de l'intensité transmise, quelle que soit l'orientation de chacun des éléments.

Une lame n'est réellement quart d'onde que pour une longueur d'onde déterminée. Le montage classique permettant d'étudier une lame biréfringente L est décrit sur la *figure* 49. La lame est placée entre un polariseur P et un analyseur A, dont les axes optiques sont croisés et placés à 45° des directions privilégiées de L. Si le déphasage est égal à 2π, pour une certaine couleur, il y a extinction. S'il est égal à π, il y a un maximum de lumière. Une lame quart d'onde donne une intensité diminuée de moitié, d'ailleurs indépendante de l'orientation de A. La lumière blanche est donc en général partiellement absorbée, et on observe un mélange de couleurs : c'est le phénomène de polarisation chromatique. Le microscope polarisant utilise ce principe : il permet d'observer des lames minces de cristaux, des polariseurs étant placés dans le condenseur et l'oculaire.

Biréfringence accidentelle

Lorsqu'un corps isotrope est soumis à une perturbation extérieure suivant une certaine direction, il devient anisotrope, et par conséquent biréfringent. Un bloc de matière transparente, du verre par exemple, placé entre deux polariseurs croisés, éteint complètement un faisceau de lumière parallèle. Si cet échantillon est soumis à une force extérieure, la tension qui en résulte en chaque point y fait apparaître une biréfringence, la différence d'indice étant proportionnelle à la tension. Lorsque l'on observe le solide à travers l'analyseur, on voit que la lumière est éteinte en certains points et pas en d'autres, selon le déphasage. En lumière blanche, on observe des variations de couleurs. La *figure* 50 montre l'aspect d'un parallélépipède de verre placé sur deux cales et soumis à une force verticale. La *photo-élasticimétrie* est une méthode d'étude expérimentale des tensions développées dans les systèmes élastiques, fondée sur ce principe. On exécute des modèles réduits en matière trans-



Richard Colin

parente de pièces de machine ou de constructions, et on les soumet à des efforts calculés en fonction des efforts réels par les lois de la similitude mécanique.

La perturbation exercée sur le milieu isotrope peut également être un champ électrique. Les molécules de sulfure de carbone présentent un moment électrique important et tendent à s'orienter dans la direction du champ. L'anisotropie qui en résulte peut être observée en plaçant une cuve contenant le liquide entre les deux armatures d'un condensateur. Sous l'épaisseur de 20 cm, il faut un champ de 60 000 V/cm pour transformer la cuve en lame quart d'onde. Ce phénomène, appelé « effet Kerr », permet de réaliser un obturateur de lumière beaucoup plus rapide que tout procédé mécanique. Il permet également de moduler une intensité lumineuse par un courant électrique, par exemple pour l'enregistrement sonore d'un film de cinéma.

Il existe un phénomène analogue avec le champ magnétique, mais son intensité est beaucoup plus faible, et il n'est pas utilisé pratiquement.

Polarisation rotatoire

Lorsque l'on place entre deux polariseurs croisés une lame d'un cristal uniaxe dont les faces sont perpendiculaires à l'axe optique, on doit s'attendre que l'extinction subsiste. En effet, les deux indices sont égaux, et une vibration polarisée rectilignement doit alors se propager sans altération, quelle que soit sa direction. Il en est tout autrement dans le cas du quartz : la lumière est rétablie ; mais l'on constate qu'en faisant tourner l'analyseur, on peut rétablir l'extinction. Cela montre que la lumière qui a traversé la lame a conservé une polarisation rectiligne, mais que le plan de polarisation a tourné d'un certain angle. La découverte du pouvoir rotatoire, appelé encore activité optique, a été faite par Arago en 1811. Il s'agit d'un phénomène important, puisque 1 mm de quartz occasionne une rotation de 22° pour la lumière jaune du sodium. Ces cristaux de quartz se divisent en deux catégories : ceux qui font tourner la polarisation dans le sens des aiguilles d'une montre, pour l'observateur, sont dits dextrogyres ; ils sont dits lévogyres dans le cas contraire. Les deux espèces peuvent d'ailleurs se distinguer par la forme extérieure des cristaux. Le pouvoir rotatoire appartient également à des substances isotropes, par exemple l'essence de térébenthine, ou encore des solutions dans l'eau de sucre ou d'acide tartrique.

Dans un milieu anisotrope, à une direction de plan d'onde correspondent en général deux vibrations susceptibles de se propager sans altération. Ce sont deux vibrations polarisées rectilignement, et perpendiculaires, qu'on appelle ondes propres. Dans le cas du quartz ayant son axe optique normal au plan d'onde, les ondes propres sont les deux vibrations circulaires droite et gauche : ce sont les seules qui possèdent la symétrie de révolution et qui ne soient pas modifiées par rotation. Les vitesses de propagation diffèrent pour ces deux ondes, et c'est ce qui provoque le phénomène de polarisation rotatoire. En effet, toute onde polarisée rectilignement peut être considérée comme la somme de deux ondes circulaires droite et gauche, d'amplitudes égales (*fig.* 51). Après la traversée d'une certaine épaisseur de matière, ces ondes sont déphasées d'un certain angle φ, et leur somme donne une polarisation rectiligne ayant tourné d'un angle $\varphi/2$. L'activité optique est donc simplement due à une biréfringence circulaire. La différence d'indice est extrêmement faible (0,000 071 pour le quartz), mais on peut cependant observer le phénomène de double réfraction pour un rayon lumineux.

On constate que le pouvoir rotatoire varie énormément avec la longueur d'onde utilisée : il est à peu près inversement proportionnel à son carré. Il est donc trois fois plus important pour le violet que pour le rouge.

Lorsque le plan d'onde n'est plus perpendiculaire à l'axe optique, les ondes propres deviennent elliptiques, puis se réduisent à des droites, comme dans le cas d'un cristal uniaxe ordinaire. Dans le cadre de la théorie électromagnétique, il est possible d'expliquer l'activité optique en supposant que le vecteur induction électrique dépend linéairement du champ, ainsi que ses dérivées premières d'espace. Mais indépendamment de toute théorie, des considérations de symétrie permettent de prévoir le phénomène. Des vibrations rectilignes subissent

▼ ***Ci-dessous, un arthropode observé avec un interféromètre à polarisation ; chaque couleur caractérise la déformation de la surface de l'eau au voisinage de l'Insecte.***

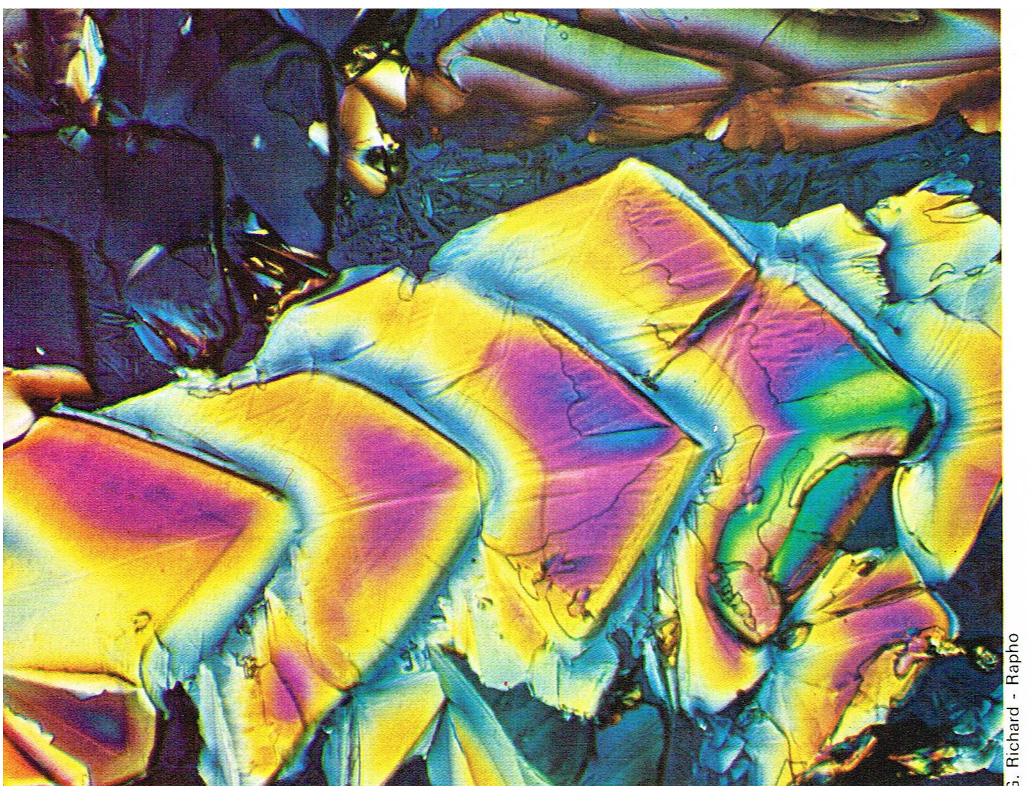
En bas, figure 51 : la somme de deux polarisations circulaires droite et gauche est une polarisation rectiligne.



Institut d'optique théorique et appliquée, associé au Centre national de la recherche scientifique

fig. 51

Richard Colin



G. Richard - Rapho

▲ *Cristaux d'acide tartrique vus en lumière polarisée.*

des rotations de sens opposés, ce qui prouve que le milieu ne présente ni centre, ni plan de symétrie. Pasteur a montré que ces corps présentent une dissymétrie de structure : leurs molécules ne sont pas superposables à l'image dans une glace. C'est le cas des composés organiques possédant un carbone asymétrique, c'est-à-dire lié à quatre radicaux différents. L'acide tartrique, de formule :

$$CO_2H—CHOH—CHOH—CO_2H$$

répond à cette définition. Il en existe deux formes, respectivement droite et gauche, appelées isomères optiques. Elles cristallisent indépendamment, et les cristaux obtenus ont des formes symétriques l'une de l'autre. Dans le cas des cristaux inorganiques comme le quartz, c'est l'architecture cristalline qui provoque la dissymétrie : les molécules de SiO_2 sont disposées suivant des hélices circulaires dont le sens d'enroulement peut être à droite ou à gauche.

La mesure du pouvoir rotatoire est une opération très courante en chimie. Pour un corps inconnu, elle donne un renseignement précieux sur la structure de la molécule. Pour un composé connu, elle permet de le doser très rapidement lorsqu'il est en solution. Elle est très employée, par exemple, dans l'industrie du sucre. L'appareil le plus utilisé est le polarimètre de Biot : il se compose d'un polariseur fixe et d'un analyseur pouvant tourner, et dont on mesure l'angle. On éclaire par une lumière monochromatique et on règle à l'extinction. On introduit ensuite la solution dans une cuve située entre polariseur et analyseur, et on mesure la rotation nécessaire pour rétablir l'extinction.

L'action d'un champ magnétique sur un corps transparent isotrope provoque une polarisation rotatoire : un rayon lumineux se déplaçant parallèlement au champ voit sa polarisation tourner. Il y a une différence fondamentale avec la biréfringence circulaire des milieux actifs : le sens de rotation du vecteur lumineux ne dépend que du sens du courant magnétique, et non pas du sens de propagation de la lumière. Le corps est donc dextrogyre dans un sens, lévogyre dans l'autre.

Cohérence

La notion de cohérence intervient dans de nombreux problèmes d'optique physique. Il est impossible de mettre en évidence les phénomènes d'interférence, avec des sources incohérentes, sans précautions particulières. Le fait que la lumière naturelle ne soit pas polarisée est dû à ce qu'il y a addition d'un très grand nombre d'atomes émetteurs incohérents dont les polarisations sont aléatoires. D'autre part, les sources de lumière cohérente sont nécessaires pour l'holographie et le filtrage des fréquences spatiales. Il convient de distinguer cohérence temporelle et cohérence spatiale, qui peuvent se mesurer par l'extension du paquet d'ondes émis. C'est pourquoi nous décrirons tout d'abord les questions de modulation, paquet d'ondes et vitesse de groupe.

Vitesse de phase et vitesse de groupe

La distinction entre vitesse de phase et vitesse de groupe est générale pour tous les mouvements vibratoires qui se propagent, acoustiques, électromagnétiques ou autres. Lorsque l'on veut envoyer une information d'un point à un autre à l'aide d'une onde, il est impossible d'utiliser une onde monochromatique. En effet, celle-ci est sinusoïdale et se reproduit indéfiniment égale à elle-même dans le temps et dans l'espace. Une onde modulée possède donc un spectre de fréquences. Considérons, pour simplifier, le cas de l'addition de deux ondes monochromatiques :

$$D(t) = A \cos \omega_1 \left(t - \frac{x}{v_1}\right) + A \cos \omega_2 \left(t - \frac{x}{v_2}\right)$$

Les deux ondes, de pulsations ω_1 et ω_2, se propagent suivant l'axe Ox, avec les vitesses v_1 et v_2. On peut écrire :

$$D(t) = 2A \cos\frac{1}{2}\left[(\omega_1 - \omega_2)\,t - x\left(\frac{\omega_1}{v_1} - \frac{\omega_2}{v_2}\right)\right] \cos\frac{1}{2}\left[(\omega_1 + \omega_2)\,t - x\left(\frac{\omega_1}{v_1} + \frac{\omega_2}{v_2}\right)\right]$$

La résultante est donc une vibration qui se propage avec une pulsation et une vitesse moyennes par rapport à celles des deux vibrations initiales. L'amplitude est modulée sinusoïdalement avec une pulsation $\omega_1 - \omega_2$: c'est le phénomène de battements (*fig.* 52). Quant à la vitesse de propagation des maximums de l'amplitude, elle est égale à :

$$\textbf{(4)} \qquad u = \frac{\Delta\omega}{\Delta\left(\frac{\omega}{v}\right)}$$

On peut démontrer que, pour un ensemble d'ondes ayant des fréquences voisines, la vitesse de propagation de l'information et de l'énergie n'est pas égale à une moyenne des vitesses v des différentes composantes sinusoïdales, mais à la vitesse de groupe u, donnée par la formule **(4)**. La vitesse v est appelée par opposition vitesse de phase ; c'est elle qui intervient dans toutes les questions d'interférence et de diffraction, mais elle n'est pas observable directement.

Lorsque v ne dépend pas de ω, la vitesse de groupe est simplement égale à la vitesse de phase, celle-ci étant commune à toutes les fréquences. Par contre, si le milieu est fortement dispersif, il peut y avoir une différence notable, qui avait été découverte par Foucault lorsqu'il tentait de mesurer la vitesse de la lumière dans les milieux matériels. On trouve dans tous les cas une valeur inférieure à la vitesse de phase, déterminée par ailleurs par la formule $v = \frac{c}{n}$, où n est l'indice de réfraction.

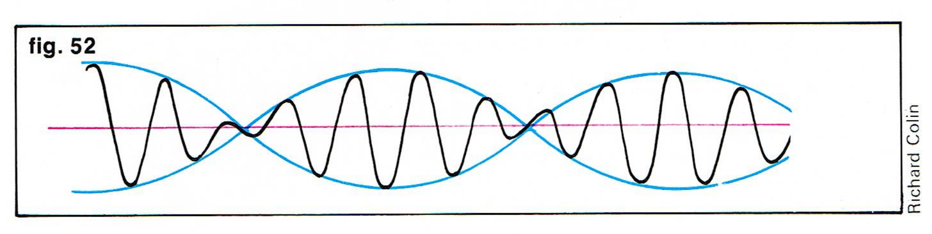
Milieu	Écart relatif
Air	$0{,}7 \cdot 10^{-5}$
Eau	0,015
Cinnamate d'éthyle	0,08

Modulation

Au lieu de considérer l'addition de deux ondes sinusoïdales de fréquences différentes, cherchons la figure formée par la composition d'une infinité d'ondes de fréquences repérées par l'indice entier n, égales à νn. Elle représente la fonction :

$$\textbf{(5)} \qquad F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

▼ *Figure 52 : battements produits par l'addition de deux ondes de pulsations ω_1 et ω_2. Les courbes bleue et noire se déplacent respectivement aux vitesses u et v.*



Richard Colin

A_n est l'amplitude de chaque onde ; ω est la pulsation fondamentale (on a, comme d'habitude, $\omega = 2\pi\nu$) ; les ondes de pulsation $n\omega$ sont les harmoniques. La somme infinie écrite dans la formule **(5)** n'a un sens que si A_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, si l'on veut que F (t) reste fini. On l'appelle une série de Fourier ; ses propriétés sont les suivantes, moyennant quelques précautions mathématiques :

— F (t) est périodique, sa période est égale à celle de l'onde fondamentale ;

— connaissant F (t), on peut calculer A_n par la formule :

$$A_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(t) \cos(n\omega t - \varphi_n)\, dt$$

L'énergie totale est égale à : $I = \Sigma A_n^2$.

Si ω est suffisamment petit, on peut considérer, pour tous les harmoniques où n est assez grand, que A_{n+1} diffère infiniment peu de A_n. La quantité $n\omega$ devient alors une variable continue, et la série de Fourier peut s'exprimer par une intégrale :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Dans cette formule, qui n'est autre qu'une transformation de Fourier faisant correspondre la fonction F (t) à la fonction A (ω), le déphasage a été inclus dans l'amplitude A (ω) sous la forme d'un facteur complexe. A (ω) représente la répartition spectrale de l'onde F (t), c'est-à-dire la densité d'ondes monochromatiques contenues dans un intervalle infiniment petit $d\omega$. On démontre que les propriétés de la série de Fourier, sauf la première, s'étendent à la transformation de Fourier.

Un important exemple d'onde non sinusoïdale est celui d'une impulsion très intense et de durée très brève Δt. Pour trouver sa distribution spectrale, sans passer par le formalisme de la transformation de Fourier, additionnons toutes les ondes de pulsations comprises entre ω et $\omega + \Delta\omega$, d'amplitudes égales A et ayant même phase à l'instant $t = 0$. Si l'on a N ondes dans cet intervalle, la valeur de F (t) pour $t = 0$ est égale à NA. La période T des battements entre les deux fréquences extrêmes est $2\pi/\Delta\omega$; par conséquent, pour $t \simeq T$, les phases sont uniformément distribuées, et la somme est à peu près nulle. Elle ne redevient égale à NA que pour un temps égal à la période de battement de deux fréquences voisines $2\pi N/\Delta\omega$.

Lorsque l'on fait tendre N vers l'infini, la valeur de F (t) tend vers l'infini pour $|t| < T$ et reste nulle tout le reste du temps. On a donc bien construit l'impulsion très brève et très intense cherchée, à l'aide d'une distribution continue et uniforme de fréquences entre ω et $\omega + \Delta\omega$, avec la relation : $\Delta t \simeq 2\pi/\Delta\omega$. On peut encore l'écrire :

(6) $$\Delta\nu \cdot \Delta t \simeq 1$$

Lorsque $\Delta\omega \to \infty$, la fonction F (t) devient infiniment étroite et tend vers ce que l'on appelle une distribution « δ ». Quant à la distribution spectrale, c'est tout simplement une constante. On peut montrer que, pour donner une distribution δ non nulle pour $t = t_0$, il faut une distribution spectrale sinusoïdale, égale à $\cos \omega t_0$.

Pour une onde sinusoïdale de pulsation ω_0, il est évident que la distribution spectrale est une distribution δ, non nulle pour $\omega = \omega_0$. Cela n'est qu'un cas particulier du théorème de réciprocité de Fourier : la transformée de Fourier d'une fonction F (t), elle-même transformée de Fourier de la fonction A (ω), est égale à la fonction A (ω). Ce théorème est une généralisation de la deuxième propriété des séries de Fourier. On peut encore appliquer la formule **(6)**, en passant à la limite, puisque le temps d'émission Δt est infini, mais que l'étalement en fréquence $\Delta\omega$ est nul.

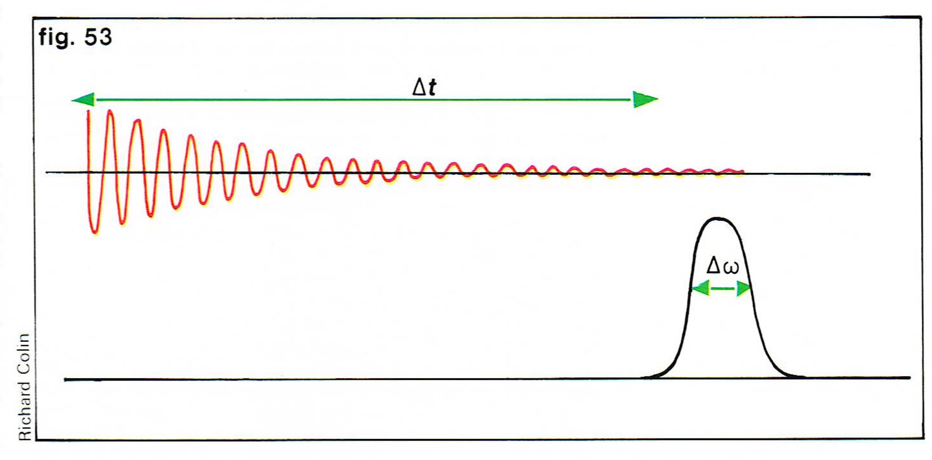
Un autre exemple est celui d'un oscillateur harmonique qui est branché, puis atteint rapidement une amplitude maximale A, conserve une oscillation sinusoïdale de pulsation ω_0 pendant un temps t, puis est éteint et n'émet plus. L'onde n'est pas purement monochromatique, mais est certainement dominée par la pulsation ω_0. On peut montrer en effet que la distribution spectrale est représentée par une courbe présentant un maximum vers ω_0 et non nulle sur un intervalle Δt tel que

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \simeq 2\pi$$

La formule **(6)** est donc tout à fait générale ; on peut l'appliquer par exemple pour calculer la largeur de bande nécessaire à la modulation de signaux radio-électriques. L'écran d'un récepteur de télévision reçoit tous les 1/30 s un ensemble de spots clairs ou sombres. Il y a 500 lignes à 500 spots chacunes, soit par seconde $8 \cdot 10^6$ éléments d'information. Chaque impulsion dure donc 10^{-7} seconde et la largeur de la bande de fréquence nécessaire à la transmission est égale à $\Delta\nu = 1/\Delta t$, soit 10 mégahertz. Cela permet de calculer le nombre d'émetteurs qui peuvent exister sans gêner à l'intérieur d'une gamme d'ondes donnée.

Cohérence temporelle

Dans les sources usuelles, la lumière est produite par transformation d'énergie thermique (flamme, lampe à incandescence, étoile) ou électrique (décharge gazeuse, tube fluorescent) en énergie électromagnétique. Chaque atome émetteur reçoit à un instant complètement aléatoire une énergie sous forme de choc ou d'ionisation, ce qui fait passer un ou plusieurs électrons du niveau fondamental à une couche supérieure. C'est en retombant sur la couche fondamentale que l'électron se comporte comme une minuscule antenne. Il émet un paquet d'ondes et non pas une onde monochromatique, puisque la durée est limitée. Il y a incohérence pour deux raisons : la première



▲ ***Figure 53 : aspect du train d'ondes émis par un atome isolé, et distribution spectrale correspondante.***

est que tous les atomes n'ont entre eux aucune relation de phase déterminée, la seconde est qu'un même atome émet différents trains d'ondes à des instants quelconques. C'est pourquoi l'on distingue cohérence spatiale et cohérence temporelle.

La durée Δt de chaque train d'ondes est une mesure de la cohérence temporelle d'une source. Pour déterminer expérimentalement celle-ci, une des méthodes les plus directes consiste à former dans le vide un pinceau d'atomes sortant d'un four contenant une vapeur. Ces atomes sont excités à un endroit de leur parcours, et on mesure l'intensité d'émission en fonction de la distance. On trouve des valeurs de 10^{-9} à 10^{-7} seconde.

A cette valeur de la cohérence temporelle Δt est associée une largeur spectrale par la formule **(6)**. Pour la lumière visible, la longueur d'onde présente une dispersion de l'ordre de $5 \cdot 10^{-5}$ Å (*fig.* 53). En fait, dans la plupart des cas, il est impossible d'observer cette largeur naturelle. Dans un gaz qui n'est pas au zéro absolu, les atomes qui émettent sont animés de vitesses désordonnées et élargissent donc la raie spectrale bien au-delà de la largeur naturelle. Pour un solide ou un liquide incandescent, il y a un couplage mécanique très important entre les atomes, d'une part, et une réabsorption avec réémission importante du rayonnement, d'autre part. Cela aboutit à un état d'équilibre thermique (qui est appelé en thermodynamique *rayonnement du corps noir*) correspondant à un spectre en fréquence continu ; on peut dire que c'est l'ensemble du corps qui émet et non chaque atome indépendamment.

Si les sources lumineuses naturelles possèdent un temps de cohérence de 10^{-7} seconde, il doit être possible d'observer un phénomène d'interférences avec deux sources distinctes, pourvu que le temps de mesure soit inférieur à 10^{-7} seconde. C'est ce qui est effectivement réalisé dans l'expérience de Brown et Twiss (1956).

Il existe des photomultiplicateurs permettant de transformer une intensité lumineuse en courant électrique, avec un temps de réponse inférieur à 10^{-7} seconde. Deux sources ponctuelles distinctes donnent des interférences matérialisées sur un plan P, comme dans les expériences usuelles, et les photomultiplicateurs sont placés en P, à une distance Δx l'un de l'autre correspondant à un déphasage φ. A φ s'ajoute bien entendu la différence de phase entre deux sources, mais cette différence est constante durant le temps de cohérence. Brown et Twiss mesurent le produit $I_1 I_2$ des deux courants et, pour avoir un signal important, font la moyenne $\langle I_1 I_2 \rangle$ sur plusieurs minutes. Le résultat est comparé au produit $\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle$ des intensités moyennes qui, lui, est indépendant de φ. On trouve expérimentalement, conformément au calcul :

$$\frac{\langle I_1 I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} = \frac{1}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

S'il n'y avait pas d'interférence observable, ce rapport serait égal à 1.

La limitation temporelle se manifeste également dans les expériences d'interférences « usuelles », où les deux sources cohérentes sont les images d'une source initiale, par le fait suivant : la différence de marche δ entre les deux faisceaux ne doit pas excéder la valeur $c/\Delta t$. En effet, au bout du temps Δt, le train d'ondes a disparu et a été remplacé par un autre, présentant avec le premier un déphasage quelconque. Pour $\Delta t = 10^{-8}$ s, on a $\delta = 3$ m. Une autre formulation équivalente consiste à dire que, pour $\delta = 3$ m, on obtient un blanc d'ordre supérieur, dû à la largeur naturelle de la source.

Dans les sources citées précédemment, la puissance fournie est dispersée soit sur tout le spectre, soit sur un grand nombre de fréquences. C'est une situation très différente de celle des ondes hertziennes émises par un circuit électrique : de tels générateurs permettent en effet de concentrer facilement 10^4 watts dans une bande plus étroite qu'un mégahertz. Comparons avec le rayonnement du Soleil : ce dernier émet pour toutes les longueurs d'onde 7 kW par cm² de surface solaire. Si l'on isolait une bande de 1 MHz dans le domaine visible, la portion de ces 7 kW serait égale à 10^{-5} W. Comparons également avec les lampes « monochromatiques » à décharge gazeuse pour lesquelles la puissance est concentrée dans un petit nombre de raies. La lampe à vapeur de mercure donne 100 W pour des largeurs en fréquence d'ordre de 10^4 MHz.

Cohérence spatiale

Soit un paquet d'ondes se propageant dans la direction de l'axe Ox et possédant une pulsation moyenne ω, et une faible dispersion $\Delta\omega$. La vibration en un point x donné s'écrit, pour l'onde centrale du paquet :

$$a = \mathrm{A} \cos (\omega t - kx)$$

où k est le nombre d'onde ($k = \omega/v = 2\pi/\lambda$).

L'étalement $\Delta\omega$ entraîne une dispersion en nombre d'onde Δk :

$$\Delta k = \frac{dk}{d\omega} \Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{u}$$

u étant la vitesse de groupe définie dans la formule **(4)**.

Par ailleurs, la largeur du paquet d'ondes dans l'espace est égale à $\Delta x = u \, \Delta t$. On a donc :

(7) $$\Delta x \cdot \Delta k \simeq 2\pi$$

Cette formule, analogue à la formule **(6)**, peut se démontrer en toute généralité par la transformation de Fourier. On retrouve par ce moyen des résultats simples de diffraction, par exemple dans le cas de l'arrivée d'une onde plane sur un écran percé d'une ouverture (*fig.* 54). Avant l'arrivée sur l'obstacle, le vecteur d'onde est parfaitement défini ; ses trois composantes sont les nombres d'ondes correspondant aux directions Ox, Oy, Oz.

Si la direction Ox est dans le plan de l'écran, l'ouverture réduit le paquet d'ondes à une dimension Δx. Il apparaît donc une dispersion k_x sur la composante du vecteur d'onde. Celui-ci peut donc varier d'un angle $\theta = \frac{k_x}{k}$ autour de la direction initiale k. On retrouve ainsi l'ordre de grandeur de la largeur angulaire, trouvée en théorie de la diffraction :

$$\theta = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

La formule donne donc une limite inférieure sur le degré de parallélisme que peut avoir un pinceau lumineux : l'ouverture angulaire est inversement proportionnelle à la dimension latérale du faisceau.

Pour la lumière visible de longueur d'onde 5 000 Å et un diamètre de 5 mm, on obtient : $\theta = 10^{-4}$ radian. On voit qu'il s'agit d'un faisceau très parallèle, et qu'il est impossible de le réaliser autrement qu'avec un laser. En effet, pour produire une onde plane avec une source ne possédant pas de cohérence spatiale, il faut utiliser une source quasi ponctuelle placée au foyer d'une lentille convergente. L'ouverture angulaire est alors égale à $\theta = d/f$, où d est la dimension de la source et f la distance focale. Pour $d = 1$ mm, $f = 10$ cm, on trouve $\theta = 10^{-2}$ radian, ce qui est très au-dessus de la limitation due à la diffraction.

Remarquons que, pour les sources habituelles, on peut définir une durée Δt en dessous de laquelle il y a cohérence temporelle. Par contre, pour ce qui est de la cohérence spatiale, il n'existe rien d'équivalent puisque, dès que l'on a deux atomes, leur déphasage est quelconque. Tout au plus peut-on dire que dans certains montages (interférences par une fente, par exemple), il existe une dimension de la source au-dessous de laquelle l'incohérence spatiale ne gêne pas l'observation.

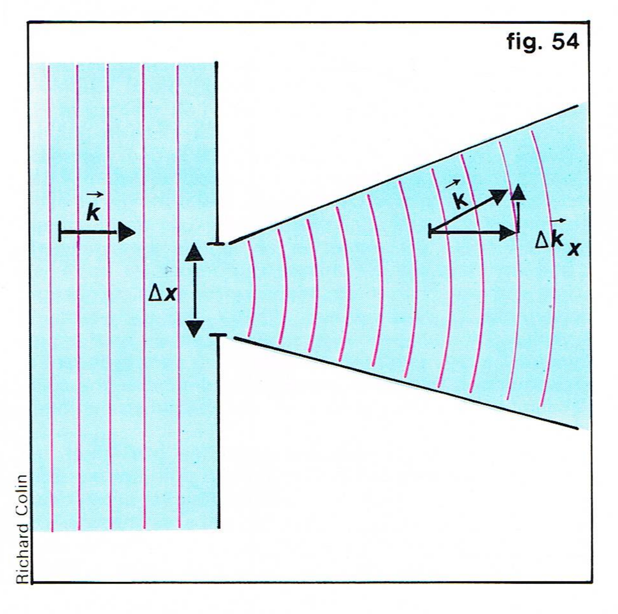
Photons

Sans entrer dans le détail de la dualité onde-corpuscule, qui fait l'objet de la mécanique quantique et qui fait intervenir des domaines variés de la physique, il est nécessaire, en optique, de donner des notions sur les photons.

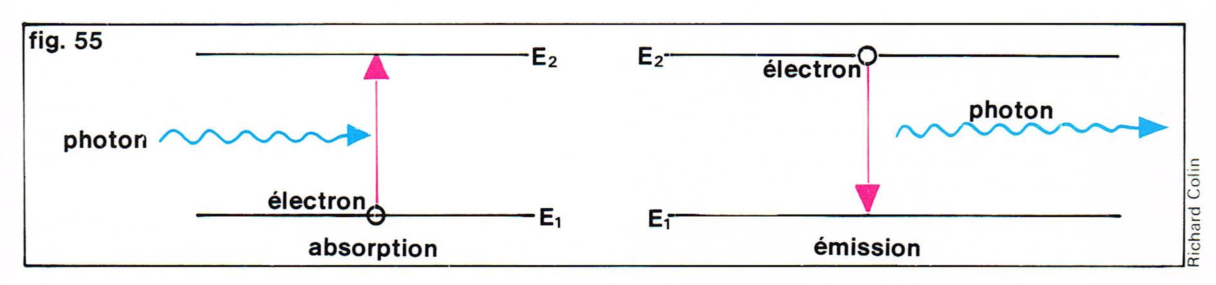
Lorsqu'il y a échange d'énergie entre deux systèmes, celui-ci se fait obligatoirement par des unités discrètes, indivisibles, appelées *quanta d'énergie*. Le quantum d'énergie électromagnétique reçoit le nom de photon. La quantité d'énergie correspondante est donnée, en fonction de la fréquence ν de la radiation, par la relation : $E = h\nu$. La constante universelle h (constante de Planck) est égale à $6{,}61 \cdot 10^{-34}$ joule-seconde. C'est une quantité microscopique, ce qui fait que le caractère discontinu ne se manifeste qu'au niveau atomique. Le photon étant indivisible, il se comporte comme une particule qui se déplace à la vitesse de la lumière avec une énergie E et une quantité de mouvement p :

$$E = h\nu \qquad p = \frac{h\nu}{c}$$

Quant à la masse qu'aurait le photon si l'on pouvait le mettre au repos, elle est nulle. La contradiction apparente entre les natures corpusculaire et ondulatoire de la lumière est levée par le fait que la mécanique qui gouverne le photon est probabiliste. La particule n'est pas localisée en général en un point précis, mais se trouve distribuée dans un certain volume. La probabilité de trouver le photon en un point est égale à l'intensité de l'onde lumi-



▶ *Figure 54 : dans une expérience de diffraction de Fraunhofer, une réduction de la dimension du paquet d'ondes à Δx entraîne un étalement Δk_x de la composante du vecteur d'onde.*



◄ *Figure 55 : absorption et émission spontanée d'un photon par un atome entre les deux niveaux d'énergie* E_1 *et* E_2*.*

neuse en ce point. D'autres quantités mécaniques peuvent aussi avoir simultanément plusieurs valeurs : ainsi la distribution des énergies E possibles est donnée par la répartition spectrale.

Des formules **(6)** et **(7)** on déduit les relations (dans lesquelles on note $\hbar = h/2\pi$) :

$$\Delta E \cdot \Delta t \simeq \hbar; \qquad \Delta x \cdot \Delta p_x \simeq \hbar;$$
$$\Delta y \cdot \Delta p_y \simeq \hbar; \qquad \Delta z \cdot \Delta p_z \simeq \hbar$$

appelées relations d'incertitude de Heisenberg.

La mécanique quantique nous apprend que les électrons appartenant à des atomes ou à des molécules peuvent se trouver sur des orbites déterminées, groupées en couches ayant chacune une énergie. A l'énergie la plus basse correspond l'état fondamental dans lequel l'électron non soumis à une perturbation extérieure va rester. Il y a des transitions possibles entre les couches, moyennant l'émission ou l'absorption d'un photon. La durée du phénomène est précisément égale à celle du train d'ondes de la *figure* 53, c'est-à-dire au 10^{-8} seconde que dure la cohérence temporelle. L'émission spontanée résulte de la désexcitation spontanée d'un atome selon le schéma de la *figure* 55. La même figure représente l'absorption par excitation.

Émission stimulée

Le mécanisme d'émission stimulée (Einstein, 1917) peut être décrit facilement dans le cas idéalisé d'atomes à deux niveaux d'énergie, dont l'excitation est d'origine thermique. Appelons N_1 le nombre d'atomes dans l'état fondamental ayant l'énergie E_1 et N_2 le nombre dans l'état excité ayant l'énergie E_2. La fréquence des photons absorbés ou émis est donnée par : $h\nu = E_2 - E_1$.

Le nombre d'atomes se désexcitant spontanément par unité de temps est proportionnel à N_2, soit AN_2. A est un coefficient qui ne dépend que de l'espèce chimique à laquelle appartient l'atome. Le nombre d'atomes portés dans l'état excité par absorption est proportionnel à N_1 et au nombre n de photons de fréquence ν présents dans le milieu, soit nBN_1.

Si l'émission spontanée et l'absorption sont les seuls phénomènes en jeu, on doit avoir, par un système en équilibre, égalité entre les taux d'excitation et de désexcitation. Mais la mécanique statistique nous apprend que les nombres d'occupations des niveaux d'énergie obéissent à la loi de Boltzmann :

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-h\nu/kT}$$

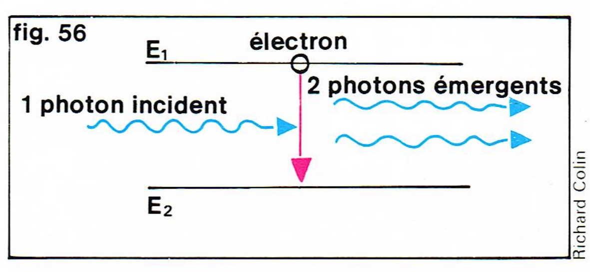
où k est la constante de Boltzmann, T la température absolue du système. On en déduit :

$$n = \frac{A}{B} e^{-h\nu/kT}$$

ce qui est en contradiction avec une autre loi de la mécanique statistique, la loi de Planck, qui donne la densité de photons en fonction de la température :

$$n = C \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

C'est qu'en fait il existe un troisième processus, l'émission stimulée, dont le schéma est représenté *figure* 56. Le photon incident interagit avec l'état excité et provoque la retombée de l'électron dans l'état fondamental. Il y a donc deux photons émergents qui ont exactement les mêmes caractéristiques (énergie, direction) et qui sont en phase, puisque l'un est la cause directe de l'émission de l'autre. Le nombre d'émissions stimulées par unité de temps est égal à : BN_2n. Le coefficient B est le même que celui de l'absorption.



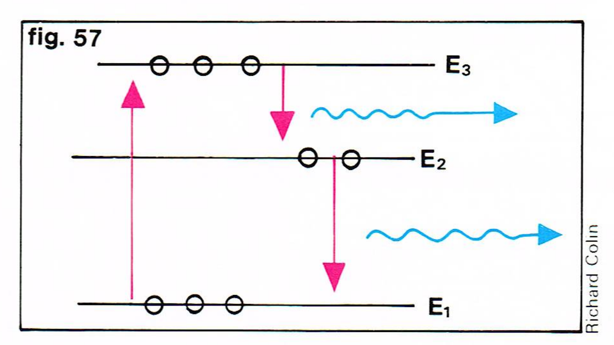
◄ *Figure 56 : représentation schématique de l'émission stimulée.*

Les avantages de l'émission stimulée sont évidents : on peut espérer, à partir d'un photon de départ, en produire un très grand nombre, ayant les mêmes caractéristiques. Cela permettrait d'avoir de la lumière cohérente. Or, malheureusement, dans les corps en équilibre thermique, l'absorption l'emporte toujours sur l'émission stimulée, car le niveau fondamental est toujours le plus peuplé. Pour réaliser l' « inversion de population », il faut « pomper » les atomes de l'état fondamental à l'état excité au moyen d'un dispositif extérieur. L'apport d'énergie ainsi réalisé maintient le corps hors d'équilibre ; il est en partie récupéré dans l'émission stimulée. Les premiers appareils qui ont fonctionné sur ce principe, dans le domaine des ondes centimétriques, sont les masers *(microwave amplification by stimulated emission of radiation)*.

Masers

Le premier maser est le maser à ammoniac, construit par Townes en 1954. Le principe de l'inversion de population consiste à séparer mécaniquement les molécules se trouvant dans l'état fondamental et dans l'état excité. Il existe dans la molécule d'ammoniac deux niveaux séparés par une énergie correspondant à des photons de transition ayant une longueur d'onde égale à 1,25 cm. Dans un champ électrique extérieur, les deux types de molécules sont soumis à des forces opposées en direction. Pour les séparer, il suffit donc de faire passer un jet moléculaire entre les armatures d'un condensateur et de recueillir dans une cavité placée sur le trajet les molécules de l'état excité. Cette cavité possède des dimensions telles qu'une onde électromagnétique de longueur d'onde 1,25 cm s'y trouve en résonance. Il se produit à l'intérieur une émission spontanée due à la création en chaîne de photons cohérents. L'amorçage de cette réaction peut être dû, soit à une onde incidente extérieure, auquel cas l'appareil se comporte comme un amplificateur, soit à la désexcitation spontanée d'une des molécules, auquel cas il se comporte comme un oscillateur. Le processus est entretenu par l'arrivée continue du jet moléculaire dans la cavité.

La réalisation de l'inversion de population par séparation mécanique est exceptionnelle, le procédé généralement employé étant celui du maser à trois niveaux (Basov et Prokhorov, 1955). Considérons un atome à trois niveaux



◄ *Figure 57 ; principe du maser à trois niveaux : l'arrivée d'énergie extérieure permet de peupler également les niveaux 1 et 3.*

d'énergie E_1, E_2, E_3 et appelons ν_{12}, ν_{13}, ν_{23} les fréquences de transitions possibles entre ces trois niveaux (*fig.* 57). Supposons qu'on envoie sur le matériau une onde électromagnétique de fréquence ν_{13}, transportant une très grande énergie. Parmi les trois processus, émission spontanée, émission stimulée et absorption, seule l'émission spontanée ne dépend pas de la densité de photons reçue. Par conséquent, si cette dernière est suffisamment importante, la désexcitation spontanée est négligeable par rapport aux deux phénomènes. Or, ceux-ci ayant le même coefficient B, les nombres d'occupation N_1 et N_3 sont égaux. On a bien entendu un système de deux niveaux 1 et 3 très éloigné de l'équilibre thermique. Par contre, le nombre d'occupation N_2 reste le même que s'il n'y avait pas de perturbation extérieure. Le calcul montre alors que deux cas sont possibles :

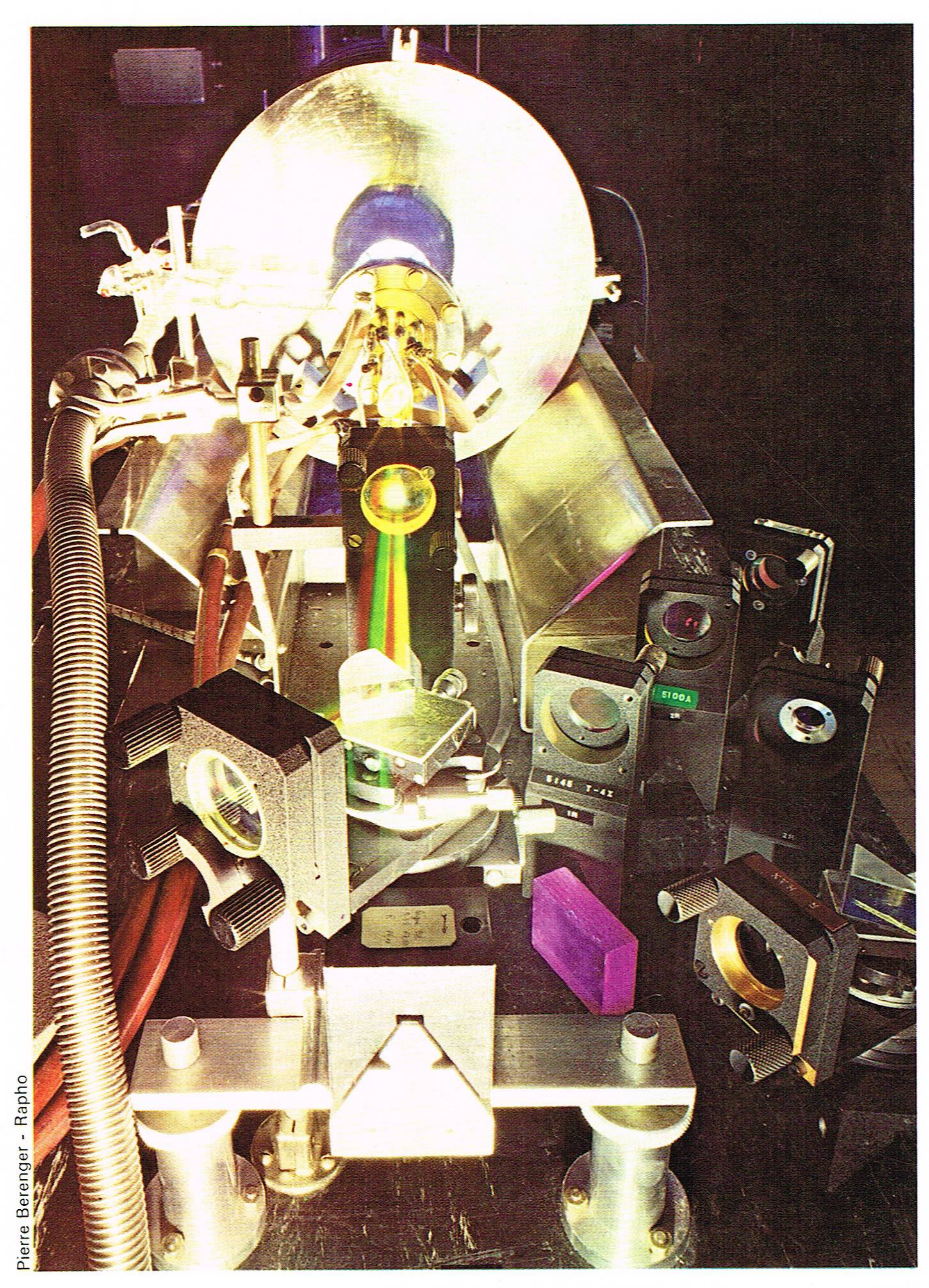
— si $\nu_{12} > \nu_{31}/2$, il y a inversion de population entre les niveaux 1 et 2 : $N_2 > N_1$;

— si $\nu_{12} < \nu_{31}/2$, il y a inversion de population entre les niveaux 2 et 3 : $N_3 > N_2$.

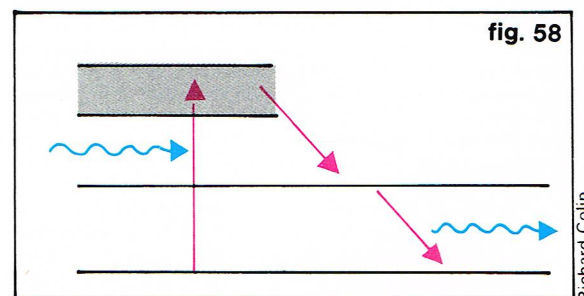
Il est donc possible, dans le domaine hertzien, où l'on dispose de sources puissantes assez monochromatiques, mais non nécessairement cohérentes sur la fréquence ν_{13}, de fabriquer un maser.

Lasers

Pour fabriquer un laser *(light amplification by stimulated emission of radiation)* fonctionnant sur le principe des trois niveaux, il faut résoudre le problème suivant : dans le domaine optique, les sources puissantes usuelles ne donnent qu'une très faible partie de leur énergie si on les limite à une raie spectrale fine. Une première solution est fournie par le laser à cristal, dont l'exemple type est le rubis. Il s'agit d'un cristal d'alumine contenant quelques atomes de chrome (0,05 %), ce qui donne la couleur rose. Il possède à la fois un spectre de bandes et de raies (*fig.* 58). Le rendement du « pompage » est donc satisfaisant, puisque, pour passer d'un niveau de raie à un niveau de bande, les photons incidents n'ont pas à être monochromatiques. Les électrons retombent en 10^{-7} seconde sur le niveau 2. Celui-ci est métastable, sa durée de vie est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$ s : on peut donc ainsi y accumuler les électrons. La source lumineuse extérieure est une lampe flash, le rubis est placé à l'intérieur d'un interféromètre de Pérot-Fabry, réglé sur la fréquence ν_{12} (*fig.* 59). Le déclenchement de la lampe à décharge provoque l'inversion de population. Comme dans le cas du maser, il suffit d'une désexcitation spontanée pour provoquer la réaction en chaîne d'émission stimulée. Les photons de direction perpendiculaire aux miroirs passent un grand nombre de fois dans le milieu avant d'avoir une chance de traverser la lame de verre semi-réfléchissante de l'interféromètre et de participer au faisceau laser émis vers l'extérieur. Ce sont donc les seuls à se multiplier, et ils définissent la direction de l'émission. Le faisceau a une



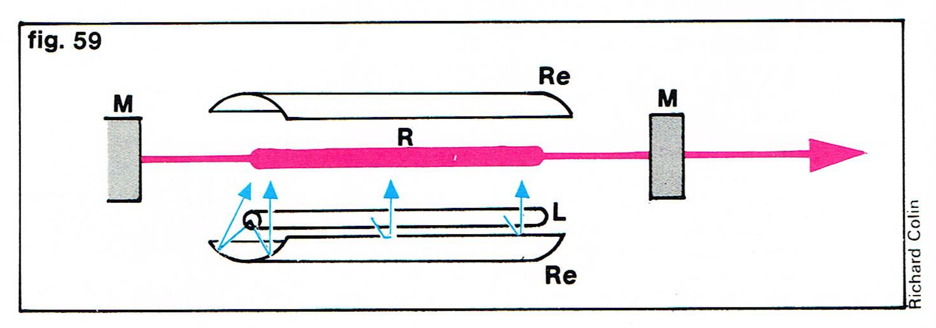
Pierre Berenger - Rapho



Richard Colin

***▶ Figure 58 :** le spectre des niveaux d'énergie d'un cristal de rubis comprend une partie continue (bande) et une partie discontinue (raies).*

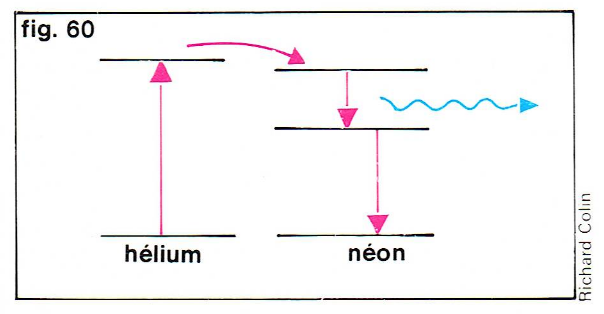
***▼ Figure 59 :** principe du laser à rubis :* R, *rubis ;* M, *miroir ;* L, *lampe flash avec son réflecteur* Re.

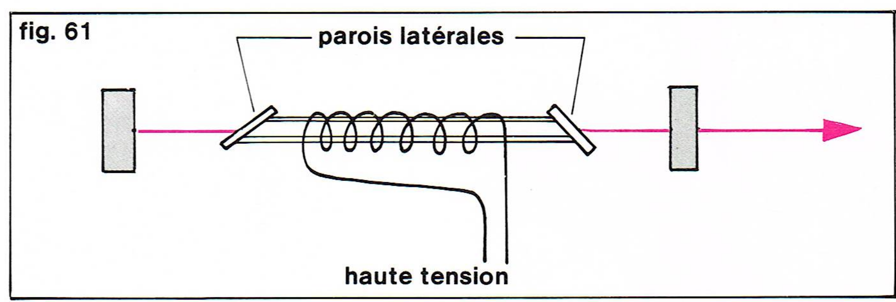


Richard Colin

Palais de la Découverte, Paris





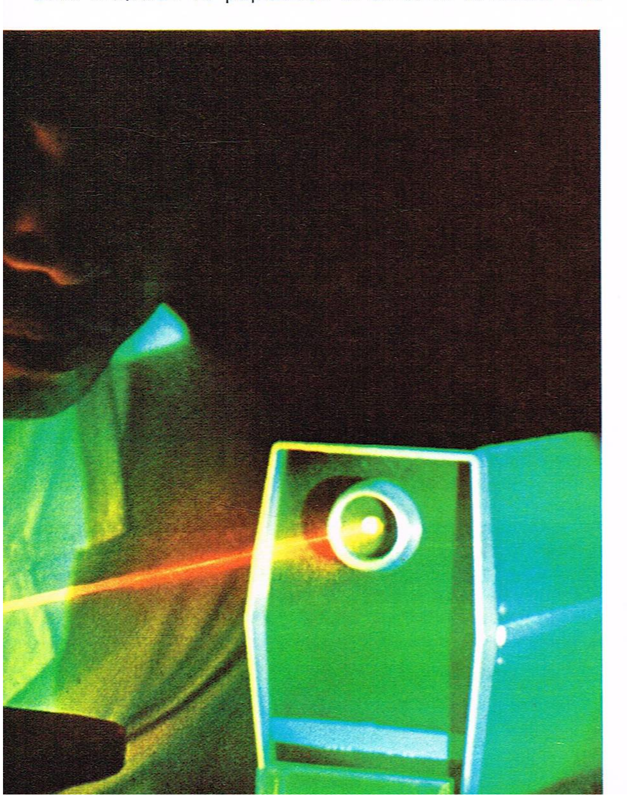


forme cylindrique, car sa dispersion angulaire n'est due qu'à la diffraction venant des limites géométriques du cristal. La cohérence spatiale et temporelle est assurée par l'onde de référence qui va et vient entre les miroirs. Ce type de laser concentre l'énergie dans un temps très court, ce qui permet d'atteindre de fortes puissances (plusieurs centaines de mégawatts), mais il ne fonctionne pas de façon continue. La *figure* 59 représente le schéma de construction.

Il existe également des lasers à gaz, dont le type est le laser à hélium-néon. Lorsqu'on soumet le mélange gazeux à une décharge électrique de haute fréquence, les atomes d'hélium sont excités. Ceux-ci transmettent par chocs leur excitation aux atomes de néon, qui ont un niveau d'énergie proche (*fig.* 60). La proportion d'hélium étant nettement plus grande que celle de néon, on peut réaliser une inversion de population. On a donc un système de maser à trois niveaux, mais à deux atomes différents. Outre leur prix peu élevé, les avantages des lasers à gaz sont les suivants : fonctionnement en continu et très bonne finesse de raie (1 à 100 kHz). Par contre, leur puissance est faible (1 watt). La lumière fournie est polarisée. En effet, pour supprimer les réflexions parasites aux extrémités du tube contenant le gaz, celles-ci sont inclinées sous l'incidence de Brewster ; la composante polarisée correspondante est ainsi transmise sans atténuation (*fig.* 61).

Il existe également des lasers chimiques, dans lesquels des gaz réactifs sont introduits de manière continue dans un tube, l'excitation du milieu étant produite par l'énergie chimique de la réaction.

Un troisième type est constitué par des diodes à semi-conducteurs telles que celles qu'on utilise comme redresseurs dans l'électronique. Contrairement aux atomes isolés d'un gaz, le cristal comprend non pas des raies d'énergie mais des bandes. Lorsqu'un courant les parcourt, les électrons passent dans la bande supérieure. Leur désexcitation fournit de l'énergie, soit sous forme calorifique, soit, pour les diodes électroluminescentes, sous forme optique. Pour des courants très intenses, on peut avoir inversion de population et émission stimulée. Ces lasers fonctionnent en continu, ils sont de faible puissance et peu monochromatiques. Ils sont cependant intéressants, car leur rendement est très élevé : ils réalisent une très bonne conversion d'énergie électrique en énergie lumineuse, ce qui peut être intéressant dans des dispositifs logiques et informatiques.



Applications des lasers

On sait fabriquer actuellement des lasers de performances très variées, couvrant le spectre de l'ultraviolet à l'infrarouge lointain, et il est difficile de citer toutes les applications.

On peut cependant classer ces applications entre celles qui utilisent la puissance, celles qui utilisent la directivité du faisceau et celles qui utilisent la cohérence.

— La puissance des lasers à rubis est utilisée pour faire des soudures de précision, le faisceau étant focalisé à l'aide d'une lentille. La quantité d'énergie reste faible, mais la durée de l'impulsion étant de $3 \cdot 10^{-8}$ seconde, la chaleur accumulée dans la cible ne peut pas être évacuée, et la matière est vaporisée au point d'impact. On emploie également le laser en médecine pour cautériser une rétine décollée. Les milieux transparents de l'œil n'absorbent aucune énergie, contrairement à la rétine qui est opaque : cette méthode permet d'éviter la chirurgie. Pour des applications nécessitant de très grandes puissances, on emploie généralement sur le trajet du rayon lumineux sortant du laser un ou plusieurs amplificateurs. Ils sont constitués de matériau dans lequel a été réalisée l'inversion de population mais où l'oscillation n'a pas lieu tant qu'une onde extérieure ne les touche pas. L'amplitude du champ électrique de la lumière est alors suffisamment forte pour déformer les atomes de façon non linéaire. Ils réémettent alors, non seulement la lumière de fréquence égale à celle qui entre, mais également les harmoniques de fréquence multiple. On peut par exemple, avec une radiation de longueur d'onde 1,06 μ, fabriquer un faisceau cohérent de 0,53 μ. Si le champ électrique est plus intense que celui qui maintient les électrons autour du noyau atomique, la cible est transformée en un milieu ionisé (un plasma). Cette propriété est un des moyens actuellement mis en œuvre pour amorcer la fusion thermonucléaire contrôlée. Des résultats encourageants ont été obtenus en laboratoire.

— La directivité du faisceau laser permet de l'utiliser pour matérialiser une droite dans l'alignement des ouvrages de travaux publics ou de topographie. Il est possible également de mesurer des distances à l'aide de télémètres à lasers, qui sont en fait des radars optiques. Une impulsion est envoyée en direction du but à mesurer. Le temps d'aller et retour donne la valeur de la distance. Contrairement aux télémètres classiques, la précision ne dépend pas de la distance, et elle n'est limitée actuellement que parce que la vitesse de la lumière n'est pas connue avec assez d'exactitude. On peut mesurer la distance de satellites situés à 1 000 km avec une précision de 1 à 3 m. On peut également mesurer les distances terrestres en utilisant un satellite comme relais.

— La cohérence est évidemment la propriété la plus spécifique du laser. Toutes les expériences d'interférences appliquées peuvent être réalisées avec de meilleures performances : luminosité, cohérence temporelle de plusieurs minutes. La spectroscopie a besoin de sources très lumineuses et possédant une longueur d'onde réglable. La première condition est réalisée par un laser nu, mais la seconde nécessite un système nouveau pour rendre le laser « accordable ». Cela peut être obtenu en prenant comme milieu émetteur une solution dont on fait varier la concentration, ou encore en envoyant

▲ ***A gauche, figure 60 : niveaux électroniques d'un mélange hélium-néon. L'énergie se transmet d'un gaz à l'autre par les chocs atomiques. A droite, figure 61 : principe du laser à gaz ; remarquer les parois latérales inclinées sous l'incidence de Brewster.***

◀ ***Page ci-contre, en haut, l'apparition de la lumière laser a permis un grand nombre d'expériences nouvelles de physique fondamentale et appliquée.***

◀ ***Le faisceau rouge, émis par le laser hélium-néon, se caractérise par une grande directivité et une haute tolérance. Ici, réflexion totale sur un jeu de prismes rectangles.***



le faisceau laser sur des molécules qui se désexcitent en un spectre élargi (effet Raman). Mais les applications les plus spectaculaires sont l'holographie et le filtrage des fréquences spatiales.

Holographie

Lorsqu'on photographie un objet, on enregistre l'intensité de la lumière en chaque point de la pellicule. En 1948, Gabor a proposé d'enregistrer également la phase de l'onde. Il a fallu attendre l'invention du laser pour réaliser ce projet, puisque les sources classiques ont un temps de cohérence très faible devant la durée d'une exposition photographique.

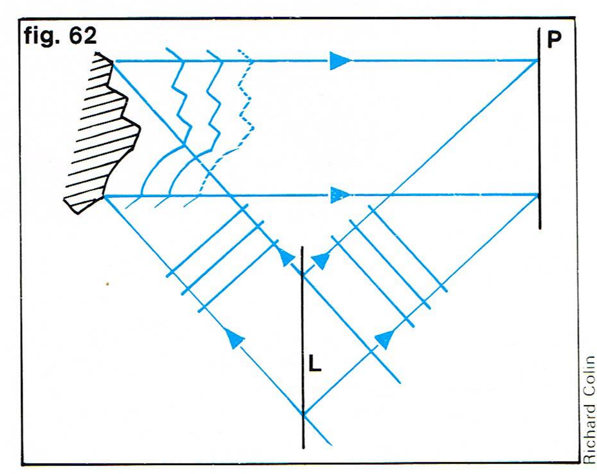
Le principe consiste à dédoubler la lumière et à faire interférer sur la plaque l'onde réfléchie par l'objet et l'onde non perturbée, dite onde de référence. La position des franges d'interférence donne la phase, et leur contraste donne la proportion de lumière réfléchie par l'objet. La *figure* 62 représente le montage utilisé ; on voit qu'aucune lentille n'est utilisée entre image et objet. Lorsque l'on regarde la plaque à l'œil nu, on ne voit qu'un réseau de franges complètement illisibles. Par contre, lorsqu'on l'éclaire par le faisceau de référence, dans les mêmes conditions que pour la prise de vue, on observe une image réelle à l'endroit où se trouvait l'objet. Il s'agit d'une reproduction fidèle à trois dimensions ; en se déplaçant, on voit des parties cachées par la perspective. Cette vision en relief est possible, car on a enregistré toute l'information de la surface d'onde réfléchie, amplitude et phase comprises. L'information relative à chaque point est d'ailleurs distribuée sur l'ensemble de la pellicule : si l'on brise la plaque, chaque morceau redonne l'image entière, avec simplement une netteté diminuée.

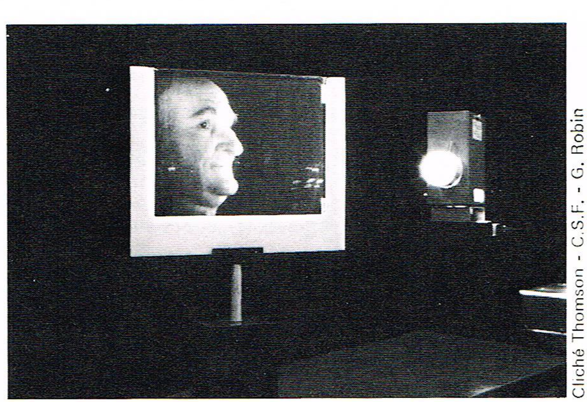
Il est possible d'apporter des améliorations et de trouver des applications à cet effet remarquable. Tout d'abord, si l'émulsion photographique n'est pas trop mince, il se forme dans l'épaisseur des franges qui, lorsque l'on éclaire par le faisceau de référence, se comportent comme un réseau. Il y a une sélection étroite de la lumière réémise, exactement dans la direction de l'objet initial. La restitution de l'hologramme peut se faire, non plus avec un laser, mais avec une simple lampe « monochromatique » à décharge gazeuse, la pellicule filtrant un faisceau suffisamment cohérent. Il est possible également d'enregistrer

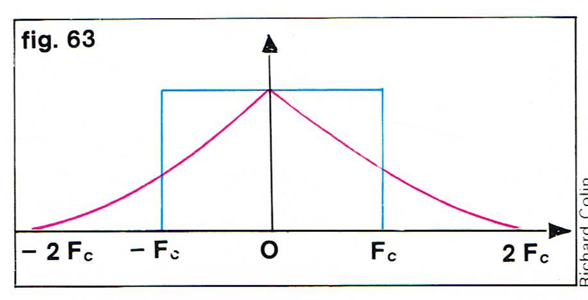
▲ *La cohérence temporelle du laser permet d'effectuer des interférences avec de grandes différences de marche. L'holographie bénéficie de cette propriété, et notamment pour la localisation des réserves minérales du sous-sol de la Terre.*

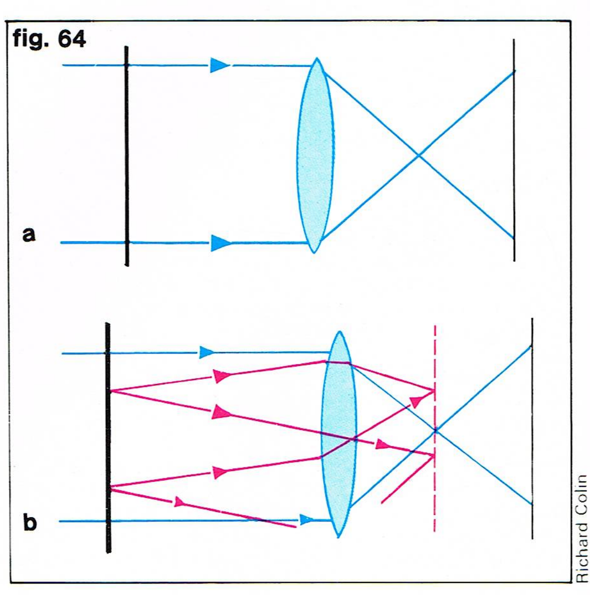
▶ *A gauche, figure 62 : enregistrement d'un hologramme ; le faisceau laser est séparé par la plaque* L *en un faisceau de référence et un faisceau éclairant l'objet, qui atteignent la plaque* P.
A droite, figure 63 : courbe de réponse d'un instrument considéré comme filtre de fréquences spatiales ; en éclairage cohérent (courbe bleue) et incohérent (courbe rouge).

▶ *A gauche, restitution d'un hologramme par une lampe à mercure.*
A droite, figure 64 : schéma de principe du filtrage de fréquences spatiales ;
a, objet de transparence uniforme ;
b, des inhomogénéités diffractent la lumière et forment dans le plan focal un spectre de fréquences.









sur une même plaque plusieurs images, à des angles différents. L'hologramme peut donc constituer une mémoire optique à très grande capacité. Une application importante concerne l'étude des très petites déformations des corps opaques. On enregistre deux images en relief superposées du corps, avant et après déformation. La très faible différence de dimension apparaît à l'examen sous forme de franges d'interférences.

Le principal progrès qui pourrait être fait en vue d'autres applications (cinéma en relief, par exemple) est la diminution du temps de pose pour la prise de vue.

Filtrage des fréquences spatiales

A toute fonction vibratoire étalée dans le temps, on peut faire correspondre son spectre de fréquences, qui est la transformée de Fourier de cette fonction. De la même façon, toute image peut être considérée comme l'addition de composantes sinusoïdales, c'est-à-dire d'une infinité de réseaux à deux dimensions. La fonction définissant l'amplitude et la phase de chacune des composantes s'appelle le spectre de fréquences spatiales. De la même façon qu'un appareil donné ne laisse passer que certaines couleurs et se comporte donc comme un filtre de fréquences temporelles, tout instrument d'optique ne transmet que certaines fréquences spatiales. Un objectif de microscope, par exemple, possède, à cause de la diffraction, un pouvoir séparateur, qui est la dimension en dessous de laquelle on ne peut pas distinguer deux points. Il laisse donc passer toutes les fréquences spatiales, jusqu'à une certaine valeur maximale, dite fréquence de coupure. La *figure* 63 représente la transparence en fréquences spatiales pour un tel instrument, en éclairage cohérent, ainsi qu'en éclairage incohérent où le calcul est plus complexe.

La *figure* 64 indique un schéma de principe pour la séparation des fréquences spatiales. L'image est une pellicule photographique éclairée en lumière cohérente par un faisceau parallèle. Elle se comporte comme un objet pour une lentille convergente, qui en donne une image à une distance double de la longueur focale. Si l'intensité de la pellicule était uniforme, ce qui correspondrait à une fréquence spatiale égale à zéro, on aurait concentration du faisceau au foyer. En fait, la pellicule peut être considérée comme composée d'une infinité de réseaux de pas différents, qui diffractent la lumière en dehors du faisceau, dans une direction qui dépend du pas du réseau. On trouve donc dans le plan focal une analyse spectrale de l'image initiale, qu'on peut modifier en plaçant un système de cache à l'endroit désiré.

Le filtrage des fréquences spatiales a été découvert avant le laser; on utilisait alors une source partiellement cohérente formée d'un trou de très faible diamètre éclairé par la raie verte d'une lampe au mercure. Des résultats intéressants avaient été obtenus, tels que la suppression d'une fréquence gênante dans une image, ou au contraire l'extraction d'un dessin périodique noyé dans un fond quelconque. A l'aide de filtres plus complexes, on peut corriger un défaut de mise au point survenu lors de la prise de la photographie. L'application la plus prometteuse semble être la reconnaissance automatique d'une forme donnée, parmi un très grand nombre de clichés (empreintes digitales, caractères imprimés).

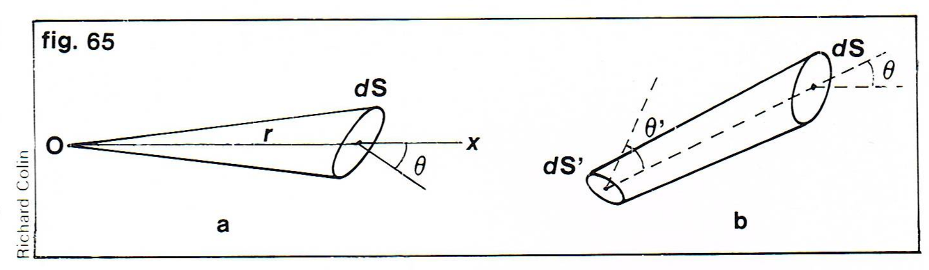
Émission et réception de la lumière

Photométrie énergétique

La photométrie est la mesure des intensités lumineuses. Une onde n'étant jamais rigoureusement monochromatique, on doit s'intéresser dans un premier temps à l'énergie totale transformée par l'ensemble de toutes les fréquences : c'est la photométrie énergétique.

Par définition, le flux traversant une surface S limitée par une courbe fermée est la quantité d'énergie traversant S pendant l'unité de temps. Il est de même nature qu'une puissance et se mesure en watts. On appelle éclairement le flux rapporté à l'unité de surface; l'unité usuelle est le watt/m².

Considérons maintenant une source ponctuelle, au sens de l'optique géométrique, c'est-à-dire de dimension petite par rapport à la distance d'observation. La courbe limitant une petite surface dS définit avec la source O un cône. D'après le principe de propagation rectiligne, et si le milieu n'est pas absorbant, l'énergie émise dans le



▲ *Figure 65 : définition des angles solides contenant le flux lumineux pour une source ponctuelle* (**a**) *et un élément* **dS'** *de source étendue* (**b**).

cône se conserve au cours de la propagation. Il en est de même de l'angle solide $d\Omega$, mesuré en stéradians, qui se calcule par la formule :

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

θ étant l'angle de la normale à dS et de la direction Ox de la source, et r la distance d'observation (*fig.* 65*a*).

On peut donc définir le rapport du flux sur l'angle solide, qu'on appelle intensité dans la direction Ox; il ne dépend que de la source et de la direction Ox. On le mesure en watts par stéradian. Cette définition précise le terme d'intensité lumineuse que nous avions employé jusqu'ici pour parler de l'énergie d'une onde.

Considérons une source étendue, et isolons sur celle-ci un élément de surface dS', centré autour du point O (*fig.* 65*b*). Comme dans le cas d'une source ponctuelle le flux envoyé par la source dS' est proportionnel à l'élément d'angle solide $d\Omega$ sous lequel on observe :

$$d\varphi = I d\Omega = I \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

Il est également proportionnel à l'aire dS' et au cosinus de l'angle θ' que fait la normale à cette surface avec la direction d'observation Ox :

$$d\varphi = L \frac{dS\, dS' \cos \theta \cos \theta'}{r^2} \qquad \textbf{(8)}$$

On voit apparaître une nouvelle quantité L que l'on appelle luminance énergétique de la source au point O, dans la direction Ox. La formule **(8)** est la formule de Lambert; elle permet de décomposer un flux lumineux en une partie relative à la source émettrice, la luminance, et une autre, qui ne dépend que des caractéristiques géométriques du montage, appelée étendue du faisceau. On dit qu'un corps suit la loi de Lambert lorsque sa luminance est identique dans toutes les directions. C'est le cas, par exemple, d'une surface mate et blanche éclairée et diffusant toute la lumière reçue. Ce n'est évidemment pas vrai pour un miroir obéissant aux lois de la réflexion, puisqu'il renvoie la lumière dans une seule direction.

On démontre en thermodynamique qu'un objet incandescent obéissant à la théorie du corps noir suit la loi de Lambert. Une sphère lumineuse apparait comme un disque uniformément brillant; c'est le cas du Soleil.

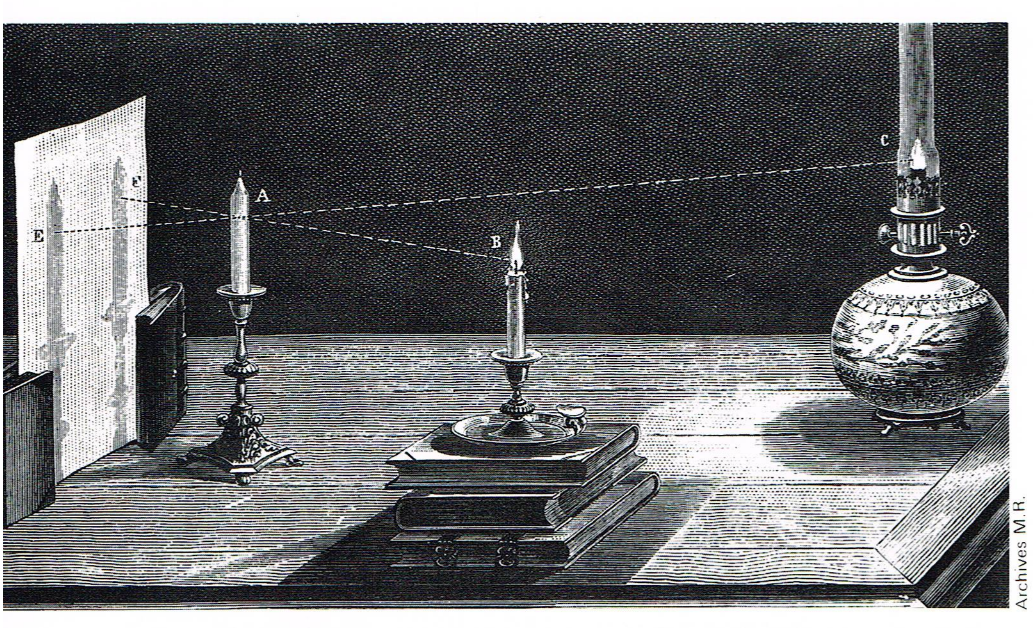
On définit encore l'émittance énergétique comme la puissance rayonnée par unité de surface de la source, dans toutes les directions. Si la loi de Lambert est satisfaite, l'émittance est donnée en fonction de la luminance par la relation : $E = \pi L$. Quand le Soleil est au zénith, et s'il n'y avait pas d'absorption par l'atmosphère terrestre, l'éclairement de la Terre serait de 1 390 W/m²; on peut en déduire que l'émittance du Soleil est égale à :

560 000 W/m²

Toutes les quantités définies se rapportent à l'énergie électromagnétique de la totalité du spectre. On peut aussi considérer les valeurs monochromatiques, correspondant à la longueur d'onde λ. Cela est nécessaire lorsque la sensibilité des récepteurs ou l'absorption des instruments d'optique varie avec λ. Le cas particulier le plus important est, bien entendu, celui de l'œil, qui ne voit que les radiations de 0,4 à 0,7 μ, avec un maximum de sensibilité à 0,553 μ. Pour éviter les confusions, on emploie souvent les termes de radiance et brillance au lieu d'émittance énergétique et luminance énergétique.

Photométrie visuelle

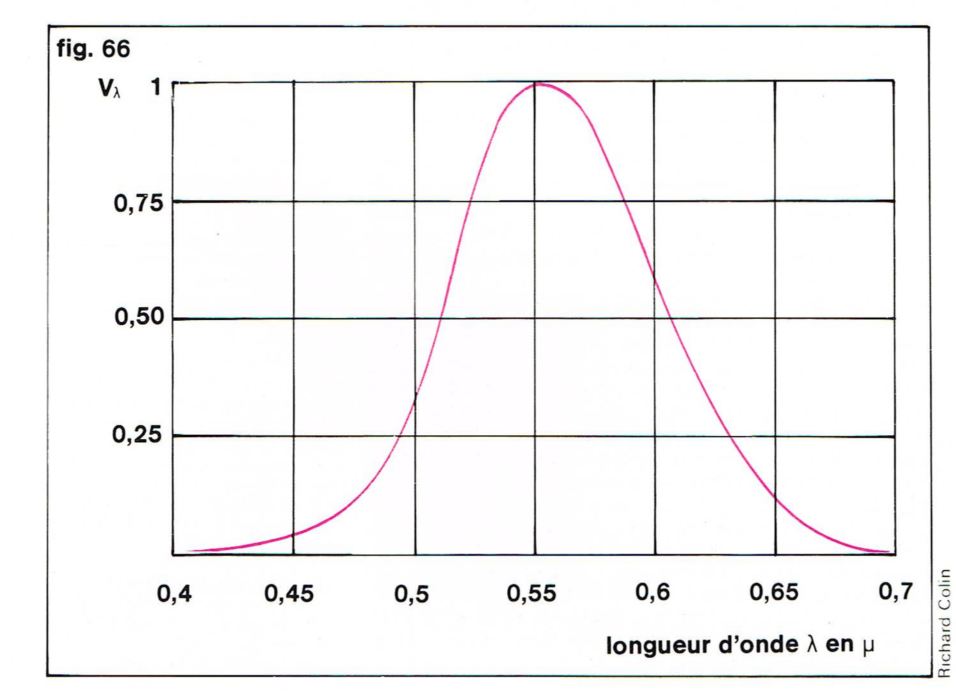
La photométrie visuelle est l'étude des sources lumineuses d'après leur perception par l'œil. Cette discipline ne donne donc pas des résultats strictement reproductibles,



▲ Les Récréations scientifiques, *1888; photométrie élémentaire : « Allumant alors* B et C, *on produira deux ombres* E et F *auxquelles on arrivera facilement à donner exactement la même intensité en avançant ou reculant l'une des deux sources de lumière. Ceci obtenu, les intensités lumineuses seront inversement proportionnelles aux carrés des distances mesurées AB et AC.* [...] *La valeur lumineuse d'un bec se compte habituellement en bougies, et on prend pour type celles de 10 au kg.* [...]. *»*

compte tenu des variations individuelles. Cependant, à l'aide d'observations statistiques, et moyennant un certain nombre de conventions, il est possible de résoudre le problème de l'action de la lumière sur l'œil, son importance pratique étant fondamentale.

Avant l'apparition de détecteurs sensibles à l'énergie, les seules mesures possibles étaient visuelles. L'œil n'est pas capable de mesurer de façon absolue une grandeur lumineuse, par contre il est très sensible à l'égalité de luminance ou d'éclairement, lorsque les deux sources ou les deux écrans sont placés côte à côte. Si, par un dispositif approprié, on substitue l'un à l'autre sur une même plage les deux éléments à comparer, avec une cadence un peu rapide, il en résulte une sensation de papillotement qui disparaît lorsque l'égalité des luminances est réalisée. Cette égalité peut être obtenue en éloignant ou en rapprochant une des deux sources. Si l'on a une unité de référence, il est donc possible de mesurer n'importe quelle grandeur photométrique en utilisant les relations de définition. Dans le cas de deux sources n'ayant pas la même composition spectrale, la comparaison des éclairements est plus délicate et imprécise. On définit un facteur de sensibilité relative V (λ), valable pour l'observateur moyen, comme le rapport des éclairements énergétiques monochromatiques pour la longueur d'onde λ et pour une longueur d'onde de référence, qui donnent le même éclairement lumineux. Il mesure donc la sensibilité de l'œil aux différentes couleurs. La courbe représentative est tracée sur la *figure* 66.



L'unité photométrique fondamentale est l'unité d'intensité lumineuse, définie par le décret du 3 mai 1961 : c'est la candela (symbole cd). La candela est l'intensité lumineuse dans une direction déterminée d'une ouverture perpendiculaire à cette direction, ayant une aire de 1/60 de centimètre carré et rayonnant comme un radiateur intégral (corps noir) à la température de solidification du platine. La *figure* 67 représente l'étalon d'intensité : le corps rayonnant (thorine) est chauffé électriquement jusqu'à ce que le platine commence à se liquéfier ; une ouverture permet l'observation. Les unités dérivées sont les suivantes :

— flux lumineux : lumen (lm) [ou : une candela $\times$ un stéradian] ;
— émittance : lumen par mètre carré (lm/m^2) ;
— luminance : candela par mètre carré (cd/m^2) ;
— éclairement : lux (lx), un lumen par mètre carré.

On appelle efficacité lumineuse d'une source le flux lumineux en lumens correspondant à un flux énergétique de 1 watt. Elle est maximale si la source est monochromatique, toute l'énergie étant concentrée dans la longueur d'onde 0,553 μ. Elle est alors égale à 679 lumens/watt.

Le Soleil a une luminance d'environ $1{,}5 \cdot 10^9$ cd/m^2, une lampe à incandescence 10^7 cd/m^2 et une lampe fluorescente 10^4 cd/m^2. Les efficacités lumineuses respectives sont de 100, 12 et 40 lumens/watt. Pour éviter l'éblouissement, l'œil ne doit pas regarder de source dont la luminance excède 10^5 cd/m^2. Par contre, la nuit, il est capable de percevoir des objets jusqu'à 10^{-4} cd/m^2. On constate donc l'étendue considérable de la gamme utilisable.

Le tableau suivant indique les valeurs de quelques éclairements courants :

Éclairage solaire direct	100 000 lux
Salle d'opérations chirurgicales	10 000 lux
Travail de précision	1 000 lux
Travail normal d'atelier	200 lux
Éclairage de circulation	50 lux
Couloir de métropolitain	10 lux

Pour calculer la luminance de l'image formée par un instrument d'optique, on se sert du fait que l'étendue d'un faisceau est une quantité purement géométrique. Si l'on appelle U_1 et U_2 les étendues des faisceaux à l'entrée et à la sortie, et n_1 et n_2 les indices des milieux 1 et 2, on a la relation de Clausius :

$$n_1^2 U_1 = n_2^2 U_2$$

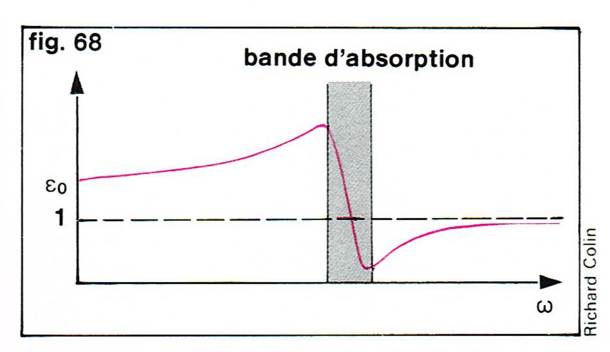
D'autre part, la conservation de l'énergie entraîne que le flux sortant est égal au flux entrant, multiplié par un coefficient de transmission T, dépendant de l'appareil. On a donc la relation entre les luminances :

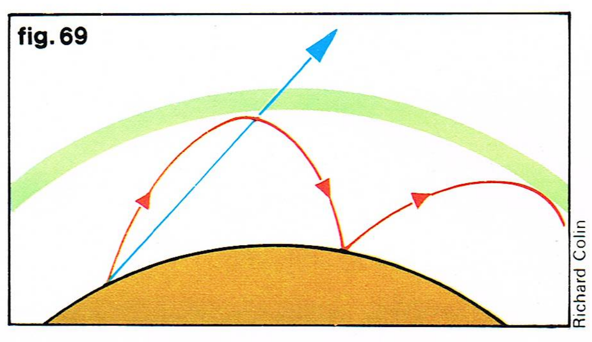
$$L_2 = TL_1 \left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\right)^2$$

Dispersion

On sait que, dans les milieux matériels, la lumière se propage à une vitesse variable suivant la fréquence : c'est le phénomène de la dispersion. Dans la théorie électromagnétique de Maxwell, un milieu est caractérisé par trois nombres : la perméabilité diélectrique ε, la perméabilité magnétique μ et la conductibilité γ. Sauf pour quelques exceptions (métaux ferromagnétiques), le coefficient μ est très voisin de 1. D'autre part, les corps isolants présentant de la dispersion, comme les corps faiblement conducteurs, ce n'est donc pas un phénomène lié intrinsèquement à la conductibilité, encore que celle-ci puisse intervenir comme effet secondaire. La dispersion est due au fait que la perméabilité diélectrique varie avec la fréquence selon un mécanisme microscopique que Maxwell lui-même a indiqué.

Les charges électriques présentes dans la matière (électrons, noyaux, ions) peuvent se déplacer sous l'action du champ électrique extérieur produit par l'onde électromagnétique. Mais dans un milieu isolant, ce déplacement est limité à une distance microscopique, car les charges sont liées : il y a une force de rappel qui tend à les faire





◀ *A gauche, figure 68 : variation du coefficient diélectrique ε en fonction de la pulsation ω, pour un corps possédant une seule bande d'absorption.*

A droite, figure 69 : action d'une couche ionisée sur la propagation des ondes radio-électriques à la surface de la Terre ; ondes longues (rouge) et ondes courtes (bleu).

revenir dans leur position d'équilibre. On peut considérer en première approximation que cette force est proportionnelle au déplacement, et la loi du mouvement est donc celle d'oscillateur harmonique. Appelons ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur. Il existe également une force de freinage assez faible, due au fait qu'un corpuscule électrisé rayonne à son tour de l'énergie sous forme électromagnétique. On se trouve ramené à un problème classique de mécanique : un point matériel lié élastiquement, dont le mouvement est faiblement amorti, soumis à une force sinusoïdale de pulsation ω. La solution est parfaitement calculable, et il faut distinguer deux cas :

— si ω est très différent de ω_0, le déplacement est sensiblement en phase avec l'excitation extérieure, et le coefficient de proportionnalité est de la forme :

$$\frac{A}{(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

— si ω est proche de ω_0, il y a résonance, l'amplitude du déplacement croît très rapidement, le déphasage passe par $\pm \pi/2$.

L'induction électrique est proportionnelle au déplacement, ce qui permet de calculer le coefficient diélectrique, dont la variation est représentée *figure* 68. Lorsque la fréquence est très basse, on a une valeur ε_0 qui est la valeur statique. Dans les régions de transparence, ε croît assez régulièrement. Lorsque ω tend vers l'infini, l'inertie des charges empêche celles-ci de suivre la variation rapide du champ électrique, et $\varepsilon = 1$, comme pour le vide. Enfin, près de la résonance, se produit le phénomène de « dispersion anormale » ; il y a une brusque variation de ε. Celle-ci est accompagnée d'une très forte absorption de l'énergie incidente, comme le prévoit le modèle mécanique de l'oscillateur harmonique. En dehors de cette raie d'absorption, le milieu est transparent, et l'indice de réfraction est donné par une formule du type :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Un corps transparent dans le visible possède généralement une ou plusieurs raies d'absorption dans l'ultraviolet. On remarque sur la *figure* 68 que $\varepsilon < 1$ pour une partie de la courbe correspondant aux très hautes fréquences. Cela laisse prévoir un indice de réfraction inférieur à l'unité pour le domaine des rayons X, ce qui est effectivement observé. La vitesse de phase se propage alors plus rapidement que la vitesse de la lumière dans le vide. Cela n'est pas en contradiction avec la relativité, car un signal est transmis avec la vitesse de groupe :

$$u = \frac{c}{\dfrac{d\,(n\omega)}{d\omega}}$$

et lorsque n est croissant en fonction de ω, on vérifie bien que $u < c$. Quant à la région de résonance, où n est décroissant, on peut montrer que la vitesse du signal, très déformé par l'absorption, reste inférieure à c.

Absorption par un milieu conducteur

Indépendamment du phénomène général d'absorption lié à la dispersion que nous venons d'étudier, il existe une absorption due à la conductibilité électrique. Pour un corps qui serait parfaitement conducteur, c'est-à-dire qui n'offrirait aucune résistance au mouvement des électrons, il n'est pas possible de donner lieu à un champ électrique, donc à une onde. En fait, il s'agit d'un cas idéal, et, lorsqu'une vibration électromagnétique de fréquence f frappe un conducteur, elle pénètre à l'intérieur, en décroissant de façon exponentielle suivant la profondeur. Cette loi est d'ailleurs la seule qui soit tout à fait générale dans les phénomènes d'absorption. En effet, dès que l'on cherche à déterminer le coefficient d'atténuation, il faut distinguer différents cas suivant la fréquence et la nature du matériau.

Pour un corps très conducteur, comme le cuivre, la profondeur de pénétration est donnée par la formule :

$$p = \frac{1}{2\pi\sqrt{\gamma\mu f}}$$

On voit qu'elle décroît quand la fréquence augmente. Pour 100 périodes par seconde, elle est de 0,64 cm ; pour 1 MHz, elle n'atteint plus que 64 microns. On peut donc considérer que les métaux sont toujours opaques.

Dans un matériau assez faiblement conducteur, la profondeur est à peu près constante à basse fréquence :

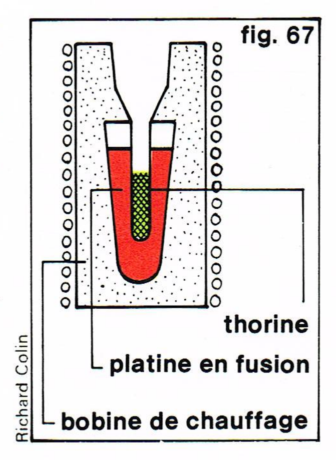
$$p = \frac{1}{2\pi\gamma c\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}}$$

Pour le sol sec, elle est de l'ordre du mètre, lorsque f = 100 MHz. C'est ainsi que l'eau de mer est fortement absorbante pour les ondes hertziennes et infrarouges, mais devient transparente pour les ondes visibles. Les courtes longueurs d'onde sont moins atténuées, ce qui donne une couleur bleue par transparence.

Un cas particulier, intéressant, est celui des gaz ionisés. Les particules électrisées sont libres comme dans tout conducteur, et la résistance est due aux chocs sur les molécules ou les ions du gaz. La quantité intéressante, caractéristique du milieu, est le nombre moyen de chocs a subis par un ion, dans l'unité de temps. La conductibilité est maximale pour $a = \omega$, elle s'annule pour $a = 0$ et pour $a = \infty$. Dans le premier cas, il n'y a pas de chocs, et donc pas d'énergie dissipée en chaleur, dans le second, les chocs sont trop fréquents pour que les ions acquièrent une vitesse notable, et la dissipation d'énergie cinétique est négligeable.

L'application la plus importante concerne la propagation des ondes hertziennes. Dans la haute atmosphère, il existe des couches d'air à différentes altitudes, qui sont ionisées par l'action du rayonnement solaire. La fréquence des ondes étant très supérieure à celle des chocs, il y a peu d'absorption. Il y a cependant une exception dans le cas des ondes kilométriques, pour lesquelles une couche située à la base de l'ionosphère, vers 70 km d'altitude, est fortement conductrice et se comporte comme un miroir métallique. Le calcul précis montre que l'indice de réfraction croît avec l'altitude, ce qui provoque un phénomène de mirage exactement analogue à celui des ondes lumineuses. Les ondes longues sont réfléchies vers le sol, qui peut à son tour les renvoyer vers la haute atmosphère (*fig.* 69). Les communications sont donc possibles entre deux points quelconques du globe. Pour les ondes de plus courte longueur (ondes courtes de radio, télévision), ce phénomène n'existe pas, et l'énergie se propage en ligne droite en direction de l'espace. Les couches ionisées étant formées par l'action du rayonnement solaire sur l'air, elles sont profondément modifiées durant la nuit : on sait que de nuit les réceptions radio sont favorisées.

Il est possible d'étudier les propriétés de la haute atmosphère par la méthode des sondages verticaux. Un signal radio envoyé verticalement permet, par son écho, d'étudier la hauteur et les propriétés des différentes couches de l'atmosphère. Cette méthode complète les observations faites par fusées et satellites.



▲ *Figure 67 : étalon photométrique d'intensité lumineuse. Au centre, la thorine, autour le platine en fusion à 1 773 °C (en rouge), à l'extérieur, la bobine de chauffage.*

◀ *Page ci-contre en bas, figure 66 : courbe représentative du facteur de sensibilité* V_λ *en fonction de la longueur d'onde* λ. *Pour établir cette courbe, on a pris pour longueur d'onde de référence celle qui correspond au maximum de sensibilité, soit 0,550 μ.* V_λ *est donc égal à 1 pour cette valeur de* λ.



Paskall - Cedri

▲ *Un paysage de la côte polynésienne en infrarouge.*

Diffusion

Lorsqu'un milieu transparent contient des particules de petite dimension en suspension, il est possible d'observer celles-ci au microscope. Lorsque la taille est de l'ordre du millième de micron, on ne peut pas distinguer leur forme, mais, si les objets sont suffisamment espacés, la lumière qu'ils diffractent permet de les voir individuellement : c'est le principe de l'ultramicroscope. Si la concentration est importante, le procédé est inapplicable, par contre le flux lumineux total diffracté devient assez intense pour être perçu à l'œil nu. On dit que le milieu est trouble et diffuse la lumière ; ainsi, un rayon lumineux traversant une fumée de tabac est visible latéralement. Dans le cas où les particules sont petites par rapport à la longueur d'onde de la lumière, on montre que l'intensité diffusée est inversement proportionnelle à la quatrième puissance de la longueur d'onde (Rayleigh, 1871). La couleur ne dépend donc absolument pas de la nature du corps en suspension. Si la lumière est blanche, la lumière diffusée est bleue et la lumière transmise est, par différence, rouge-orangé ; c'est ce qu'on constate très facilement sur la fumée du tabac.

Tout le monde sait que la lumière qui nous éclaire ne vient pas totalement du Soleil. Le ciel est lumineux par lui-même, par temps très pur, et sa couleur est bleue. Cela est dû à la diffusion des rayons solaires dans toutes les directions, et l'air étant d'autant plus lumineux qu'il est plus pur, on doit admettre que la diffusion est due aux molécules de l'air elles-mêmes et non aux poussières en suspension. Les vibrations des électrons qui provoquent cette diffusion sont donc exactement les mêmes que celles dont nous avons parlé dans l'étude de la dispersion. A l'inverse, on constate qu'en très haute altitude le ciel devient de plus en plus sombre, jusqu'à être complètement obscur dans l'espace interplanétaire.

La lumière diffusée présente toujours une polarisation ; celle-ci est totale lorsque la direction d'observation est perpendiculaire à la direction de la lumière incidente. Cette propriété peut être utilisée pratiquement pour connaître la direction du Soleil, même lorsque le temps est couvert : les Vikings utilisaient pour orienter leur navigation des cristaux biréfringents ; certains insectes ont des yeux naturellement polarisants et retrouvent ainsi leur chemin.

Récepteurs lumineux

Nous allons énoncer rapidement quelques propriétés et conditions d'utilisation des récepteurs de lumière, utilisés en photométrie et en spectroscopie. On demande à ces dispositifs une bonne sensibilité, et pour l'étude des spectres, une bonne sélectivité en fréquence.

Le **récepteur thermométrique** est un appareil qui absorbe l'énergie lumineuse et la transforme en chaleur. Il est par définition sensible à toutes les radiations et constitue l'instrument de base pour la photométrie énergétique. C'est aussi le seul qui soit utilisable pour les radiations infrarouges de longueur d'onde supérieure à 3 μ. C'est d'ailleurs en plaçant un thermomètre au-delà de l'extrémité rouge du spectre visible que Herschel découvrit l'existence de l'infrarouge en 1800. Le rayonnement à déceler tombe sur une surface noircie et prend une température d'équilibre fonction de la puissance absorbée.

Un **bolomètre** est constitué d'un ruban de platine très mince dont on mesure la variation de résistance avec la température. On peut déceler ainsi un écart plus faible que le millionième de degré. On emploie de préférence maintenant un couple thermo-électrique constitué de fils très fins d'argent et de bismuth. La lumière est envoyée sur des soudures entre les métaux, ce qui provoque l'échauffement et l'apparition d'un courant mesurable. On arrive ainsi à détecter un flux de 10^{-9} watt, ce qui est une performance médiocre. L'œil, lui, est sensible à 10^{-15} watt et constitue donc un détecteur remarquable. Il est, bien entendu, limité aux radiations du spectre visible (0,4 à 0,7 μ). Enfin, il ne permet pas de mesurer de façon absolue : il est nécessaire d'opérer par comparaison avec une source de référence.

La **plaque photographique** est l'instrument de choix pour la spectroscopie. La couche sensible est constituée par des cristaux microscopiques de bromure d'argent répartis en émulsion dans de la gélatine. Ce support peut être une plaque de verre, de plastique ou d'autre matériau. Sous l'action de la lumière, l'argent est réduit et se dépose en donnant un dépôt noir. La technique photographique est un chapitre important de l'optique appliquée. Les plaques ordinaires sont sensibles entre 0,5 et 0,2 μ, avec un maximum vers 0,43 μ. Elles retrouvent ensuite

toute leur sensibilité dans le domaine des rayons X et γ au-dessus de 10 Å. Dans l'ultraviolet, c'est l'absorption par la gélatine qui empêche l'impression des grains de bromure d'argent. On y remédie en employant des plaques de Schumann, pauvres en gélatine et riches en bromure d'argent. La sensibilité est alors annulée pour des longueurs d'onde supérieures à 0,3 μ. Un autre procédé consiste à recouvrir la plaque d'une couche très mince d'huile : celle-ci est rendue fluorescente par les ultraviolets et impressionne la plaque par de la lumière de plus grande longueur d'onde. Du côté de l'infrarouge, la diminution de sensibilité est due au fait qu'il n'y a pas assez d'absorption par les grains de bromure d'argent. On peut alors incorporer à l'émulsion un colorant tel que l'érythrosine, qui a pour but d'absorber les radiations. Ces plaques sont commercialisées sous le nom d'isochromatiques ou orthochromatiques ; celles qui sont sensibilisées au pinacyanol sont appelées panchromatiques. On peut ainsi détecter le proche infrarouge, jusqu'à 1 μ.

L'utilisation du **phénomène de photoluminescence** est également très utile : certains corps ont la propriété d'émettre, après avoir reçu un rayonnement, des radiations de longueur d'onde plus grande. Un écran tel qu'un verre d'urane sert à la détection visuelle des radiations ultraviolettes. Mais c'est surtout dans le domaine des rayons X que l'on emploie pour l'observation visuelle des écrans fluorescents au platino-cyanure de baryum et au tungstate de cadmium.

Pour les mesures d'intensité, il est possible d'utiliser la **conversion directe d'énergie rayonnante en énergie électrique.** Lorsqu'un photon frappe un atome, il peut communiquer à un électron toute son énergie $E = h\nu$. Dans les détecteurs thermométriques, cet électron retombe sur son niveau fondamental, et l'énergie finale est calorifique. Pour l'œil et les émulsions photographiques, l'énergie est utilisée pour une réaction chimique. Mais il est possible que l'électron soit projeté dans le vide et récupéré par une électrode positive. On recueille alors un courant proportionnel à l'intensité lumineuse, c'est l'effet photo-électrique. Dans un cristal semi-conducteur, l'électron ainsi libéré peut servir simplement à augmenter le nombre de porteurs de charges, c'est-à-dire la conductibilité. On fabrique ainsi des cellules photorésistantes au sélénium ou au sulfure de cadmium. Enfin, pour les radiations de très haute fréquence, c'est-à-dire formées de photons très énergétiques (rayons γ, rayons X, ultraviolet lointain), l'ionisation d'un gaz traversé par le faisceau est suffisamment importante pour être mesurable. Tous ces phénomènes, relativement peu utilisés en optique, seront étudiés en détail en *Électricité*.

T. Poggio

▲ *Un spectroscope à prisme.*

Spectroscopes et spectrographes

Tout appareil destiné à analyser un rayonnement complexe en ses composantes monochromatiques comprend deux parties :

— un système dispersif ;
— un détecteur qui peut être soit photographique, dans le cas des spectrographes, soit visuel ou thermométrique, dans le cas des spectroscopes.

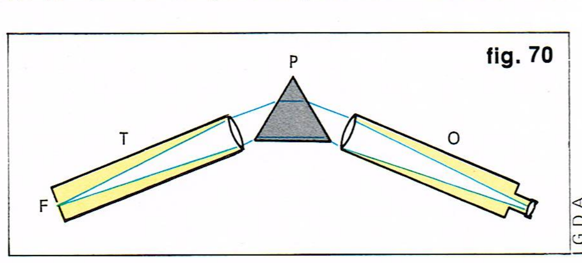
On représente généralement un spectre comme une courbe d'intensité en fonction de la longueur d'onde λ. Le pouvoir de résolution est par définition le rapport $\lambda/\Delta\lambda$, où $\Delta\lambda$ est le plus petit écart sensible en longueur d'onde.

Les appareils à prisme utilisent la variation d'indice de réfraction d'un corps transparent. Le faisceau incident provenant d'une fente ayant la direction de l'arête du prisme est rendu parallèle par un collimateur et aboutit soit à une lunette, soit à une chambre photographique (*fig.* 70). La dispersion du verre est bien représentée par la formule :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

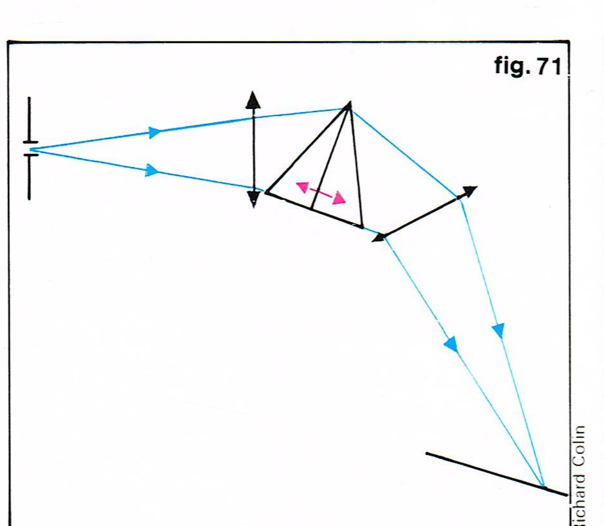
Il en résulte que $\frac{dD}{d\lambda}$ (où D est la déviation) est proportionnel à λ^{-3} et que le violet est beaucoup plus étalé que le rouge. Le pouvoir de résolution est limité naturellement par la largeur de la fente : si celle-ci est grande, les images de différentes couleurs se recouvrent ; si elle est petite, la diffraction intervient. Avec un spectrographe à un seul prisme, on obtient un pouvoir de résolution de l'ordre de 5 000.

Pour l'ultraviolet, il convient d'utiliser comme milieu transparent le quartz, car le verre est opaque pour ce rayon-

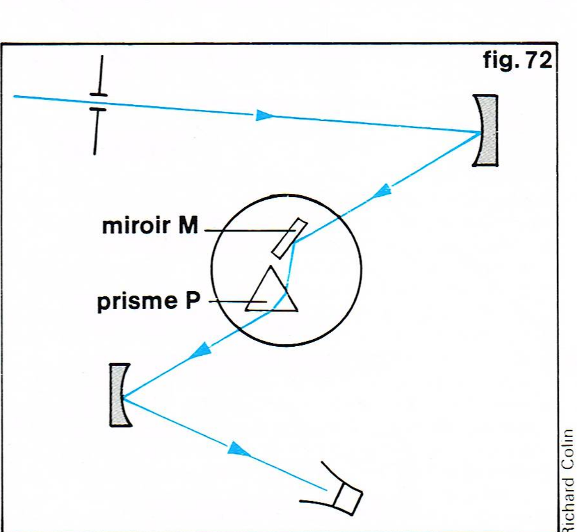


I.G.D.A.

◀ *Figure 70 : schéma d'un spectroscope à prisme* (P) *dans lequel on observe à l'œil, à travers la lunette* O, *l'image de la fente* F (T, *collimateur).*

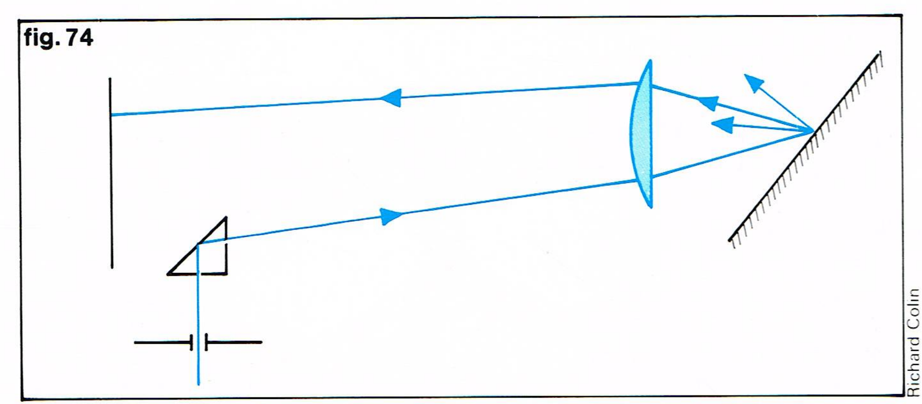


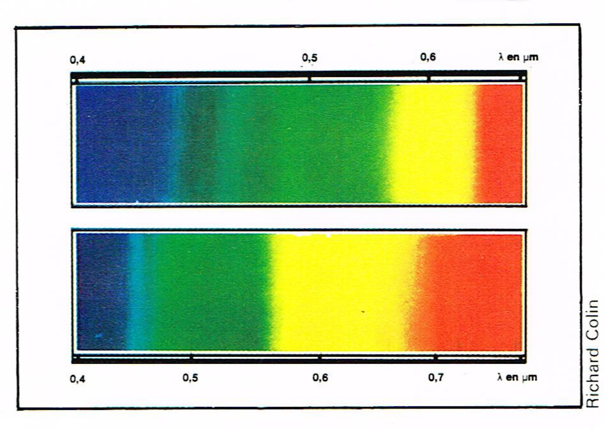
Richard Colin

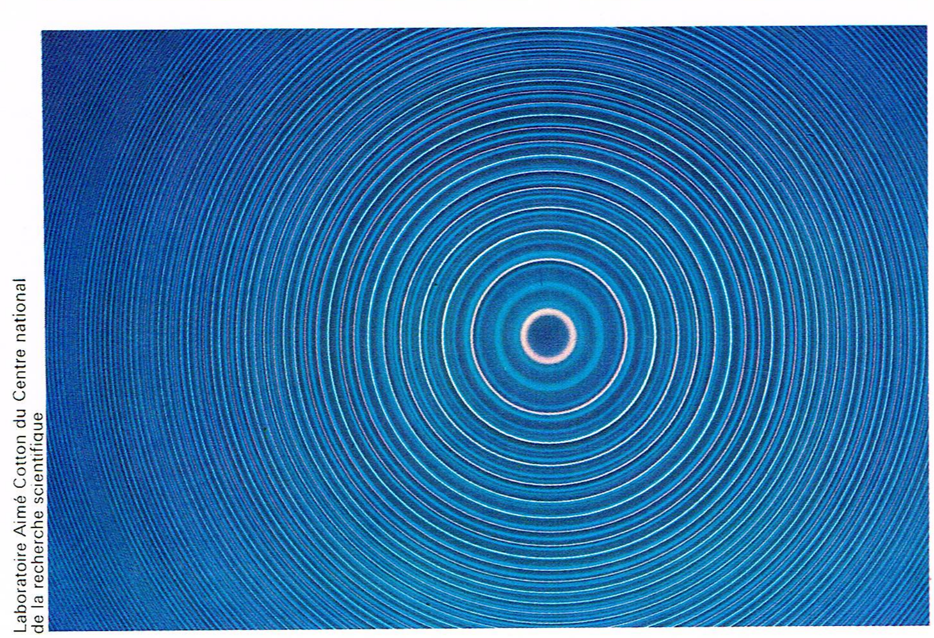


Richard Colin

◀ *A gauche, figure 71 : spectroscope pour ultraviolet. Il y a deux demi-prismes de quartz pour annuler la biréfringence circulaire. A droite, figure 72 : spectroscope pour infrarouge. Le détecteur est thermométrique.*

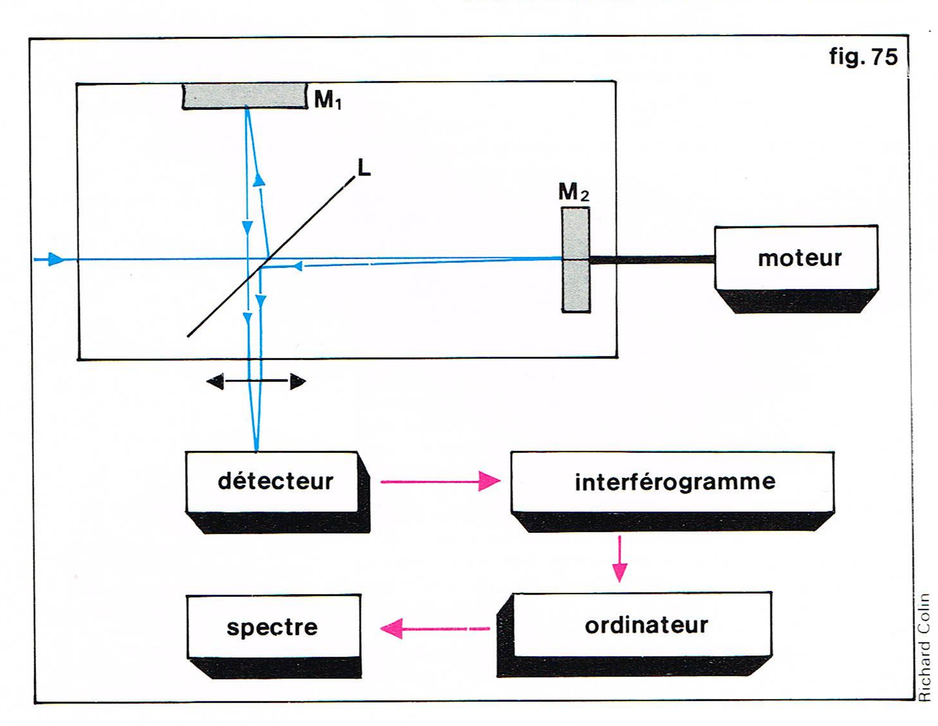






▲ *En haut, à gauche, figure 74 : spectrographe à réseau ; à droite, figure 73 : comparaison des spectres de la lumière visible donnés par un prisme (en haut) et un réseau (en bas). Ci-dessus, anneaux d'interférence fournis par l'interféromètre de Pérot-Fabry.*

▼ *Figure 75 : spectroscopie par transformation de Fourier, à l'aide d'un interféromètre de Michelson.*



nement. Mais le quartz est biréfringent, aussi, pour éviter que le prisme et les lentilles ne dédoublent les images, faut-il tailler les surfaces de façon que l'axe optique soit parallèle aux rayons. On évite la double réfraction circulaire en constituant deux demi-prismes, l'un droit et l'autre gauche (*fig.* 71).

Un problème analogue se pose dans l'infrarouge : au-dessus de 2 µ le verre devient absorbant ; au-dessus de 3 µ, c'est le tour du quartz. De 2,5 à 8 µ, on peut employer des prismes de sel gemme (NaCl), et jusqu'à 23 µ, de sylvine (KCl). Les lentilles sont remplacées par des miroirs concaves métalliques. La *figure* 72 représente le schéma d'un tel appareil, fonctionnant sur le principe de la déviation constante : le prisme P est solidaire d'un miroir M, et c'est l'ensemble qui est mobile, ce qui permet d'être toujours au minimum de déviation.

Les appareils à réseaux sont plus coûteux, mais ils permettent d'avoir un pouvoir de résolution de 100 000. De plus, le spectre est normal ; la déviation est proportionnelle à la longueur d'onde (*fig.* 73). Pour obtenir l'étalement maximal, on a intérêt à placer le plus loin possible la plaque photographique (*fig.* 74). Pour l'ultraviolet de longueur d'onde inférieure à 0,13 µ, on ne connaît aucun matériau utilisable qui ne soit pas absorbant. Il est même nécessaire de faire le vide, car l'air n'est plus transparent. La seule solution consiste à employer un réseau métallique, fonctionnant par réflexion. Il est en forme de miroir concave, avec une longueur focale de plusieurs mètres, pour pouvoir donner de la fente une image réelle sur la plaque.

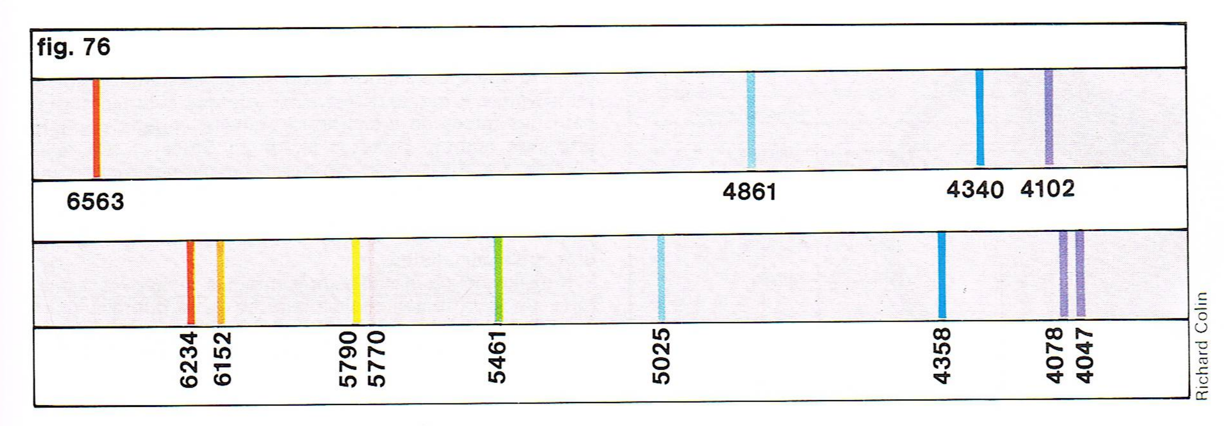
Spectroscopie interférentielle

Les appareils interférentiels tels que l'*interféromètre de Pérot-Fabry* sont des appareils très dispersifs. En fait, leur pouvoir de résolution peut être accru indéfiniment, en augmentant la valeur de la différence de marche. Il n'est limité que par la largeur des raies à étudier. L'inconvénient réside dans la superposition des différents ordres d'interférence lorsque l'on analyse un domaine spectral large. Ces appareils sont utilisés essentiellement pour étudier de façon précise des raies ou groupes de raies isolées. Leur luminosité est supérieure à celle des spectroscopes conventionnels, grâce à la grande étendue des faisceaux entrant.

A la différence du précédent, l'*interféromètre de Michelson* est un appareil à deux ondes. Il est à la base d'une méthode qui a connu un énorme développement ces dernières années : la spectroscopie par transformation de Fourier. L'onde plane incidente est divisée en deux par une lame semi-transparente L, et chaque moitié est renvoyée par les miroirs M_1 et M_2 (*fig.* 75). Elles interfèrent à la sortie de l'appareil. On appelle δ la différence de marche, égale à deux fois la différence des distances LM_1 et LM_2. Soit B (k) la distribution spectrale de la source, en fonction du nombre d'onde k. Le courant recueilli par une cellule photo-électrique est égal à :

$$I(\delta) = \int_0^\infty B(k) \cos 2\pi k\delta \cdot dk$$

Un moteur est chargé de déplacer M_2 régulièrement au cours du temps de façon à obtenir un enregistrement de la fonction I (δ), appelé interférogramme. On reconnaît dans la formule précédente la transformation de Fourier de B (k) en I (δ). La formule de réciprocité permet alors de calculer B (k) :



Richard Colin

◀ *Figure 76 : spectres de raies de l'hydrogène (H_1^1) et du mercure (Hg_{80}^{200}) [les longueurs d'onde sont en angströms].*

▼ *Spectres de diverses sources lumineuses : électriques, gazeuses, métalliques, stellaire et solaire.*

$$B(k) = \int_0^\infty I(\delta) \cos 2\pi k\delta \cdot d\delta$$

L'opération est effectuée par un ordinateur qui fournit le spectre à partir de l'interférogramme. En pratique, δ n'atteint pas l'infini mais une valeur maximale δ_m, ce qui limite le pouvoir de résolution à la valeur δ_m/λ.

L'intérêt du procédé est d'utiliser toute l'énergie reçue pendant un temps de mesure qui peut être aussi long qu'on le désire. L'information ressort donc beaucoup mieux au-dessus du bruit de fond, surtout dans l'infrarouge où ce dernier est gênant. Cette méthode obtient des résultats tout à fait spectaculaires pour des sources très faibles. En astronomie, par exemple, on a pu ainsi avoir des renseignements sur la composition chimique de l'atmosphère des planètes en étudiant leur spectre.

Différents types de spectres

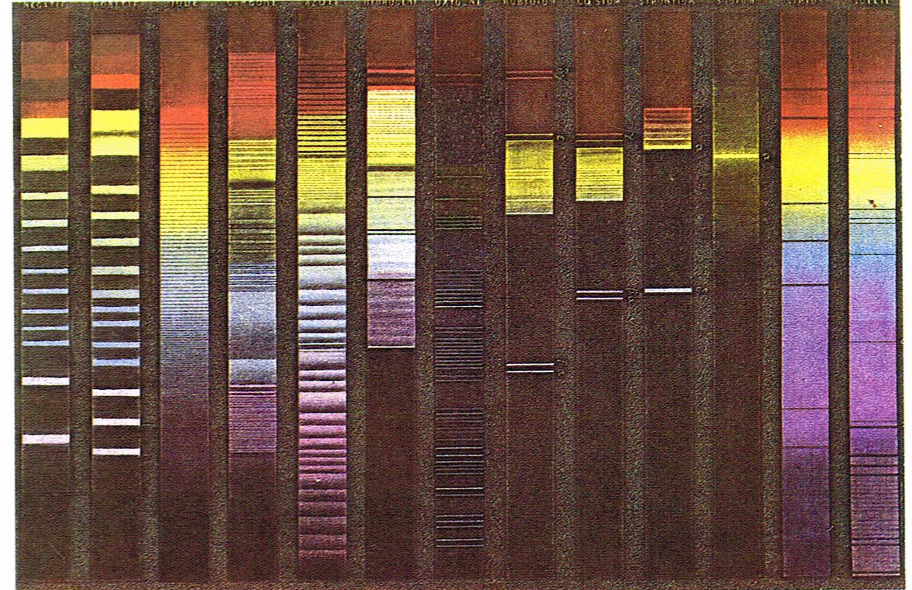
La première distinction entre les différents types de spectres est la distinction continu-discontinu. Les gaz excités émettent des spectres discontinus formés de raies possédant une largeur faible par rapport à leurs distances les unes des autres (*fig.* 76). Il n'y a pas de régularité apparente dans la longueur d'onde et l'intensité de chaque raie. Par contre, le phénomène est parfaitement reproductible et caractéristique d'un atome ou d'une molécule. D'ailleurs, la spectroscopie est une technique déjà ancienne en tant que méthode d'analyse chimique. Il a fallu attendre les années 1925 et l'avènement de la mécanique quantique pour commencer à comprendre et à prévoir la répartition des raies. La *figure* 77 donne l'exemple le plus simple, celui de l'atome d'hydrogène.

Une première méthode, qui s'applique aux métaux alcalins, est de placer dans une flamme non éclairante (bec Bunsen) une poudre à étudier. C'est ainsi que le sodium, ou le sel marin (NaCl), produit une lueur jaune intense caractéristique. Avec un spectroscope un peu dispersif, la « raie » D se dédouble en deux composantes (5 890 Å et 5 896 Å de longueur d'onde). La décharge électrique dans un gaz à basse pression est utilisable pour à peu près tous les corps gazeux à température ordinaire. Le tube de Geissler contient de l'hydrogène et donne dans le visible quatre raies ($H\alpha$ = 6 563 Å, $H\beta$ = 4 861 Å, $H\gamma$ = 4 340 Å, $H\delta$ = 4 102 Å). La lampe à vapeur de mercure est une source puissante couramment utilisée aussi bien dans le visible que dans l'ultraviolet.

Pour les corps métalliques, on emploie une étincelle, qui rend lumineux à la fois les gaz de l'air et la vapeur du métal des électrodes. On peut également former l'étincelle à partir de deux gouttes de solution de sel métallique, placées à l'extrémité de tubes de quartz fondu. Les atomes sont souvent fortement ionisés, ce qui permet d'obtenir des raies peu visibles par un autre procédé.

Lorsque deux électrodes placées dans l'air sont assez rapprochées, il se produit un arc électrique : émission très intense de lumière, courant de plusieurs ampères et ionisation du gaz intermédiaire. On utilise soit directement des électrodes métalliques, soit des électrodes au charbon contenant la substance à étudier. Dans ce procédé, les atomes ne sont pas ionisés ; on appelle pour cette raison spectre d'arc un spectre contenant les raies de l'atome neutre.

Les molécules forment en général un spectre de bande lorsqu'elles ne sont pas dissociées : le spectre est discontinu, mais les plages colorées sont très larges. En fait,



Snark International

l'utilisation d'un spectrographe dispersif montre toujours que les bandes sont en réalité formées de raies très serrées. Elles correspondent à l'existence de niveaux électroniques très rapprochés. On les relie en physique atomique à la possibilité de vibration et de rotation des noyaux dans la molécule.

Les liquides et les solides incandescents émettent des spectres continus. Chaque atome ne peut plus être considéré comme une source indépendante, et c'est l'ensemble du corps tout entier qui doit être considéré comme un émetteur. Il y a un équilibre entre le rayonnement et la matière, décrit en thermodynamique par la théorie du corps noir. Pour un corps noir parfait, la distribution spectrale ne dépend que de la température. Elle est donnée par la formule de Planck :

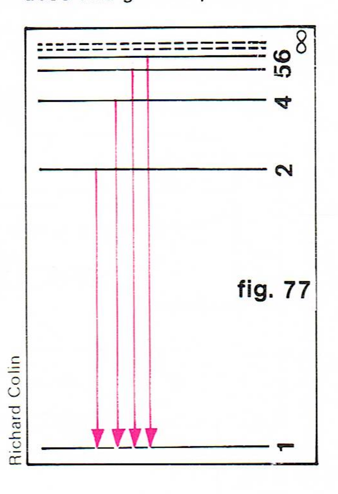
$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{2\pi h\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

Il existe une autre méthode spectroscopique : celle des spectres d'absorption. Si l'on envoie dans une ampoule contenant de la vapeur de sodium le rayonnement provenant d'une lampe à arc, on constate dans un spectroscope que les raies D sont absorbées : on observe des raies noires sur le fond continu brillant de l'arc. On remarque d'autre part une émission par l'ampoule de la lumière jaune caractéristique, dans toutes les directions. D'une façon générale, un corps n'est capable d'émettre que les radiations qu'il est capable d'absorber dans les mêmes conditions (règle de Kirchhoff). Cette loi n'est mise en défaut que dans le cas des rayons X, à cause de leur mécanisme particulier d'émission. Elle se justifie facilement dans le cadre du modèle mécanique d'oscillateur harmonique : si l'absorption correspond à un phénomène de résonance, c'est la même fréquence ω_0 qui détermine absorption et émission. Dans la théorie quantique exacte,

▼ *Figure 77 ; les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène ont la forme :* $= \frac{}{h}\,\frac{1}{n^2}$ *(R : constante de Rydberg ; n : entier quelconque). On en déduit la fréquence du photon émis lors du passage d'un électron de la couche m à la couche n :*

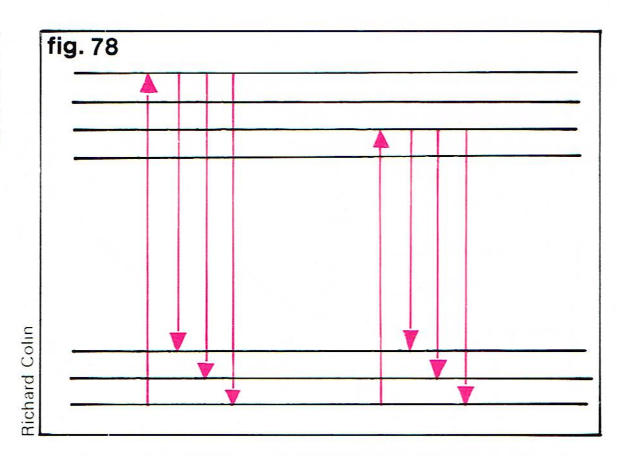
$$E = R\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right]$$

Cette formule avait été trouvée expérimentalement par Balmer et vérifiée avec une grande précision.



Richard Colin

▶ *Figure 78 : la fluorescence est due à l'excitation par la lumière des électrons d'une molécule, et à leur retombée hors du niveau fondamental.*





on sait qu'à chaque intervalle entre deux niveaux d'énergie d'électron correspond une fréquence de photon, par la relation :

$$h\nu = E_2 - E_1$$

Il y a à chaque fois trois mécanismes possibles : émission spontanée, absorption, émission stimulée. La méthode des spectres d'absorption est utilisée pour les vapeurs froides lorsqu'elles sont illuminées par le spectre continu d'un corps incandescent. On observe des raies noires à l'endroit où devraient se trouver les raies brillantes du gaz en émission. C'est ainsi qu'on peut déterminer la composition chimique de l'atmosphère du Soleil ou des étoiles.

Fluorescence et phosphorescence

Certaines substances ont la propriété, lorsqu'elles sont soumises à un rayonnement lumineux, d'émettre dans toutes les directions des radiations dont la longueur d'onde est différente de celle de la radiation excitatrice. Parmi les corps ayant cette propriété, appelée photoluminescence, on distingue fluorescence et phosphorescence. Il existe également une chimiluminescence, provoquée par une réaction chimique, oxydation du phosphore par exemple, et une triboluminescence, provoquée par les chocs.

Le type de la fluorescence est représenté par une solution alcaline de fluorescéine, qui, éclairée par de la lumière bleue, émet de la lumière verte. Cette émission se produit uniquement pendant la durée de l'excitation et est indépendante de la température. La longueur d'onde est toujours plus grande que celle de la radiation initiale (loi de Stockes). Les photons émis sont donc de plus faible énergie. La *figure* 78, qui représente les niveaux électroniques de la molécule, fournit l'explication du phénomène : les électrons excités ne retombent pas tous dans le niveau fondamental. On peut considérer que l'absorption avec désexcitation à la même fréquence (résonance) constitue un cas particulier de fluorescence. L'éclairage domestique ou industriel utilise des tubes fluorescents, qui sont des lampes à vapeur de mercure. Les rayons ultraviolets émis sont transformés en lumière blanche par la substance recouvrant la paroi intérieure des tubes.

La phosphorescence possède des propriétés particulières. Elle continue à exister pendant un certain temps après la fin de l'excitation, la durée augmentant lorsque la température diminue. C'est ainsi que des sulfures contenant des traces de métal lourd peuvent émettre pendant plusieurs heures. Quant à la loi de Stockes, elle reste vérifiée. Le fait que les conditions extérieures aient une influence sur les propriétés de la phosphorescence montre qu'il ne s'agit pas d'un phénomène localisé au niveau moléculaire ; les théories actuelles font intervenir les bandes d'énergie cristallines.

Il existe un phénomène présentant à la fois les caractères de la diffusion moléculaire et de la fluorescence : c'est l'effet Raman. Il est utilisé couramment en chimie pour aider à la détermination des structures moléculaires.

Rayons X

En 1895, Roentgen découvrit un nouveau rayonnement, dont la nature lui échappait, et qu'il nomma pour cette raison « rayons X ». On reconnut très tôt qu'il était de nature électromagnétique et non pas constitué de particules électrisées. Les rayons X ont cependant un comportement inhabituel : ils ne donnent pas lieu aux phénomènes de réflexion, réfraction et interférences usuels en optique. La totalité des corps leur sont transparents, même les métaux jusqu'à une épaisseur notable. Il faut 2 à 3 cm de plomb pour les arrêter. Toutes ces propriétés faisaient penser qu'il s'agissait de radiations de longueur d'onde très faible. Cela devait être confirmé par la découverte de la diffraction par les cristaux (von Laue, 1912), qui permet de mesurer les longueurs d'onde.

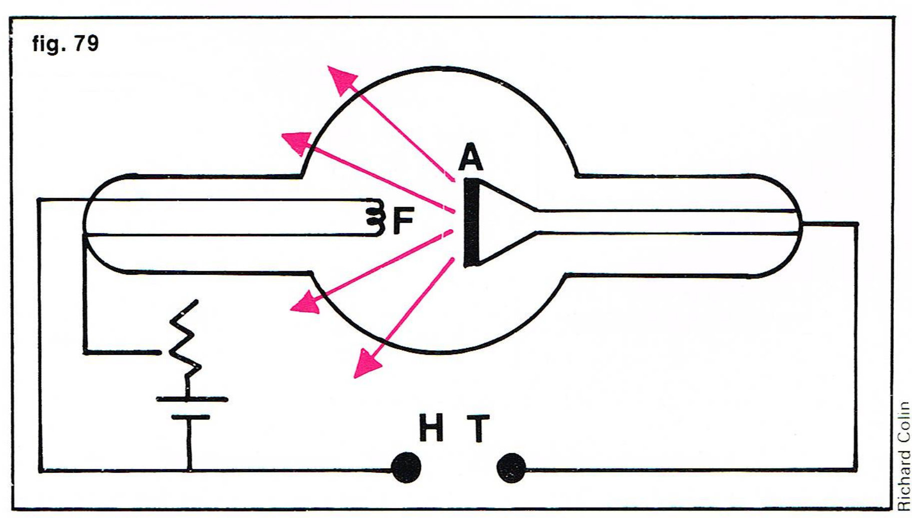
On obtient des rayons X par le tube de Coolidge (*fig.* 79). C'est une ampoule dans laquelle est réalisé un vide aussi poussé que possible. Un filament chauffé émet des électrons qui sont accélérés par une haute tension électrique de plusieurs centaines de kilovolts. Ils viennent frapper une anticathode de tungstène, portée par un bloc de cuivre. Il est nécessaire d'évacuer la chaleur, car sous les chocs, l'anticathode est portée au rouge. On décèle l'existence des rayons X émis par leur action sur une plaque photographique ou leur fluorescence sur des écrans au platino-cyanure de baryum ou au tungstate de cadmium. On mesure également l'ionisation qu'ils provoquent dans les gaz qu'ils traversent. Chaque photon X est émis par le choc d'un électron sur un atome du métal. Son énergie $h\nu$ ne peut évidemment pas dépasser celle de l'électron incident, laquelle est égale à eV, e étant la charge de l'électron, V le potentiel accélérateur. La longueur d'onde $\lambda = c/\nu$ a donc une limite inférieure :

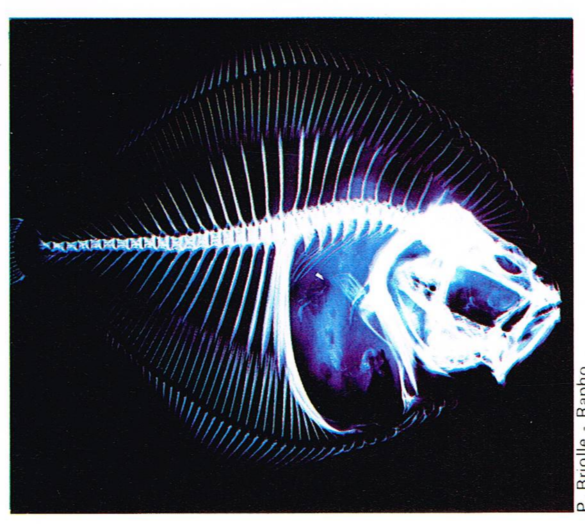
$$\lambda > \frac{hc}{eV}$$

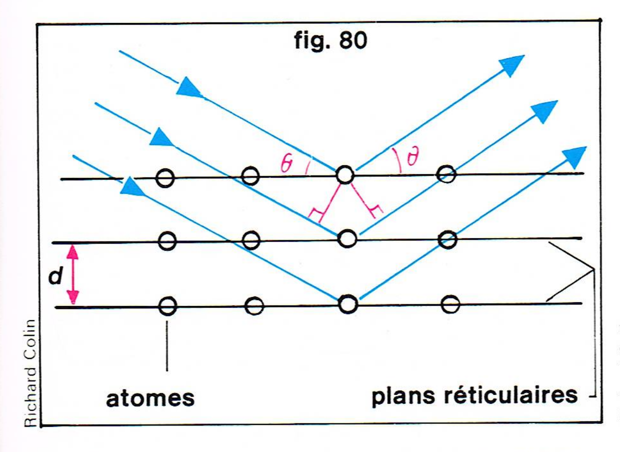
Pour V = 40 000 volts, on trouve une valeur de 0,3 Å. Avec des tensions faibles, on obtient des rayons X très mous, de 100 Å, arrêtés par quelques centimètres d'air. Avec des tensions fortes, on obtient des rayons X très durs, inférieurs à 0,1 Å, traversant plusieurs centimètres de plomb.

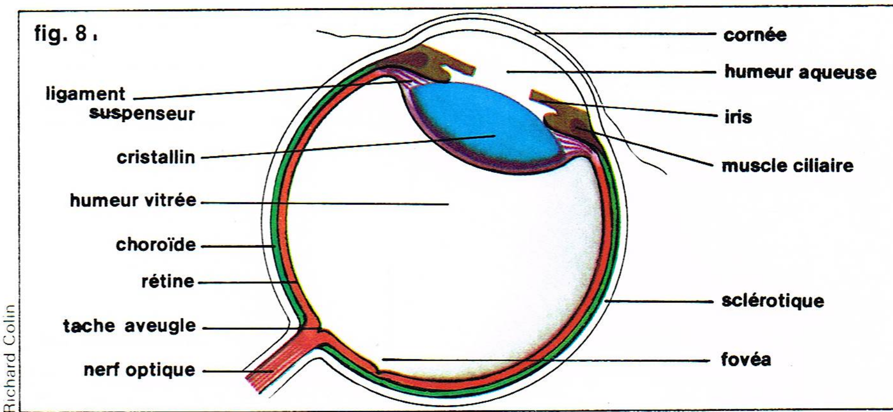
Lorsque l'on examine le spectre émis, on constate qu'il se compose d'une partie continue, à laquelle se superpo-

▼ *A gauche, figure 79 : représentation schématique du tube de Coolidge pour la production des rayons X : F, filament ; A, anticathode ; HT, haute tension. A droite, la totalité des corps étant transparents aux rayons X, ceux-ci sont susceptibles d'applications très diverses dans des domaines très variés : radiologie médicale, radiographie industrielle, spectrochimie, etc. ; ici, un poisson vu aux rayons X.*









▲ *A gauche, figure 80 : diffraction d'un faisceau parallèle de rayons X par les plans réticulaires d'un cristal.*
A droite, figure 81 : coupe schématique d'un œil humain.

sent des raies. La partie continue est due à la perte d'énergie des électrons lorsqu'ils sont freinés brutalement en passant très près d'un noyau atomique. Ce mécanisme de rayonnement par freinage ne se rencontre pas dans les sources optiques usuelles. Quant au spectre de raies, il est spécifique du métal qui constitue l'anticathode. Il est produit de la façon habituelle par excitation d'électrons atomiques qui retombent dans leur état fondamental.

Lorsque des rayons X traversent la matière, on observe trois effets.

— Il peut y avoir diffusion dans le cas où l'électron cible emprunte une énergie notable au photon X incident ; ce dernier est renvoyé avec une longueur d'onde plus grande (effet Compton).

— Il peut y avoir effet photo-électrique avec absorption du photon incident ; les électrons ainsi émis sont responsables de la quasi-totalité de l'ionisation produite par les rayons X.

— Les électrons excités peuvent retomber dans l'état fondamental de l'atome, en émettant des rayons secondaires ; on obtient, comme dans le cas de l'émission d'anticathode, un spectre de raies caractéristique du milieu. C'est donc un phénomène analogue à la fluorescence.

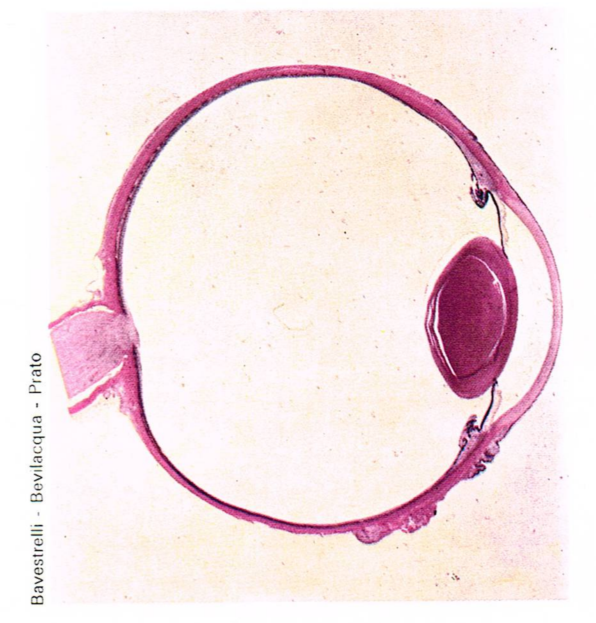
Diffraction des rayons X par les cristaux

Les cristaux sont constitués d'atomes ou de molécules régulièrement disposés dans l'espace. Le plus petit élément nécessaire pour reproduire, par simple translation, l'ensemble du cristal s'appelle une maille. L'ensemble de toutes les mailles constitue le réseau ; chaque position d'atome est appelée un nœud. Trois nœuds, pris au hasard, définissent un plan qui en contient une infinité. Il y a une infinité de tels plans parallèles, appelés plans réticulaires. Un plan réticulaire est d'autant plus intéressant que la densité de la matière, c'est-à-dire de nœuds du réseau, y est plus importante. Les distances entre atomes dans un cristal sont de l'ordre de quelques Å, et donc comparables à la longueur d'onde des rayons X. On peut alors s'attendre à observer des phénomènes de diffraction dans les trois dimensions du cristal, analogues à ceux que produit un réseau à deux dimensions pour les ondes lumineuses.

Considérons des plans réticulaires, séparés par une distance d, et frappés par une onde plane faisant avec eux un angle θ (*fig.* 80). Pour qu'il y ait addition en phase de tous les rayons atteignant tous les nœuds des différents plans réticulaires, il faut que l'angle d'émergence soit égal à θ. Il faut également que la différence de marche soit égale à un multiple de la longueur d'onde, c'est-à-dire :

$$2\,d \sin \theta = p\lambda.$$

C'est la condition de Bragg, dans laquelle p est un nombre entier quelconque. Lorsque l'on fait tomber un faisceau de rayons X sur un cristal, on observe donc sur une plaque photographique une série de taches espacées dans différentes directions. A chaque système de plans réticulaires et à chaque ordre de diffraction p, correspond un angle θ. La figure est assez complexe, mais on arrive toujours à la débrouiller. On en déduit alors les caractéristiques géométriques et la dimension de la maille. Inversement, lorsque l'on possède un cristal parfaitement connu, NaCl par exemple, on peut mesurer la longueur d'onde des rayons X de façon absolue, avec une précision de l'ordre du cent-millième. La diffraction des rayons X est un moyen d'étude extrêmement développé en cristallographie et en chimie.



◄ *Microphotographie d'un œil humain en coupe horizontale (× 3).*

Optique instrumentale

La vue est notre sens le plus important ; c'est lui qui nous donne l'image la plus précise du monde extérieur. On conçoit que, depuis le début des sciences expérimentales, l'homme se soit employé avec ardeur à augmenter les possibilités de sa vision, par la réalisation d'instruments d'optique. Il a développé également les moyens d'enregistrement de l'image, qui est un moyen privilégié de transmission de l'information. Au XXe siècle, l'électronique a ouvert un champ de découvertes nouvelles : télévision, amplification de la lumière, microscope électronique. Nous nous limiterons à l'exposé des applications directes des chapitres précédents d'optique théorique, en étudiant l'œil et les instruments d'optique.

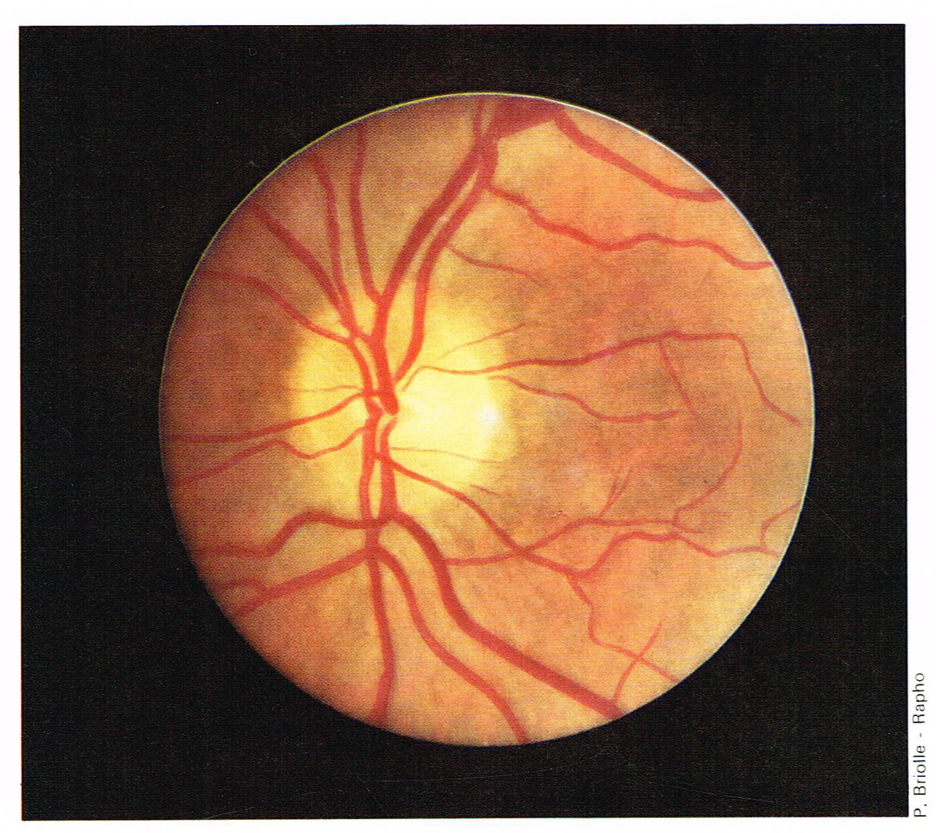
L'œil et la vision

Le premier instrument d'optique est l'œil. Sans entrer dans des détails de physiologie et de médecine qui n'auraient pas leur place ici, il est nécessaire d'en connaître le fonctionnement, les performances et les limites, car les autres instruments d'optique sont conçus en définitive pour donner des images utilisables par l'œil.

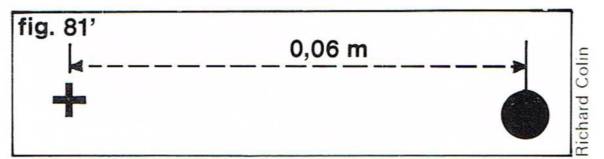
Constitution de l'œil

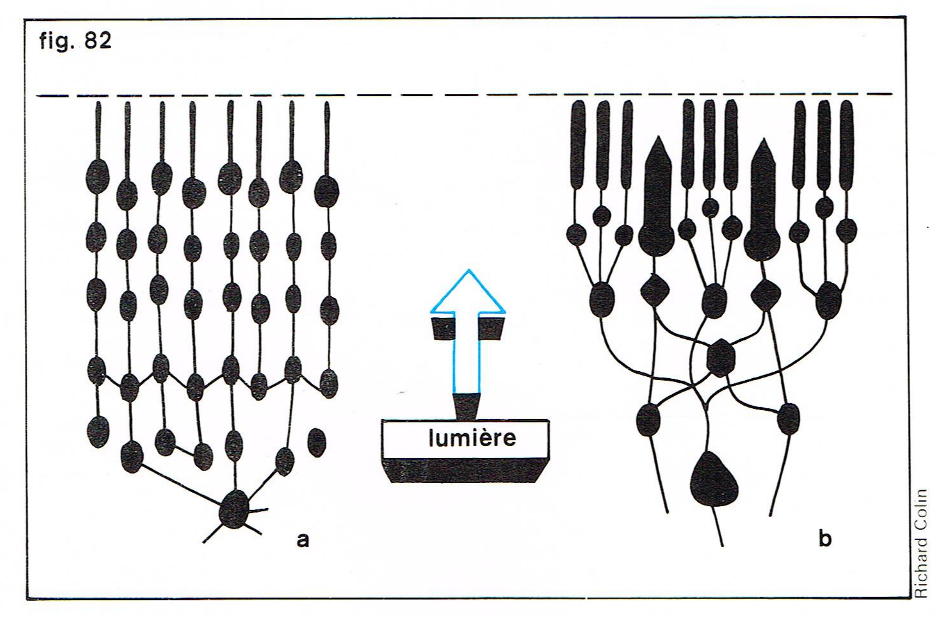
L'œil humain se présente sous la forme d'un globe limité par une peau blanche, la sclérotique. Celle-ci devient transparente à l'avant pour laisser entrer la lumière, et forme la cornée (*fig.* 81). Les rayons lumineux traversent successivement plusieurs milieux transparents : humeur aqueuse, cristallin, humeur vitrée, avant d'atteindre la couche sensible, la rétine.

Le cristallin a la forme d'une lentille convergente biconvexe et agit effectivement comme tel, grâce à son pouvoir de réfraction élevé. Il est maintenu en place par

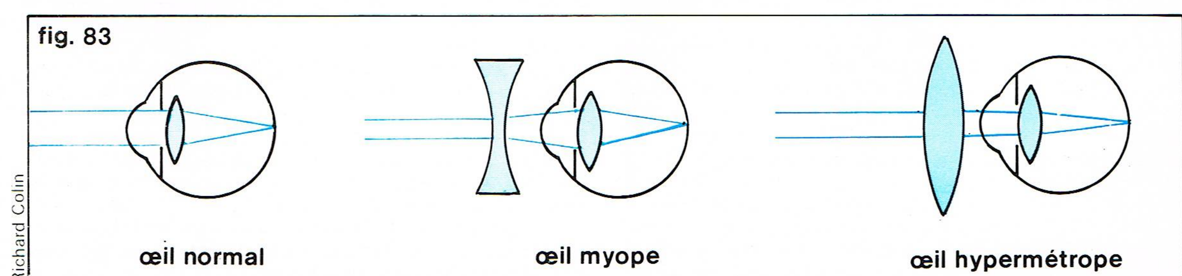


▲ *Photographie du fond d'un œil normal.*





▲ *Figure 82 : vue microscopique de la rétine, au niveau de la fovéa* (a) *et de la périphérie* (b). *Remarquer les cônes fins et serrés de la fovéa, et la complexité des connexions entre cellules.*
▶ *Figure 83 : représentation schématique d'yeux normal, myope et hypermétrope.*



les ligaments suspenseurs et par des muscles ciliaires. Ceux-ci peuvent se contracter sous l'action d'un influx nerveux réflexe et tirer sur la périphérie du cristallin. Le noyau central étant plus dur, la courbure des faces augmente. Il y a ainsi adaptation de la convergence du cristallin suivant la distance de l'objet à observer, de façon que l'image soit toujours nette sur la rétine. Pour un œil normal, l'absence de contraction correspond à la vision à l'infini. Le rapprochement de l'objet provoque inconsciemment le processus d'accommodation, qui, s'il est prolongé, peut devenir pénible.

En avant du cristallin se trouve une membrane, appelée iris, dont la couleur varie suivant les individus. Elle est percée d'une ouverture destinée à laisser passer la lumière : la pupille. Le diamètre de la pupille est variable de 2,5 à 7,5 mm ; il est réglé suivant l'éclairement, de façon réflexe.

La partie la plus délicate et la plus importante de l'œil est la rétine. Elle a sensiblement la forme d'une demi-sphère tapissant le fond de l'œil, collée à une membrane nourricière, la choroïde. Les propriétés de la rétine ne sont pas uniformes sur l'ensemble de sa surface.

Il existe un point, la fovéa, situé à peu près au centre du champ de vision, où l'acuité visuelle est maximale. Lorsque nous désirons observer soigneusement un objet, nous nous plaçons de façon que son image se forme sur la fovéa. Il y a un autre point remarquable au niveau de l'endroit où le nerf optique se forme et part en direction du cerveau ; cette région n'est pas sensible, on l'appelle le *point aveugle* (*fig.* 81').

La *figure* 82 représente une vue microscopique de la rétine, en différents points de celle-ci. On y voit des cellules nerveuses très différenciées, toutes reliées entre elles par des axones et des dendrites. La lumière doit traverser l'épaisseur de la rétine pour atteindre les cellules sensibles. Celles-ci sont de deux sortes, les bâtonnets, les plus nombreux, et les cônes. Plus on s'approche de la fovéa, plus la proportion de cônes devient importante. Dans la fovéa proprement dite, il n'y a plus que des cônes, et ceux-ci deviennent plus serrés et plus petits. La conduction de l'influx nerveux jusqu'au nerf optique n'est pas simple et fait appel à quatre types de cellules. Chaque bâtonnet ou cône n'est pas relié directement par une fibre unique au nerf optique. Il est connecté à plusieurs autres cellules, elles-mêmes connectées entre elles, horizontalement et verticalement. Il y a donc une certaine transformation de l'information au niveau de la rétine : certaines fonctions cérébrales sont déjà effectuées dans l'œil même.

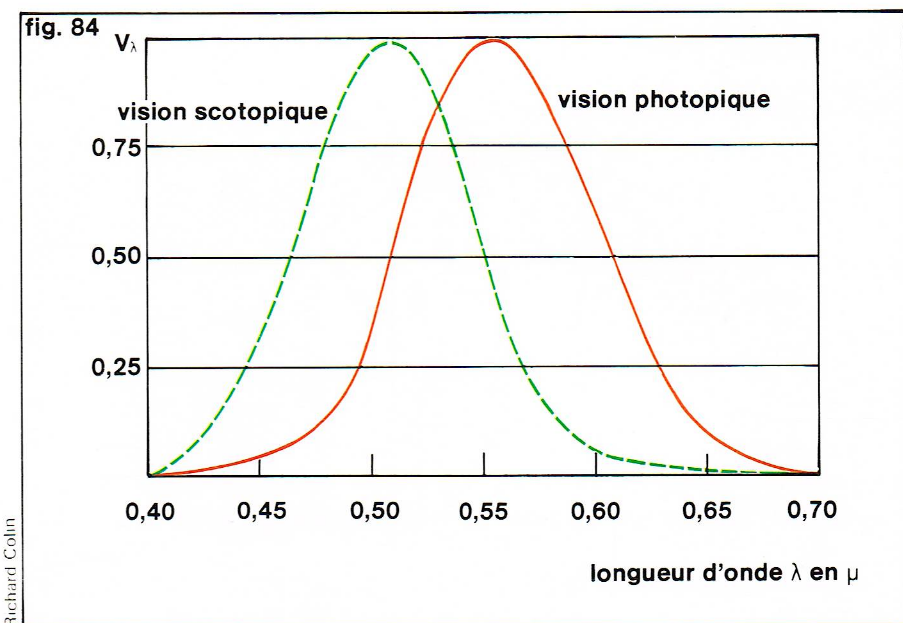
Défauts optiques de l'œil

Il est clair qu'il y a une limite à la déformation du cristallin par les muscles ciliaires.

L'*œil normal* peut voir nettement entre l'infini et un point appelé *punctum proximum* correspondant à la distance minimale d'accommodation. Le punctum proximum d'un homme d'une quarantaine d'années est situé à 20 cm environ. Pour les enfants, le cristallin est plus mou et permet de voir nettement à une dizaine de centimètres. Pour les personnes âgées au contraire, le cristallin devient de moins en moins déformable, et le punctum proximum s'éloigne inexorablement : c'est la presbytie. On y remédie en utilisant, pour la lecture et pour l'observation rapprochée, des lunettes munies de verres convergents.

Les yeux *myopes* ou *hypermétropes* sont les uns trop convergents, les autres pas assez. Les myopes ne peuvent pas voir à grande distance ; par contre, leur punctum proximum est rapproché. Ils sont capables de voir de près des objets très petits que ne peuvent pas distinguer des yeux normaux. C'est ainsi que de jeunes myopes ont pu, antérieurement à l'apparition de la loupe, effectuer des travaux d'orfèvrerie très fins. L'œil hypermétrope,


I.G.D.A.



lui, ne voit pas à courte distance, ce qui fait quelquefois confondre ce défaut avec la presbytie. Lorsqu'un sujet myope ou hypermétrope est muni de verres de lunettes divergents ou convergents, sa vision est parfaitement corrigée (*fig.* 83).

La puissance des lentilles, exprimée en dioptries, sert à mesurer l'importance du défaut de vue. Si, de plus, le sujet, âgé, est atteint de presbytie, il lui est nécessaire d'avoir une correction à la fois pour la vision proche et pour la vision éloignée. Pour éviter d'avoir deux paires de lunettes, on taille sur le même verre deux surfaces sphériques différentes et décentrées (lunettes à double foyer).

L'*astigmatisme* est dû à un défaut de sphéricité du cristallin ; la convergence dans une direction n'est pas égale à la convergence dans la direction perpendiculaire. On y remédie par des verres possédant deux rayons de courbure différents : ils sont taillés dans un tore et non dans une sphère.

Pouvoir séparateur

On appelle pouvoir séparateur de l'œil l'angle minimal sous lequel doivent être vus deux points pour pouvoir être distingués. Sa valeur est égale à une minute d'angle, soit $3 \cdot 10^{-4}$ radian. Pour que deux points puissent être séparés, il est nécessaire qu'ils donnent des images sur deux cellules distinctes de la rétine. La distance de deux cellules contiguës sur la fovéa, là où elles sont le plus serrées, est de l'ordre de 10 μ, ce qui donne bien l'angle indiqué, pour une longueur focale de 3 cm. Un œil normal, ayant son punctum proximum à 25 cm, peut donc distinguer des détails de dimension égale à 0,075 mm. Un myope ou un enfant est avantagé de ce point de vue puisque, lorsque le punctum proximum est à 8 cm, la séparation minimale est ramenée à 0,025 mm.

Ce pouvoir séparateur est la valeur optimale, car, en fait, il dépend des conditions d'observation.

Le premier facteur est la luminance de l'objet. Le pouvoir séparateur est à peu près conservé jusqu'à 1 candela par mètre carré, qui correspond à un papier blanc éclairé par une bougie placée à 60 cm. Au-delà de cette valeur, il décroît régulièrement jusqu'à être 100 fois plus mauvais sous la lumière des étoiles d'une nuit sans lune.

Le second facteur est le contraste, calculable par le rapport, compris entre 0 et 1, des luminances des deux objets à distinguer. Le noir et le blanc juxtaposés donnent la plus grande valeur, égale à 1. Le plus faible contraste perceptible sous un bon éclairage est de 1 %. A la même distance, on ne distingue pas deux traits tracés à la peinture pâle, alors qu'on peut distinguer deux traits à la peinture foncée. Lorsque le contraste passe de 1 à 0,1, puis à 0,02, le pouvoir séparateur est multiplié par 3,5 et 8.

Une troisième limitation est due à la diffraction, car la dimension du pinceau lumineux entrant dans l'œil est limitée. Sous une vive lumière, la pupille de l'œil se contracte naturellement, sans que le diamètre devienne inférieur à 2,5 mm. Cette valeur correspond à une divergence de faisceau de $2 \cdot 10^{-4}$ radian, ce qui est juste au-dessous du pouvoir séparateur maximal. Le rétrécissement de la pupille n'est donc jamais un phénomène gênant. Il n'en est pas de même si un instrument d'optique diaphragme les faisceaux à un diamètre inférieur à 2,5 mm : on perd le bénéfice du grossissement. On voit apparaître ainsi une contrainte importante dont il faut tenir compte dans la fabrication des appareils.

Vision des couleurs

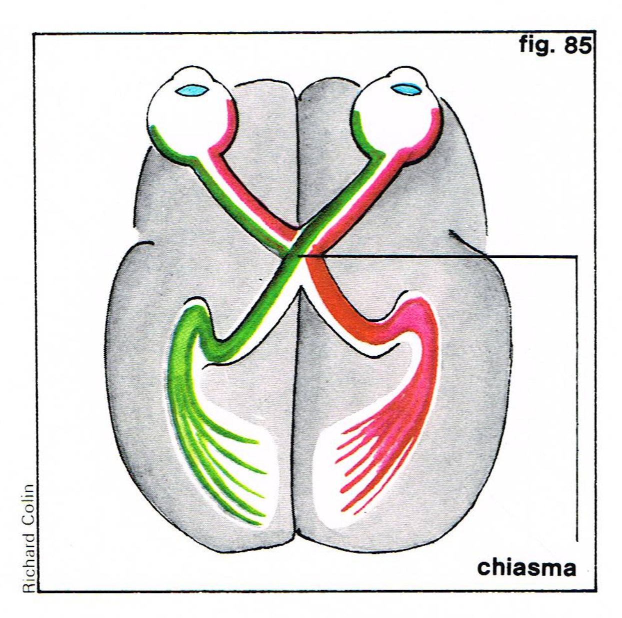
Le phénomène le plus remarquable dans la vision est l'adaptation de l'œil à l'obscurité. Lorsque nous entrons dans une pièce obscure, nous ne distinguons rien tout d'abord, puis, au bout de quelques dizaines de minutes, nous voyons les objets, mais ils apparaissent en « noir et blanc ». C'est ainsi que les étoiles semblent toutes blanches, alors que la photographie ou la spectrographie montrent qu'elles peuvent présenter toutes les couleurs du spectre. Les deux types de cellules de la rétine ont une fonction différente : les bâtonnets donnent la vision à faible intensité, tandis que les cônes sont sensibles aux couleurs, sous forte lumière. D'ailleurs, la vision nocturne est meilleure lorsque l'objet est observé de côté, son image ne se formant pas sur la fovéa, qui ne contient que des cônes. La courbe de sensibilité spectrale, mesurée par les méthodes de la photométrie visuelle, n'est pas la même pour les cônes et les bâtonnets (*fig.* 84) : le rouge est moins visible dans l'obscurité (effet Purkinje).

Toute radiation possède une distribution spectrale, qui définit sans ambiguïté la quantité de chaque onde monochromatique qu'elle contient. Mais elle a aussi une couleur, sensation visuelle globale, à la fois plus complexe et moins précise qu'une courbe mathématique. La recherche de la corrélation entre ces deux caractéristiques n'est pas uniquement un problème de physiologie. Elle est indispensable pour des applications pratiques très importantes : photographie et télévision en couleurs. Une même sensation colorée peut être produite par différentes distributions spectrales. Pour faire les expériences, on procède de la façon suivante : des projecteurs blancs, d'intensité réglable, munis de filtres de différentes couleurs, envoient leur faisceau sur un écran, de façon qu'ils aient une partie commune. Pour comparer les couleurs, on juxtapose les deux taches lumineuses, et on voit si la

◀▲ A gauche, reproduction d'un manuscrit de Léonard de Vinci relatif à la démonstration du phénomène de l'irradiation due à l'œil. A droite, figure 84 : sensibilité spectrale de l'œil en fonction de la longueur d'onde. Vision nocturne, ou scotopique, due aux bâtonnets (en pointillé), et vision diurne, ou photopique, due aux cônes (en trait plein). En vision scotopique, le maximum de sensibilité se situe dans le bleu-vert, et la sensibilité au rouge est à peu près nulle.

◀ Page ci-contre, figure 81' : fermez votre œil gauche en appliquant la main gauche sur la paupière ; prenez de la main droite le présent volume, et présentez devant votre œil droit ouvert la figure 81' que vous tiendrez à l'extrémité du bras tendu. Regardez la petite croix noire, seulement, et rapprochez peu à peu le dessin de votre visage : il arrivera un moment où votre œil cessera de voir le rond noir. Rapprochez encore la figure, et les deux images, croix et rond, apparaîtront de nouveau. Il faut que l'œil qui regarde soit maintenu à la perpendiculaire élevée au milieu de la croix. Cette expérience prouve qu'il y a dans la rétine un petit espace qui n'est pas sensible à la lumière, c'est le punctum caecum, ou tache aveugle, départ du nerf optique.

▶ *Figure 85 : trajet des nerfs optiques, de la rétine vers le cortex cérébral, en passant par le chiasma.*



limite disparaît, comme en photométrie. On constate par exemple que l'addition de lumières rouge et verte, d'intensités relatives réglables, peut être identifiée à n'importe quelle lumière jaune. Les études conduisent aux lois expérimentales suivantes :

— si deux couleurs sont égales, l'addition d'une même troisième donne de nouveaux mélanges égaux ;

— généralement, une couleur peut être formée de l'addition de trois couleurs différentes A, B et C quelconques appelées primaires :

$$c = xA + yB + zC$$

x, y et z étant la proportion de chaque primaire.

Il n'existe pas d'ensemble de trois primaires qui reproduisent *toutes* les teintes. L'affirmation courante selon laquelle les couleurs primaires sont le rouge, le bleu et le vert signifie simplement qu'à partir de ces trois composantes on peut reconstituer une gamme maximale de couleurs.

L'étape suivante serait la réponse à la question : quel mécanisme provoque la vision des couleurs ? La théorie de Young et Helmholtz suppose que les cônes peuvent contenir trois sortes de pigments différents. Chacun d'eux absorbe la lumière suivant son spectre propre, et la cellule nerveuse restitue une sensation dépendant de cette absorption. Les bâtonnets aussi contiennent un pigment, le pourpre rétinien, qu'on a pu isoler et qui présente un spectre d'absorption reproduisant exactement la courbe de sensibilité de l'œil à faible luminosité. On peut en déduire que la somme des spectres d'absorption des trois pigments des cônes est une courbe identique à celle de la sensibilité de l'œil à haute luminosité. Il est plus difficile de trouver le spectre individuel de chaque pigment. Or il existe des sujets ne percevant pas toutes les couleurs, les daltoniens. Leur maladie est probablement due à l'absence d'un pigment ; des expériences effectuées avec eux permettent donc de déterminer les spectres cherchés.

Vision du relief

Lorsque l'on suit le trajet des fibres nerveuses jusqu'au cerveau, on constate que les deux nerfs optiques se croisent et se mélangent en un point appelé chiasma. Le lobe postérieur de chaque hémisphère cérébral reçoit des influx provenant des deux yeux à la fois : l'hémisphère gauche, par exemple, reçoit les fibres provenant des moitiés gauches de chaque rétine (*fig.* 85). Il y a donc une intégration des impressions venant des deux yeux : c'est la vision binoculaire. D'ailleurs, les mouvements des globes oculaires commandés par des muscles externes sont parfaitement synchronisés pour que les deux images coïncident, sauf en cas de maladie (strabisme). Pour un objet éloigné, les deux axes optiques sont parallèles ; pour un objet proche, ils sont un peu convergents, à cause de l'écartement des yeux. Cette accoutumance à la distance d'observation est un réflexe ; au niveau cérébral, elle se traduit par la sensation du relief.

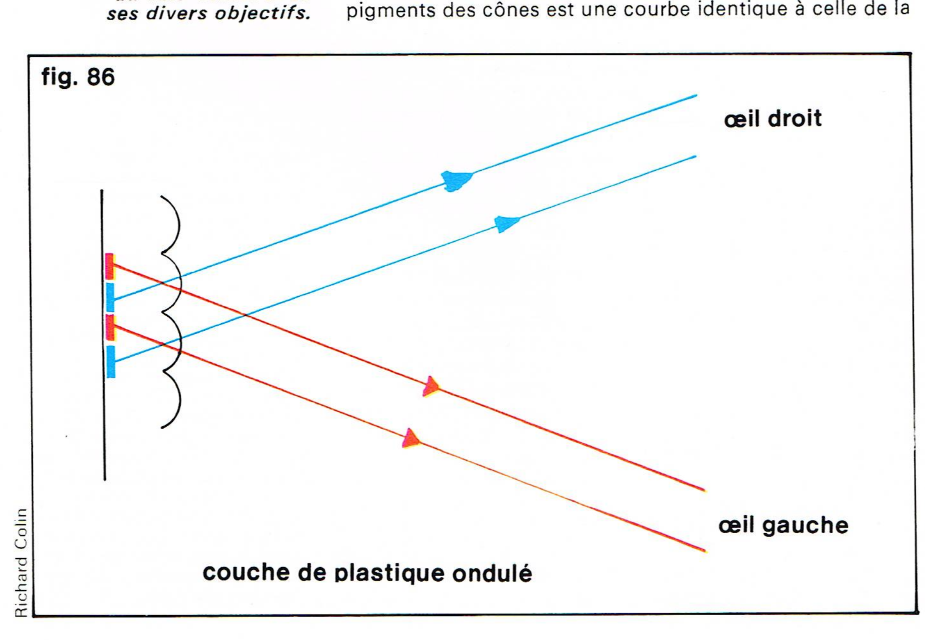
Il existe différents procédés pour restituer le relief à partir de la surface plane d'une photographie. Dans tous les cas, on prend deux images du paysage avec deux objectifs séparés par une distance égale à l'écartement des yeux (prise de vue stéréoscopique). On observe ensuite le couple avec un système de deux oculaires. On peut également projeter les deux images sur un écran avec deux objectifs contenant deux polariseurs croisés. Le spectateur porte des lunettes ayant également deux polariseurs croisés : chaque œil ne reçoit ainsi que l'image qui lui est destinée. Un principe un peu analogue est de colorer une image en bleu, l'autre en rouge, de les imprimer l'une sur l'autre, et d'observer avec des lunettes comprenant un verre rouge et un verre bleu (anaglyphes). Un autre procédé permet de se passer de lunettes : le couple stéréoscopique est imprimé alternativement, chaque image étant divisée en bandes très fines ; le tout est couvert d'une couche de plastique ondulée qui, tenue à distance convenable, ne laisse passer vers chaque œil que l'image qui lui est destinée (*fig.* 86).

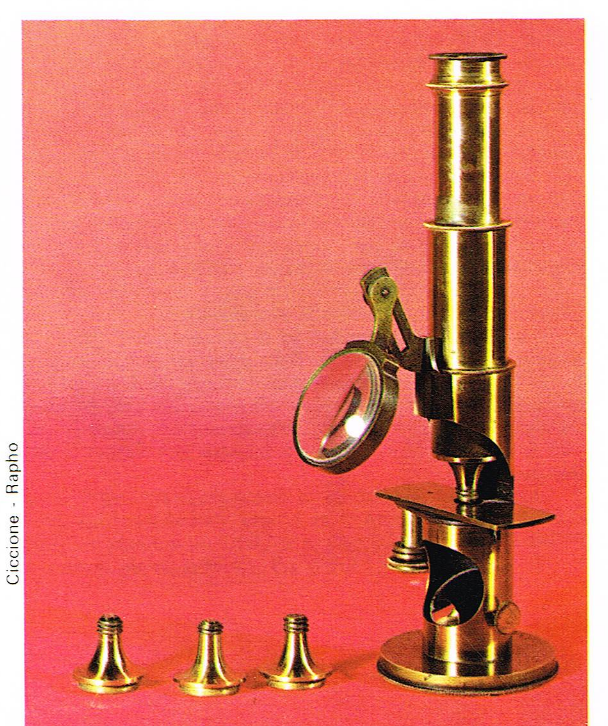
Instruments d'optique

Dans l'Antiquité, les Égyptiens, puis les Grecs et les Romains savaient tailler et polir le cristal de roche. Mais les méthodes étaient celles des lapidaires et non celles, beaucoup plus précises, des opticiens. Les images vues à travers ces lentilles primitives sont grossies, mais moins nettes. Les anciens savaient également fondre le verre et le souffler pour fabriquer des loupes permettant de concentrer la lumière solaire.

L'invention des lunettes est attribuée soit à Salvano d'Aramento degli Amati (mort en 1317), soit à Alessandro

▼ *A gauche, figure 86 : vision binoculaire d'une photographie « en relief ». En rouge et bleu, les images destinées à l'œil gauche et à l'œil droit. A droite, un microscope du début du XIXe siècle avec ses divers objectifs.*





della Spina (mort en 1313). L'usage s'en est répandu en Europe lentement, peu de personnes sachant lire à l'époque. Cela prouve qu'on avait déjà découvert une méthode de travail des surfaces optiques.

Il a fallu cependant attendre le milieu du XVIe siècle pour que l'on envisageât systématiquement l'utilisation de lentilles pour observer des objets éloignés ou très petits. En effet, ce n'est qu'à ce moment que les lois de l'optique commencèrent à être connues. La lunette de Galilée, instrument très simple composé de deux lentilles, permit à celui-ci de découvrir, après 1609, les satellites de Jupiter et les phases de Vénus.

Ce fut le premier appareil composé, comprenant les deux éléments usuels, objectif, côté objet, et oculaire, côté œil. La loupe et le microscope firent leur apparition presque simultanément, mais leur mauvaise qualité empêcha au début de faire des observations poussées. On ne savait pas polir des lentilles de courte distance focale.

C'est au XVIIe siècle que l'on apprit à faire fondre l'extrémité d'un fil de verre dans une flamme pour former par capillarité une sphère presque parfaite. En taillant une face pour obtenir une lentille plan-convexe, Leeuwenhoek fabriquait des loupes de distance focale 2 mm. Avec cet appareil rudimentaire au champ très limité, il découvrit les bactéries, les protozoaires, les spermatozoïdes et les globules du sang. Au milieu du XIXe siècle, les progrès dans la construction des objectifs permirent au microscope de supplanter définitivement la loupe de Leeuwenhoek.

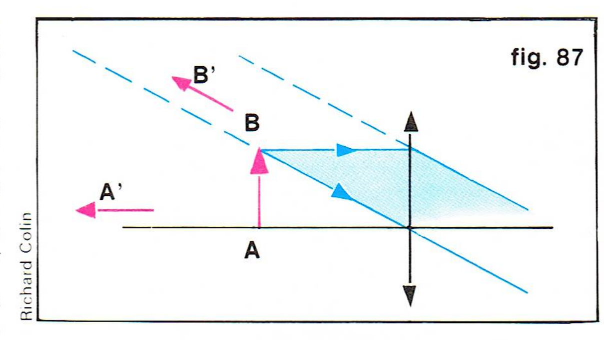
L'histoire de l'amélioration du microscope est alors une lente recherche de la correction de toutes les aberrations. L'utilisation de deux verres différents permet d'atténuer l'aberration chromatique (Dollond, 1753). Lister, puis Amici parvinrent ensuite à corriger l'aberration de sphéricité. L'amélioration des verres d'optique, grâce aux techniques de fabrication, de fusion et de recuit, a été également un facteur important de progrès. Actuellement, le degré de perfection ne peut plus être dépassé, car la limite physique imposée par la diffraction est atteinte. Les possibilités récentes concernent les techniques nouvelles d'observation : contraste de phase, ultramicroscopie, polarisation.

Mais le microscope optique est actuellement dépassé par le microscope électronique. Le tableau suivant représente l'échelle des pouvoirs séparateurs atteints :

Œil normal	75 μ
Œil myope	15 μ
Loupe simple (XVIIe siècle)	2 μ
Microscope (fin du XIXe siècle)	0,2 μ
Microscope électronique (milieu du XXe siècle)	0,04 μ

Du côté des instruments astronomiques, c'est l'augmentation des dimensions qui a entraîné les premiers progrès. Dans la lunette astronomique, l'objectif et l'oculaire sont des lentilles. Dans le télescope, l'objectif est un miroir parabolique. Ce dernier est constitué par un bloc de verre poli et argenté ; il y a une seule surface optique à réaliser, et l'homogénéité interne du verre est sans importance. Le premier télescope a été construit par Zucchi en 1616 ; il a bénéficié des améliorations de Newton, Gregory et Cassegrain. Un pas important a été franchi par Schmidt en 1930, qui réussit à augmenter le champ de la façon suivante : le miroir parabolique est remplacé par un miroir sphérique, et il y a une lame de verre compensatrice d'épaisseur non uniforme qui corrige l'aberration de sphéricité. Il faut noter qu'actuellement l'augmentation des dimensions ne sert qu'à permettre la détection d'objets de moins en moins lumineux. En effet, le pouvoir séparateur est beaucoup plus limité par la turbulence atmosphérique entraînant des fluctuations d'indice de réfraction de l'air que par la diffraction. C'est ainsi que de meilleures photographies de planètes sont obtenues avec la lunette du pic du Midi (diamètre 60 cm) qu'avec le télescope du mont Palomar (diamètre 5 m). On tend à placer les observatoires à une altitude aussi élevée que possible, et même à bord de satellites artificiels.

L'astronomie s'oriente également vers l'exploration des longueurs d'onde non visibles. Profitant de la technique des radars développée pendant la dernière guerre, on a construit des radiotélescopes qui ont permis d'importantes découvertes (fond continu à 3 °K, quasars, pulsars). Les satellites artificiels permettent également d'observer des radiations normalement absorbées par l'atmosphère terrestre ; c'est le cas du satellite *Uhuru*, sensible aux rayons X.



◄ *Figure 87 : image d'un objet AB donné par une loupe.*

Les progrès actuels de l'optique instrumentale sont dus à l'augmentation de la liste des matériaux utilisables et surtout à l'utilisation des ordinateurs. On peut calculer rapidement des combinaisons optiques de plus en plus compliquées et envisager le polissage automatique des surfaces non sphériques ; cela, toujours dans le dessein d'une correction de plus en plus précise des aberrations.

La loupe

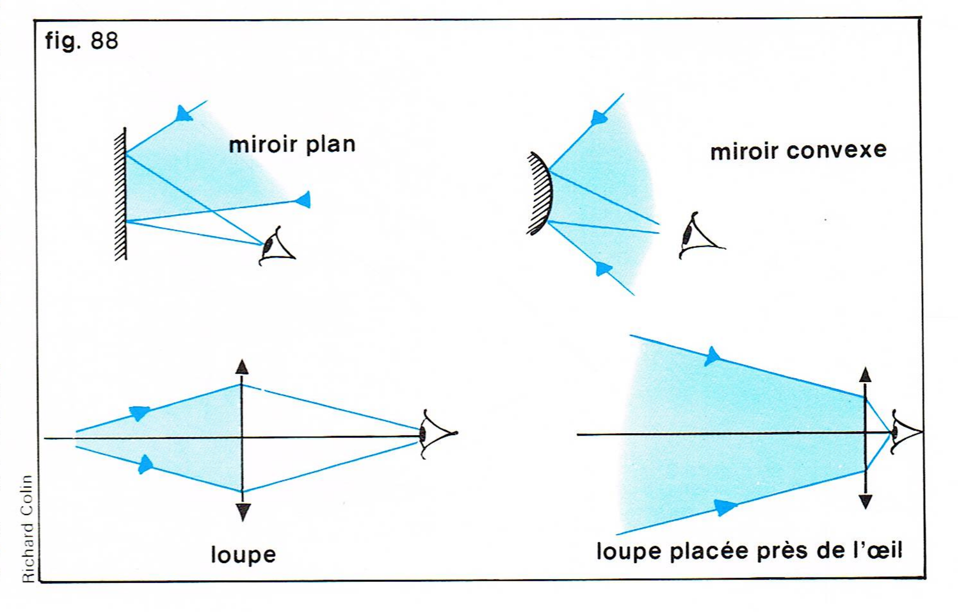
Une loupe est une lentille convergente utilisée pour observer des objets rapprochés. Sa puissance P, inverse de la distance focale f exprimée en mètres, est mesurée en dioptries. En utilisation normale, l'objet est placé au foyer, ce qui donne une image virtuelle à l'infini et évite ainsi la fatigue de l'accommodation (*fig.* 87). Le grandissement, rapport de la dimension de l'image à celle de l'objet, est infini. Mais ce n'est pas cette quantité qui est intéressante dans les instruments d'optique : une image dix fois plus grande mais dix fois plus éloignée n'apporte rien. Le gain en pouvoir séparateur est donné par le grossissement : rapport des angles entre deux points de l'image et les mêmes points de l'objet vu à l'œil nu. Pour un punctum proximum de 25 cm, il est égal à :

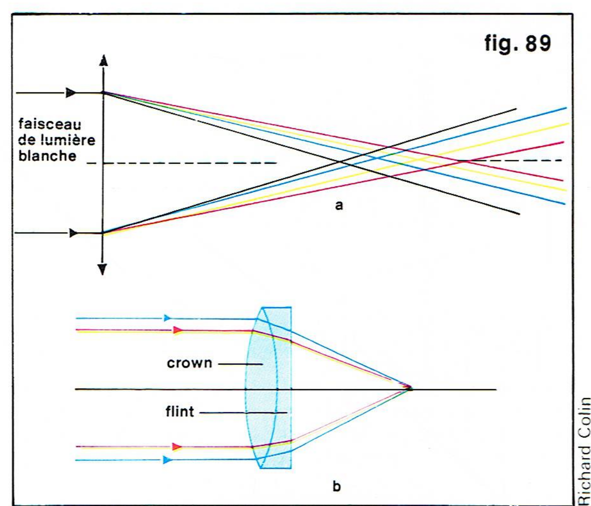
$$G = \frac{0,25}{f} = 0,25\ P \qquad (9)$$

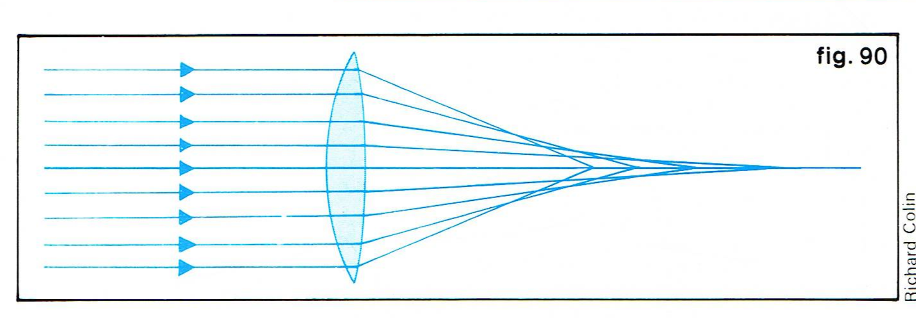
On ne fabrique guère de loupe plus puissante que 100 dioptries, ce qui donne un grossissement de 25.

Une autre quantité intéressante dans les instruments optiques est le champ, c'est-à-dire l'angle à l'intérieur duquel un objet est visible. Il est déterminé par le faisceau qui peut passer à la fois par la lentille et par la pupille (*fig.* 88). On a intérêt à mettre la loupe très près de l'œil pour augmenter le champ, et à trouver par tâtonnements la position adéquate de l'objet.

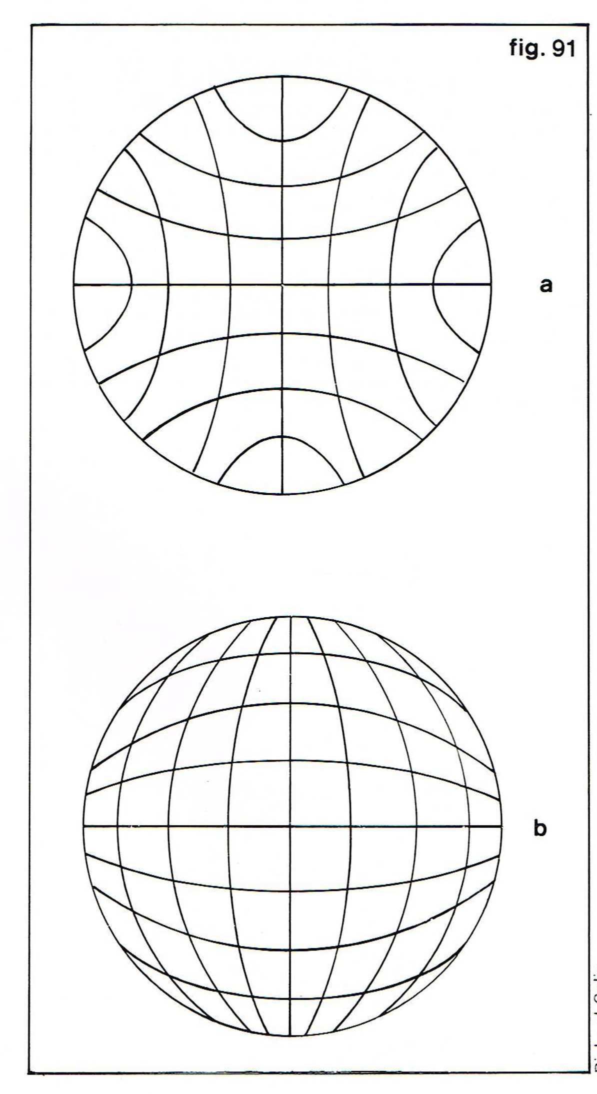
▼ *Figure 88 : le champ d'un instrument d'optique est la portion d'espace visible ; il dépend de la dimension de l'appareil et de la position de l'œil. Le champ d'un miroir plan est plus petit que celui d'un miroir convexe. Le champ d'une loupe est maximal lorsque celle-ci est placée près de l'œil.*







▲ *En haut, figure 89 : aberration chromatique* (a) *et sa correction par un doublet* (b). *Ci-dessus, figure 90 : aberration de sphéricité ; les rayons parallèles ne convergent pas, mais enveloppent une surface appelée caustique.*



▶ *Figure 91 : image d'un quadrillage régulier donné par une loupe : distorsion en barillet* (a) *et en coussinet* (b).

Pour une loupe de moyenne puissance, la partie de l'image située au centre du champ apparaît nette. Ce n'est plus le cas sur les bords, où les conditions de Gauss ne s'appliquent plus. Il apparaît également une distorsion de l'image, ainsi que de l'aberration chromatique. Il faut donc réduire le diamètre de la lentille, ce qui a pour inconvénient de diminuer le champ. La loupe de Leeuwenhoek, de distance focale 2 mm, diaphragmée à 0,6 mm, atteint la limite permise par la diffraction. Elle n'a plus qu'un intérêt historique, n'importe quel petit microscope donnant la même performance avec un champ et une clarté bien meilleurs.

Aberrations

L'aberration chromatique est due à la dispersion de tout milieu transparent. Une lentille simple donne d'un point lumineux, en lumière blanche, situé sur l'axe une série continue d'images colorées (*fig.* 89). On remédie à ce défaut en adjoignant à une lentille convergente une lentille divergente moins puissante, de façon que l'ensemble reste convergent. La lentille divergente est taillée dans un verre plus dispersif (flint). Il est différent du verre ordinaire (crown), car il contient de l'oxyde de plomb. On obtient ainsi la même longueur focale pour *deux* radiations du spectre ; les autres sont moins bien corrigées. Au lieu de ce système appelé achromatique, on peut, avec trois lentilles, égaliser sur trois radiations (triplet apochromatique).

Les aberrations géométriques sont plus complexes. Elles se manifestent pour tout système centré, en particulier les combinaisons de lentilles dès que l'on quitte le domaine de l'approximation de Gauss. Il existe quatre types d'aberrations géométriques, totalement irréductibles les uns aux autres : la théorie montre qu'il est impossible de corriger un système optique simultanément pour tous les types. On n'y arrive qu'approximativement et, jusqu'à une époque récente, plus par tâtonnements que par le calcul.

L'aberration de sphéricité existe déjà lorsque le point est sur l'axe de l'instrument ; les rayons ne convergent pas en un foyer (*fig.* 90). On peut l'atténuer de la façon suivante : dans un doublet achromatique, la convergence des deux lentilles est fixée, mais non les rayons des surfaces sphériques. Une même puissance peut être obtenue pour n'importe quelle valeur d'un des deux rayons ; on peut donc jouer sur ce paramètre pour obtenir l'aberration minimale.

La coma est une aberration qui existe pour des points situés hors de l'axe, lorsqu'ils envoient des rayons obliques. Elle s'observe à l'état pur pour l'image d'une étoile dans le miroir d'un télescope. En effet, dans ce cas, l'aberration sphérique est déjà corrigée par l'utilisation d'un miroir parabolique. L'image d'un point apparaît comme une tache brillante prolongée vers l'extérieur par une tache diffuse, en forme de comète (d'où le nom). Une bonne correction est possible en jouant, comme précédemment, sur un paramètre libre du doublet. La formule des sinus d'Abbe, déjà citée en optique géométrique, est alors satisfaite :

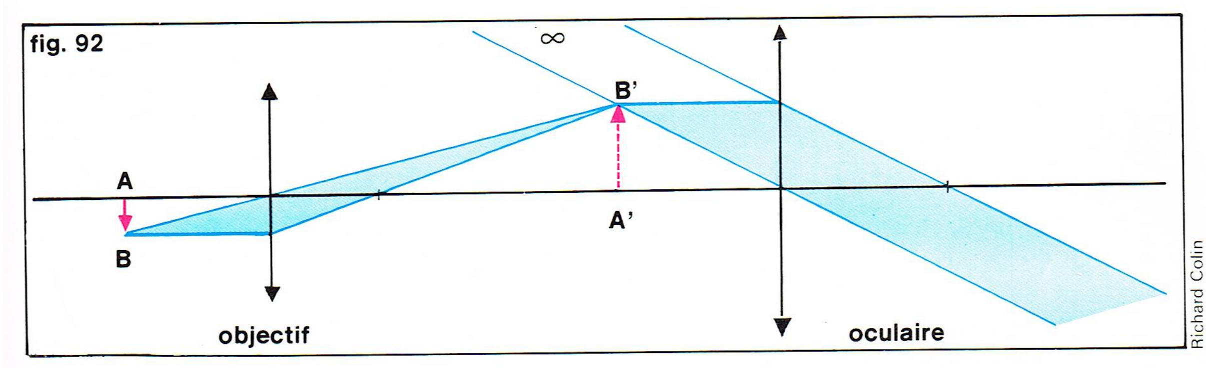
(10) $$ny \sin \alpha = n'y' \sin \alpha'$$

L'objectif obtenu est achromatique et, approximativement, stigmatique et aplanétique.

Un autre type d'aberration est encore un terme qui n'apparaît que lorsque les deux conditions de Gauss ne sont satisfaites ni l'une ni l'autre. Il se manifeste par l'astigmatisme et la courbure de champ. Pour un pinceau lumineux quelconque, les rayons lumineux ne convergent pas en un foyer, mais sur un segment (astigmatisme). La meilleure image est obtenue à mi-chemin des deux focales extrêmes. Mais alors, pour la totalité de l'objet, les points images ne sont pas situés dans un plan : c'est la courbure de champ.

La distorsion est une aberration qui existe, même pour un système très diaphragmé, lorsque le point objet est éloigné de l'axe. L'image est déformée sur les bords du champ, en barillet ou en coussinet. On voit bien le phénomène avec un quadrillage régulier grossi par une loupe (*fig.* 91).

Comme il est impossible de corriger toutes les aberrations simultanément, on fabrique, suivant le but recherché, des combinaisons différentes. Dans un objectif de microscope, on recherche essentiellement le pouvoir séparateur,



◀ *Figure 92 : formation des images dans un microscope.*

et on néglige un peu la déformation de l'image due à la courbure de champ et à la distorsion. C'est évidemment le contraire pour un objectif photographique, où la qualité des images est le plus important.

Le microscope

L'idée du microscope est simple : puisque la loupe ne parvient pas à agrandir suffisamment un objet, observons à la loupe, non plus l'objet, mais une image agrandie de celui-ci. L'appareil se compose donc de deux parties, un objectif et un oculaire, montés aux extrémités d'un tube de longueur fixe (*fig.* 92). L'image intermédiaire est placée au foyer de l'oculaire pour être observée à l'infini, le grossissement de l'oculaire est de l'ordre de 10 à 20. La distance de l'image intermédiaire à l'objectif est alors fixée par la dimension du tube. Le grossissement du microscope est égal au produit du grandissement de l'objectif par le grossissement de l'oculaire. Il peut varier de 20 à 1 600 pour un même tube de 16 cm de long, lorsqu'on dispose d'une gamme interchangeable d'objectifs et d'oculaires.

Pour qu'un objectif donne un fort grandissement, il faut que la distance focale soit petite (par exemple 3 mm pour une valeur de 60). Les objectifs sont donc des systèmes complexes de lentilles, de faible ouverture. Comme ils possèdent une certaine épaisseur, l'objet doit être placé très près, environ à 0,3 mm. Cette distance doit être respectée à 0,3 μ près si l'on veut que la mise au point soit acceptable. La profondeur de champ est donc très faible, d'autant plus que le grossissement est plus important. Les objets doivent être spécialement préparés pour l'observation. Ils sont en général coupés en une lamelle très fine ; si ce n'est pas le cas, quand on observe une goutte liquide par exemple, on ne voit que les particules situées dans une tranche de 0,3 μ d'épaisseur. On a avantage, lorsque cela est possible, à employer un grossissement faible, ce qui, par ailleurs, augmente le champ latéralement. Contrairement à une loupe, qui peut être tenue à la main, un microscope doit être fixé à un socle très stable. Des crémaillères démultipliées permettent de déplacer le tube et éventuellement l'objet.

Le faisceau lumineux entrant dans l'objectif est limité latéralement par la dimension de celui-ci. Il y a donc un phénomène de diffraction qui limite le pouvoir séparateur. Une technique intéressante, l'immersion, consiste à interposer entre l'objet et la première lentille un liquide d'indice n élevé. Des rayons lumineux qui auraient été perdus sont ainsi réfractés et renvoyés dans l'objectif. On emploie généralement l'huile de cèdre ($n = 1{,}52$). Le calcul montre alors que la plus petite distance discernable entre deux points est :

$$0{,}61 \frac{\lambda}{n \sin u}$$

La quantité u est appelée ouverture ; c'est l'angle que font avec l'axe optique les rayons utiles les plus obliques (*fig.* 93). Compte tenu de la limitation des dimensions, nécessaire à la correction des aberrations, on atteint actuellement la valeur $n \sin u$ 1,3. Le pouvoir séparateur correspondant est de 0,25 μ.

Celui de l'œil nu étant égal à 75 μ, on voit qu'il est inutile de chercher un grossissement supérieur à 300. Des expériences ont montré cependant que, dans les conditions particulières où travaillait l'œil, c'est un grossissement de 1 200 qui permet la meilleure performance.

La première lentille d'un objectif est une demi-boule, ce qui semble absurde, étant donné la mauvaise qualité de cette lentille. On utilise en fait le stigmatisme rigoureux du dioptre sphérique, pour un point situé à une distance R/n du centre. L'indice n du liquide d'immersion est égal à celui du verre. On peut utiliser une deuxième fois cette propriété par un ménisque convergent (*fig.* 94). Aucune aberration de sphéricité ni de coma n'a été introduite jusqu'ici par les deux lentilles, qui forment le groupe antérieur. Par contre, il existe une très importante aberration chromatique. Celle-ci est corrigée par les lentilles suivantes, qui constituent le groupe postérieur. Ce sont des doublets, de convergence assez faible, qui, s'ils étaient seuls, formeraient un objectif d'ouverture 0,25. On obtient ainsi, grâce aux découvertes d'Amici et de Lister, l'objectif moderne de microscope. Le dernier progrès devait être la réalisation d'un objectif corrigé pour trois couleurs « apochromatique » (Abbe, 1886).

Contrairement aux objectifs, qui sont des systèmes optiques dont l'étude et la réalisation sont complexes, les oculaires sont simples et peu coûteux. En effet, le faisceau lumineux qui y entre est déjà très diaphragmé et peu incliné par rapport à l'axe. On se trouve donc plus près des conditions de Gauss, et les aberrations sont plus faibles et faciles à corriger. Les oculaires sont formés généralement de deux lentilles appelées verre de champ et verre d'œil. Pour l'aberration chromatique, il suffit de réaliser une correction apparente : les images de différentes couleurs sont vues sous le même angle, mais elles ne sont pas à la même distance de l'œil. La fabrication d'un objectif parfait étant difficile, on reporte quelquefois une partie des corrections à faire sur l'oculaire, calculé spécialement (oculaire compensateur).

Utilisation du microscope

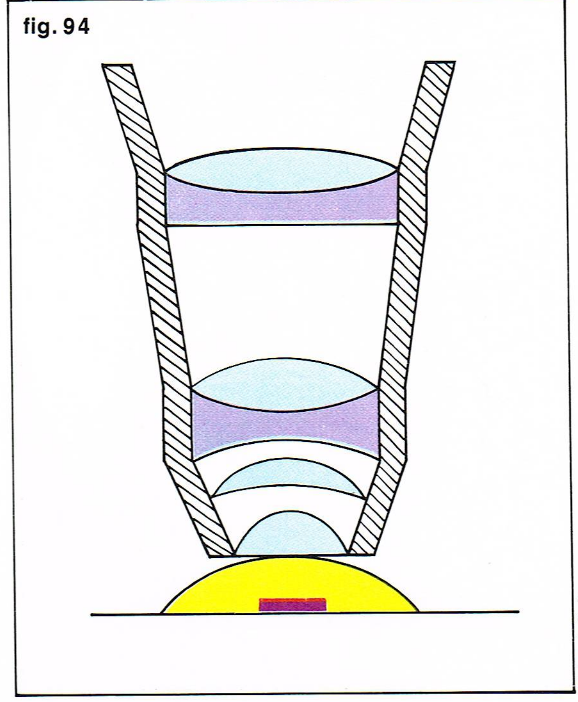
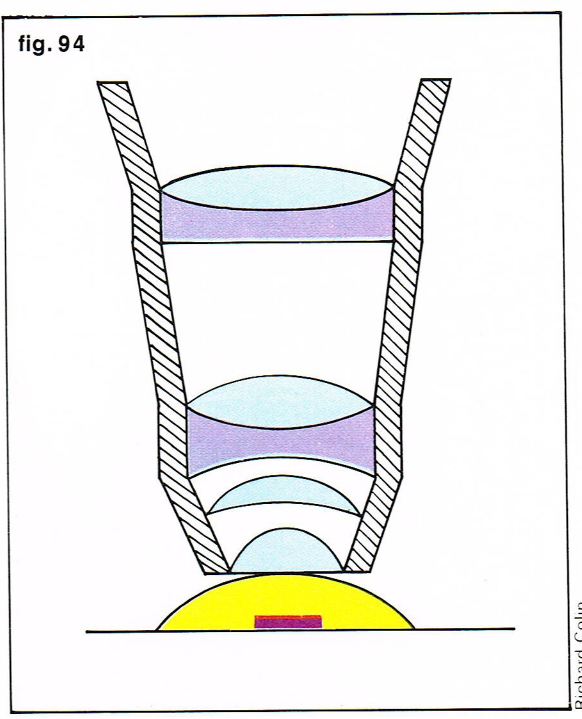
Les qualités optiques du microscope ne sont pas les seuls points qui doivent être soignés pour obtenir une bonne observation. Il est nécessaire d'avoir un objet

▼ *Figure 93 : ouverture d'un objectif.*

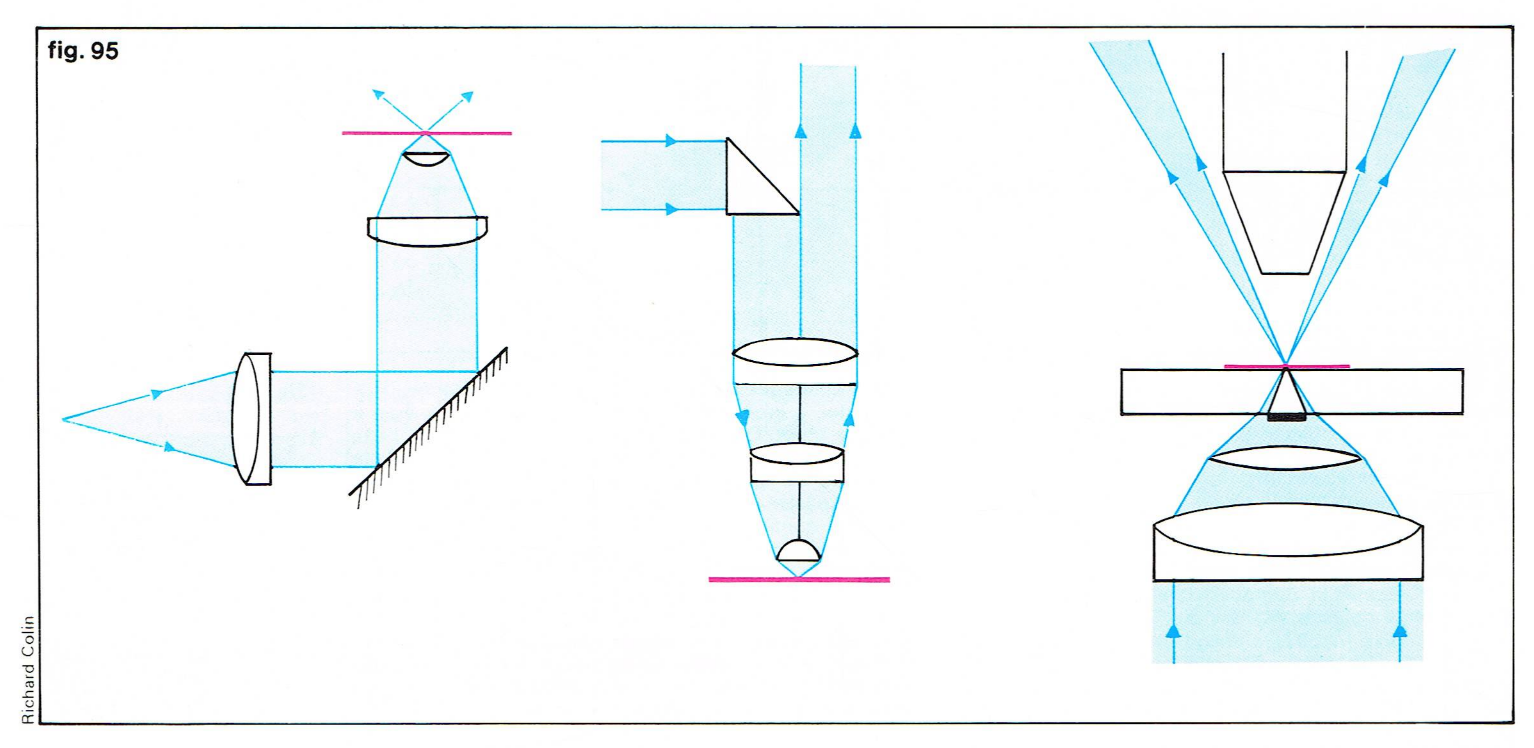
fig. 93

u

Richard Colin

◀ *Figure 94 : objectif achromatique de microscope avec immersion.*



Richard Colin

▲ *Figure 95 : représentation schématique de l'éclairage par transparence, par réflexion et à fond noir.*

▼ *Coupe de racine de maïs, grossie 100 fois et photographiée en lumière polarisée.*

B. Roberts - Rapho

convenablement préparé et bien éclairé. L'éclairement doit être très intense, car la lumière envoyée par une toute petite surface se répartit après grossissement, suivant un grand angle. Cette lumière doit d'autre part être dirigée de façon à pénétrer au maximum dans l'objectif. Enfin seule la partie observée doit être éclairée si l'on veut éviter que des rayons parasites ne pénètrent à l'intérieur du tube et voilent l'image. Le problème est encore compliqué pratiquement par le fait que l'objet se trouve très près de la surface de la première lentille de l'objectif. On emploie une source lumineuse, placée latéralement, dont les rayons sont renvoyés suivant l'axe optique par un miroir plan. Dans le cas général où la préparation est transparente, l'éclairement se fait par-dessous à l'aide d'un système optique appelé condenseur. Celui-ci est un ensemble de lentilles, analogue à un objectif, mais fonctionnant à l'envers : l'image de la source est réduite et éclaire la surface à observer. Lorsque l'objet est opaque, il doit être éclairé par-dessus et observé par réflexion. C'est alors l'objectif lui-même qui sert de condenseur, et le miroir servant à amener la lumière suivant l'axe optique ne doit pas gêner l'observation : on utilise un miroir semi-transparent ou encore un miroir ne couvrant que la moitié de la section du tube. La *figure* 95 représente ces différents dispositifs d'éclairage ; on y voit également un montage permettant l'ultramicroscopie, par l'éclairage à fond noir. Cette méthode permet de révéler l'existence de détails de dimensions très inférieures au pouvoir séparateur, grâce à la lumière qu'ils diffractent. Ils doivent être isolés, et on ne distingue pas leur forme.

La préparation de l'objet à observer est une opération minutieuse, et les techniques sont presque aussi variées que les objets. Dans le cas où le grossissement est faible, il n'est pratiquement pas besoin de préparation et on emploie souvent un microscope binoculaire. Il est constitué par deux tubes jumelés, un pour chaque œil, et donne une vision de relief stéréoscopique. Un système de miroirs permet, comme dans les jumelles à prismes, de redresser l'image qui, ordinairement, est inversée. Il est possible alors d'opérer de petites manipulations et dissections sous le microscope. Pour des grossissements supérieurs à quelques dizaines, un tel instrument n'est plus utilisable : la profondeur de champ devient très faible, l'objectif est très proche de l'objet, et il est impossible de commander à la main des mouvements suffisamment précis.

En biologie, on observe par transparence des couches minces de tissus animaux ou végétaux. L'objet est plongé dans l'alcool, le xylène, puis la paraffine fondue. Après durcissement, le bloc de paraffine est découpé en tranches minces de quelques microns au moyen d'un appareil appelé microtome. La coupe est placée sur une plaque de verre et recouverte par une lamelle. Les lamelles couvre-objet ont une épaisseur de 0,15 mm, et les objectifs de microscopes biologiques sont corrigés pour tenir compte de leur présence. De très nombreux colorants peuvent être utilisés, suivant les détails à mettre en évidence. Certaines observations sont faites sur des cellules vivantes, plongées dans une goutte d'eau, entre lame et lamelle. Une manipulation est possible, à l'aide d'un appareil qui démultiplie les mouvements de la main (micromanipulateur de Fonbrune).

En dehors de la biologie, une des applications fondamentales du microscope est la métallurgie : étude des alliages et des minéraux. Dans ce cas, l'objet est opaque et doit être éclairé par réflexion. La préparation de la substance consiste tout d'abord à réaliser une surface aussi plane et polie que possible. On utilise des limes de plus en plus fines, puis des meules lubrifiées à l'albumine en suspension dans l'eau. On dépose ensuite des réactifs chimiques variés qui attaquent différemment les cristaux suivant leur nature et leur grosseur.

Différentes techniques annexes ont été imaginées pour augmenter les possibilités du microscope. En métallographie, la présence générale de cristaux anisotropes fournit un large champ d'applications à la lumière polarisée.

Le *microscope polarisant* le plus simple comprend un polariseur dans le condenseur et un analyseur au niveau du tube. Ce procédé permet de rendre visible l'orientation des cristaux, qui n'apparaît pas en lumière naturelle. Mais il existe aussi de très nombreux montages combinant les lames quart d'onde et les polariseurs. En biologie, on utilise le contraste de phase, décrit dans le chapitre *Diffraction*, pour l'observation de détails transparents. Ce procédé a l'avantage d'être simple et d'exiger une modification minime de l'appareillage. Mais pour les objets qui diffractent peu, on emploie la microscopie interférentielle. Son principe est de dédoubler l'onde lumineuse provenant de la source et d'envoyer les deux faisceaux dans l'objectif, un seul ayant éclairé l'objet. Il se produit une interférence, et des détails transparents normalement invisibles introduisent une différence de marche qui se traduit par une différence de luminosité. Il s'agit en quelque sorte d'un interféromètre suivi d'un microscope.

Des techniques spécialisées requièrent une refonte complète de l'appareil. Ainsi, pour corriger plus soigneusement les aberrations géométriques, peut-on abandonner complètement l'aberration chromatique. Cela est rendu possible par l'existence de lampes puissantes presque monochromatiques pouvant servir à éclairer l'objet. Le résultat est intéressant lorsque l'image, destinée à être photographiée en noir et blanc, doit être exempte de déformation sur les bords. On peut avoir besoin, pour observer certains objets, d'éclairer en lumière infrarouge ou ultraviolette. L'image est soit photographiée, soit rendue visible par un écran fluorescent. L'ultraviolet a également l'avantage de donner un gain en pouvoir séparateur, puisque la longueur d'onde est plus petite. Malheureusement, il n'est pas toujours possible de trouver des matériaux transparents à ces radiations et dans lesquels on puisse tailler des lentilles. La solution est alors le *microscope catadioptrique :* l'objectif est un miroir sphérique. Cet appareil, ancien dans sa conception, a connu un regain d'intérêt. Contrairement aux objectifs à lentilles, l'aberration de sphéricité n'est pas corrigée, et il est nécessaire d'avoir un oculaire compensateur. Par contre, l'aberration chromatique est complètement absente, puisque les lois de la réflexion sont indépendantes de la longueur d'onde. C'est pourquoi l'instrument peut être utilisé utilement pour la photographie en couleurs, avec la lumière visible.

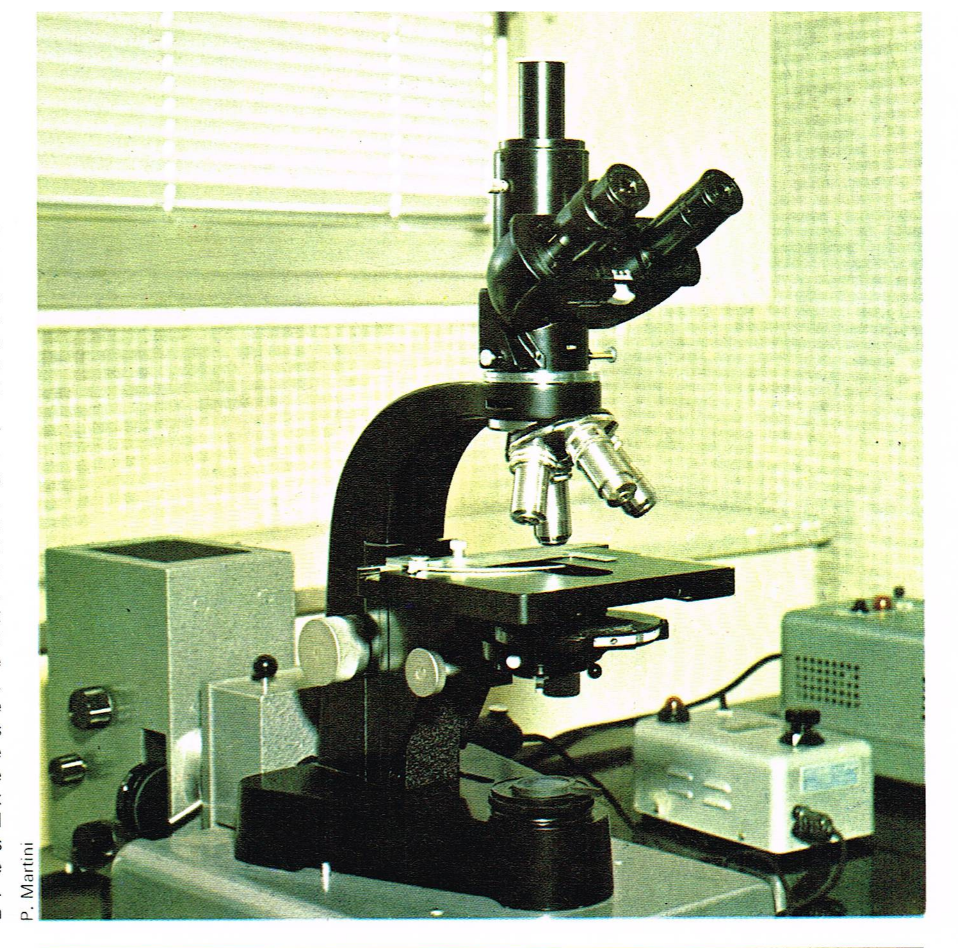
Instruments terrestres

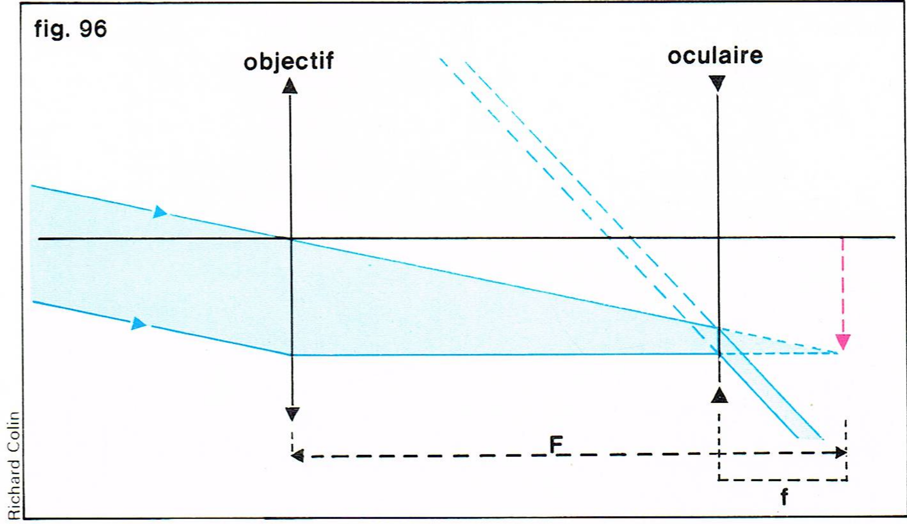
Lorsque l'on désire observer un objet éloigné, il n'existe pas de solution très simple, analogue à la loupe, constituée d'une seule lentille. En effet, pour être dans la situation la plus confortable, l'œil ne doit pas accommoder. Le système optique doit donc donner d'un objet à l'infini une image à l'infini : on dit qu'il est afocal. Il comporte toujours un objectif et un oculaire. On distingue les instruments terrestres, où l'image est droite, et les instruments astronomiques, où l'image est renversée par rapport à l'objet

La première réalisation est la *lunette de Galilée* (1609) constituée par une lentille convergente suivie d'une lentille divergente. L'objectif donne une image réelle à la distance F ; celle-ci se trouve au foyer de l'oculaire et lui sert d'objet virtuel (*fig.* 96). La distance focale f (en valeur absolue) de l'oculaire est plus petite que F, et le grossissement est égal à :

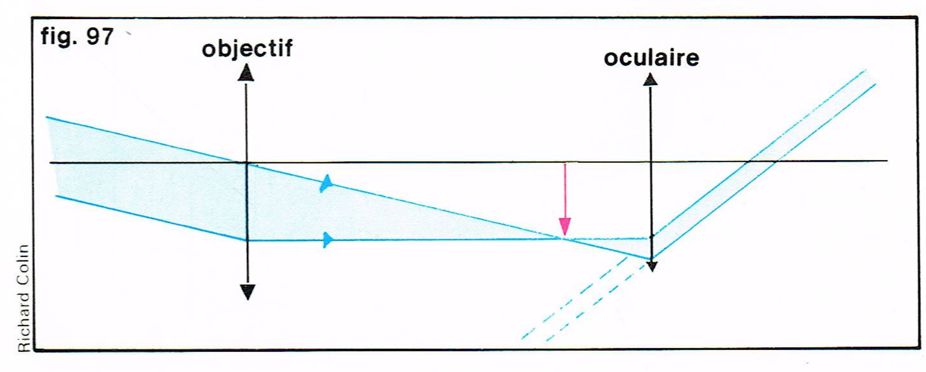
(11) $$G = \frac{F}{f}$$

La lunette de Galilée est encore utilisée de nos jours lorsque le grossissement demandé est faible, pour des jumelles de théâtre par exemple.


P. Martini



Richard Colin



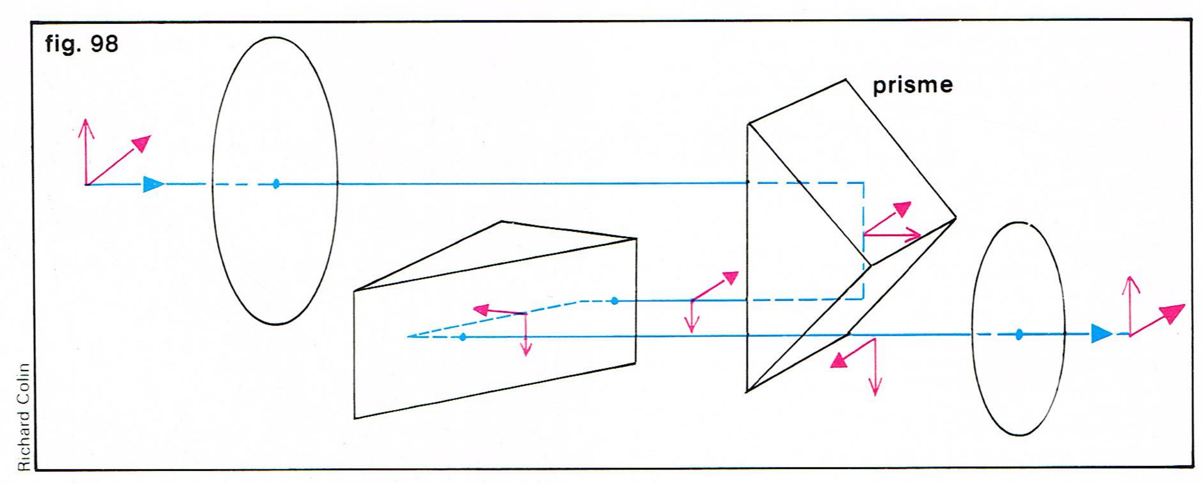
Richard Colin

Dans la *lunette astronomique*, l'oculaire est une lentille convergente qui joue donc le rôle d'une loupe pour agrandir l'image réelle donnée par l'objectif (*fig.* 97). La formule donnant le grossissement est la même que précédemment. Mais ici, l'image est inversée, et il est nécessaire de disposer entre objectif et oculaire un dispositif redresseur, pour transformer la lunette astronomique en *lunette terrestre*. On peut utiliser un système de lentille convergente, qui a l'inconvénient de rallonger le tube (longue-vue).

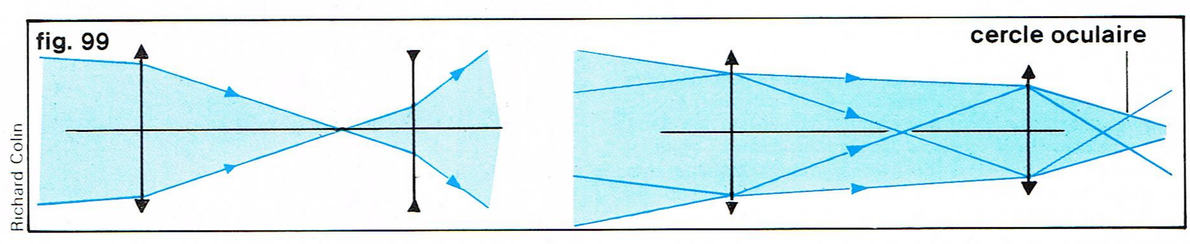
▲ En haut, un microscope optique utilisable pour les observations en fluorescence et en contraste de phases.

Formation de l'image dans la lunette de Galilée (figure 96) et dans la lunette astronomique (figure 97).

▶ Figure 98 : trajet de la lumière dans la jumelle à prismes.



▶ Figure 99 : champs comparés de la lunette de Galilée et de la lunette astronomique. Dans la première, il faut placer l'œil près de l'objectif ; dans la seconde, il faut le placer au niveau du cercle oculaire.



▼ A gauche, un astrotélémètre à laser. A droite, figure 100 : schéma optique d'un télémètre.

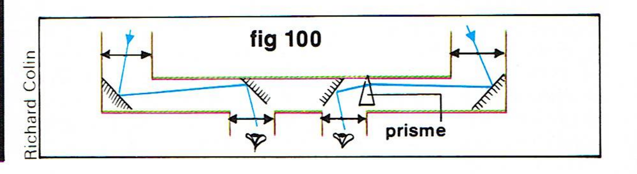
Belzeaux - Rapho

Dans les *jumelles à prismes*, le redressement est obtenu par des miroirs ; il est indispensable d'en avoir un nombre pair pour que l'image soit superposable à l'objet, et non symétrique de celui-ci. Des prismes à réflexion totale (*fig.* 98) permettent d'avoir une perte très faible de la luminosité. Pour former des jumelles, on associe deux lunettes, les objectifs étant plus écartés que les oculaires. On accentue ainsi l'effet de relief dû à la vision binoculaire.

Le redressement de l'image introduit une complication par rapport à la lunette de Galilée. Mais il y a un avantage : le champ est plus étendu. En effet, les rayons doivent passer par la pupille de l'œil, et un verre convergent les ramène vers l'axe, alors qu'un verre divergent les en éloigne. Avec une lunette astronomique, contrairement à une loupe, il faut placer l'œil non pas le plus près possible du verre, mais à une place précise appelée cercle oculaire (*fig.* 99). Il s'agit de l'image, donnée par l'oculaire, de l'objectif.

On ne fabrique pas d'instruments très puissants de grossissement supérieur à quelques dizaines. En effet, il faudrait augmenter la distance focale de l'objectif, donc la dimension du tube. Ce dernier devrait être fixé sur un support très stable et encombrant. D'ailleurs les turbulences et l'impureté de l'atmosphère représenteraient une limitation insurmontable. De très nombreux instruments de mesure (goniomètres, théodolites, sextants, etc.) utilisent une lunette terrestre, et il est impossible de citer toutes les techniques qui les emploient. On a souvent besoin de superposer à l'image un réticule (couple de deux fils perpendiculaires matérialisant un point) ou une échelle graduée, tracée sur une surface transparente. Il suffit de placer ces dispositifs dans le plan focal, là où se forme l'image réelle intermédiaire.

On appelle *télémètre* un instrument servant à mesurer les distances. Son principe est de capter les rayons lumineux provenant de l'objet par deux objectifs éloignés d'une distance d. Un système de miroirs les renvoie vers deux oculaires où les deux images sont observées simultanément (*fig.* 100). Si la distance de l'objet est D, les directions des rayons font entre elles l'angle : $\alpha = d/D$. Il est possible de faire coïncider les deux images en manœuvrant un prisme mince qui introduit sur les rayons la déviation α. L'incertitude est proportionnelle à D^2, et inversement proportionnelle à d. Des appareils de 2 m de long sont utilisés jusqu'à des distances de 10 km. Ce type d'instrument est cependant supplanté par les télémètres à laser, dont la précision est constante, quelle que soit la distance. Ce sont en fait des radars optiques qui mesurent la durée d'aller-retour d'un flash lumineux. Les télémètres à deux objectifs continuent néanmoins d'être utilisés, sur des appareils photographiques par exemple.



Lunette astronomique

Dès la fin du XVIe siècle, les lunettes astronomiques ont été employées, et ont fait largement progresser la connaissance du ciel. Mais les physiciens se heurtaient au problème de la correction de l'aberration chromatique qui, d'après Newton, était insoluble. Ce défaut est cependant moins gênant si la distance focale est grande, et les astronomes construisirent des lunettes de 50 m de haut. Vers 1753, Dollond introduisit le doublet achromatique, mais il subsiste une aberration résiduelle qu'on appelle spectre secondaire et qu'on atténue comme avant, en augmentant la focale.

Le pouvoir séparateur est donné par la formule suivante :

(12) $$\varepsilon = \frac{0{,}6\ \lambda}{F \sin \alpha}$$

α étant le demi-angle d'ouverture. Ce dernier est égal à D/2F, où D est le diamètre de l'objectif et F sa distance focale.

On a donc la relation simplifiée :

$$\varepsilon = \frac{12''}{D}$$

D étant exprimé en centimètres. Mais, lorsque l'objectif est suffisamment grand pour séparer deux points, encore faut-il que l'œil soit capable de les distinguer. Il existe un pouvoir séparateur intrinsèque dû à la structure cellulaire de la rétine. On sait que ce dernier, dans les meilleures conditions, est égal à une minute d'arc. Pour profiter au maximum de la performance de l'instrument, il faut que $G\,\varepsilon > 1'$, soit :

$$\frac{F}{f}\,\frac{12''}{D} > 1'$$

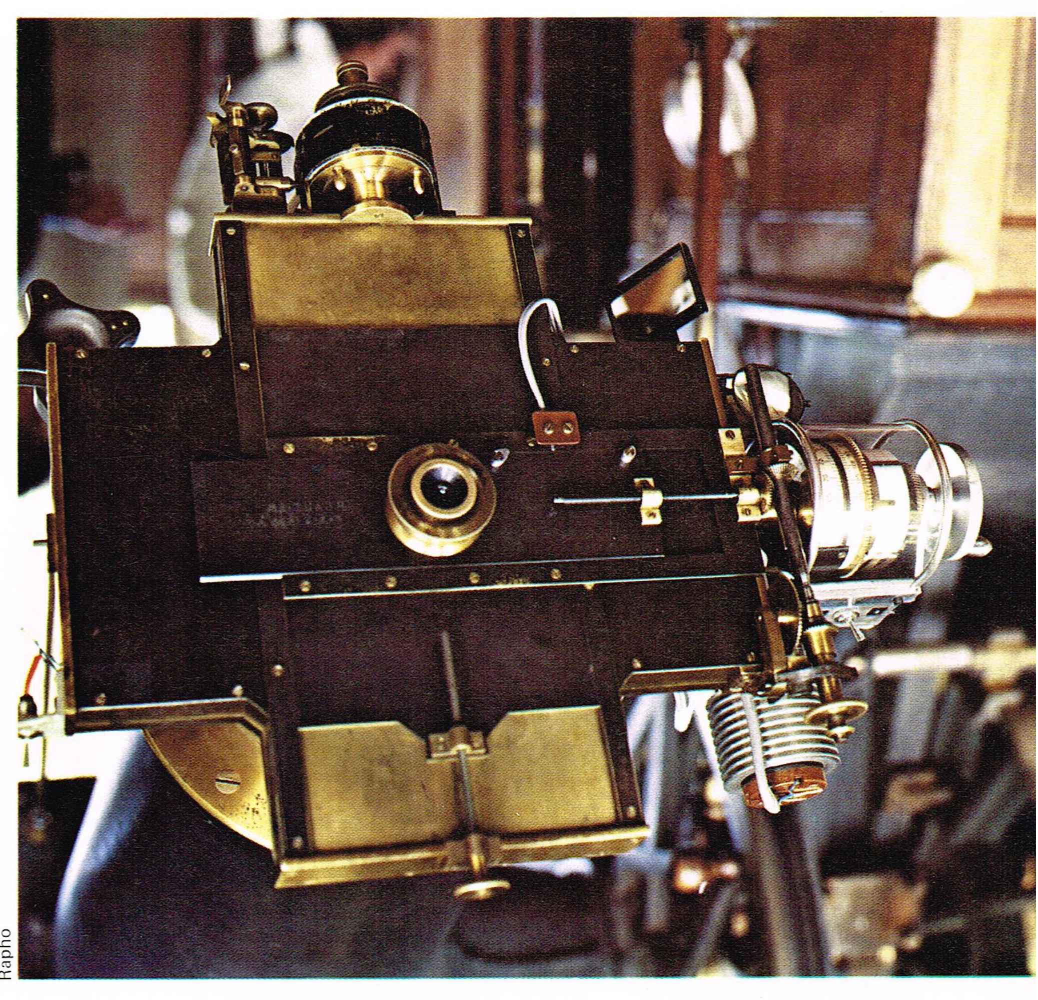
L'oculaire doit donc avoir une puissance assez forte. Lorsqu'on forme l'image sur une plaque photographique, c'est la taille des grains d'argent contenus dans l'émulsion qui détermine la plus petite dimension observable d'un objet. Elle est de l'ordre de 0,02 mm, et l'on voit par conséquent qu'il faudrait une focale très longue pour que le pouvoir séparateur soit limité uniquement par la diffraction. La photographie utilise donc mal les instruments astronomiques, sauf ceux de petite dimension.

La supériorité de la photographie sur l'œil apparaît néanmoins si l'on considère la quantité minimale de lumière qui peut être détectée. L'œil repère instantanément un objet, mais une observation prolongée n'apporte rien. Par contre, une émulsion, qui, après une pose de cinq minutes, atteint la sensibilité de l'œil, peut être laissée à impressionner pendant plusieurs heures. D'autre part, pour de grands instruments très coûteux, auxquels ont accès de nombreux laboratoires, la photographie réduit le temps d'utilisation de chacun. Lorsqu'on observe des étoiles, on ne voit jamais de détail, quel que soit le grossissement, mais un cercle lumineux qui est la tache de diffraction. La totalité de la lumière passant dans l'objectif traverse l'oculaire et la pupille de l'œil. Le gain en luminosité, qui peut être énorme pour de grands instruments, peut être constaté avec de simples jumelles : on y voit beaucoup plus d'étoiles qu'à l'œil nu. Lorsque l'objet est étendu (planète), cet effet est compensé par un effet inverse : l'étalement de l'image, dû au grossissement.

Il existe un phénomène perturbateur qui nuit à tous les instruments astronomiques. C'est le fait que l'atmosphère est toujours agitée, et qu'il y a constamment des variations locales de densité de l'air. L'indice de réfraction subit des variations aléatoires dans le temps et dans l'espace. Le scintillement des étoiles vues à l'œil nu est dû à ce phénomène. La situation des observatoires modernes est toujours choisie en altitude pour cette raison. Une coupole métallique protège du vent, de l'humidité et des lumières parasites. Elle est hémisphérique, percée d'une ouverture pour l'observation, et peut tourner pour découvrir différentes régions du ciel.

La partie métallique d'un instrument, tube et support, est très importante. Toute déformation entraîne une perte de précision ; or l'axe optique doit être mobile pour être pointé sur n'importe quel point du ciel. Il faut avoir deux axes de rotation, non parallèles.

La monture la plus simple, dite azimutale, comprend un axe vertical et un autre horizontal.



Rapho

▲ *Une* **lunette astronomique** *en service à l'observatoire de Besançon.*

On appelle monture équatoriale un système d'axes dont l'un est dirigé suivant la ligne des pôles (axe horaire) et l'autre suivant une direction perpendiculaire (axe équatorial). L'intérêt d'un tel montage est que, pendant que la Terre tourne, il suffit de faire tourner l'instrument en sens inverse autour de l'axe horaire pour rester toujours pointé sur le même astre. C'est la solution à peu près universellement adoptée pour tous les gros instruments.

L'amélioration du pouvoir séparateur et de la luminosité se réduit à une recherche du gigantisme.

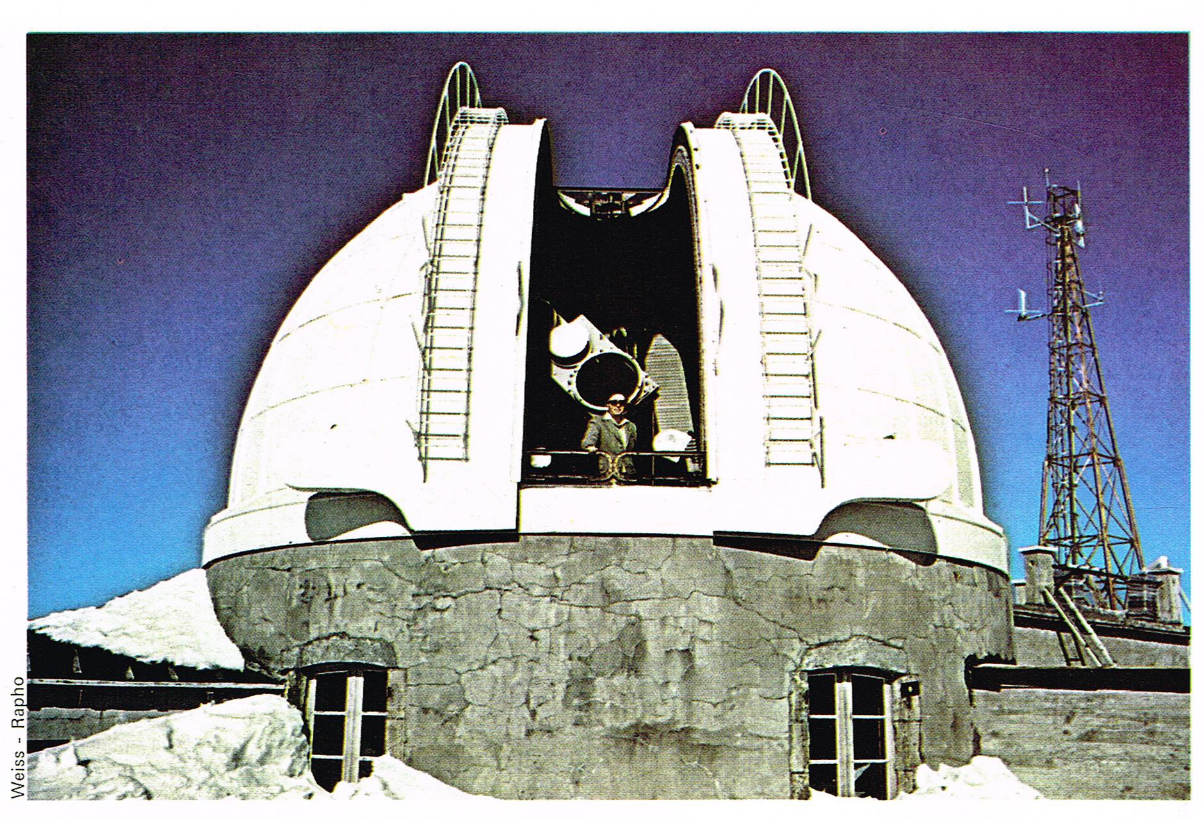
Le tableau suivant énumère les principaux instruments mondiaux.

	Diamètre	Focale	Mise en service
Yerkes	1,02 m	19,3 m	1897
Lick	0,91 m	17,6 m	1888
Meudon	0,83 m	16,2 m	1896

Télescopes

Il paraît difficile de dépasser la taille de la lunette de Yerkes (Wisconsin). En effet, la lentille ne peut être soutenue que par sa périphérie, et son poids élevé entraîne des déformations impossibles à prévenir. On doit alors se tourner vers les objectifs à miroirs, qui, eux, peuvent reposer complètement sur une face. Taillés dans un bloc de verre et métallisés sur la surface, ils présentent d'importants avantages par rapport aux lentilles : une seule face à polir, qualité interne du verre indifférente. D'autre part, on n'est pas gêné par le spectre secondaire. Par contre, l'aberration de sphéricité ne peut pas être corrigée : c'est donc un miroir parabolique qu'il faut employer. En fait, on polit d'abord une surface sphérique, la seule que l'on sache réaliser correctement, et on retouche ensuite de quelques microns pour obtenir un parabolique.

▶ *L'observatoire du pic du Midi : une coupole métallique protège la lunette astronomique du vent, de l'humidité et des lumières parasites.*



Weiss - Rapho

▼ *Figure 101 : différents systèmes de télescope.*

fig. 101

Newton

Cassegrain

Gregory

Richard Colin

Différents systèmes sont employés, pour que l'oculaire intercepte au minimum la lumière destinée à l'objectif : Newton, Cassegrain, Gregory (*fig.* 101). Tout ce qui a été dit au sujet des lunettes concernant le pouvoir séparateur, la luminosité et l'organisation des observatoires, peut être appliqué sans changement aux télescopes. Les dimensions atteintes sont simplement nettement plus grandes. Le miroir le plus grand se trouve en U. R. S. S. et mesure 6 m de diamètre. Celui du mont Palomar (Californie) mesure 5 m et pèse 14 t.

Un inconvénient du miroir parabolique est la très importante aberration de coma. Lorsqu'on s'éloigne de l'axe de quelques degrés, l'image est inutilisable; le champ est donc très réduit. En 1930, Schmidt a proposé une solution originale : il utilise un miroir sphérique, avec une lame de verre additionnelle, non plane (*fig.* 102). Celle-ci corrige l'aberration de sphéricité, tout en permettant un champ de 20 à 30°. Il subsiste un défaut : la courbure de champ. On est donc obligé d'utiliser des plaques photographiques courbées. Un télescope fonctionne sur ce principe au mont Palomar. D'autres opticiens ont trouvé des solutions prometteuses, utilisant plusieurs miroirs ou lames correctrices (Maktusov, Linfoot, Slevogt, Baker).

Le tableau suivant indique les principaux instruments mondiaux.

	Diamètre	Focale	Mise en service
Caucase	6 m	—	en cours
Mont Palomar	5 m	16,5 m	1948
Lick	3,05 m	15,25 m	1955
Mont Wilson	2,50 m	12,60 m	1917
Mac Donald	3,05 m	15,20 m	1959
Victoria	1,83 m	9,1 m	1919
Saint-Michel-de-Provence	1,93 m	9,6 m	1958
Palomar (Schmidt)	1,80 m	3 m	1948

fig. 102

Richard Colin

▶ *Figure 102 ;* **principe du télescope de Schmidt :** *la lame correctrice, difficile à fabriquer, limite la dimension de l'appareil.*

Réalisation et contrôle des surfaces optiques

Les performances des instruments optiques, atteignant les limites permises par la diffraction, ne sont possibles que parce que les lentilles et les miroirs qui les composent sont d'excellente qualité. La condition est facile à énoncer : il faut que la distance entre la surface théorique

recherchée et la surface réalisée reste toujours inférieure à la longueur d'onde de la lumière. Les défauts d'une surface « qualité optique » doivent donc être de l'ordre du dixième de micron. On doit éviter également toute inhomogénéité dans l'épaisseur des surfaces transparentes. Les catalogues des verriers présentent actuellement plusieurs variétés de verres, ainsi que d'autres matières : fluorine, silice et même plastiques, pour les verres de lunettes.

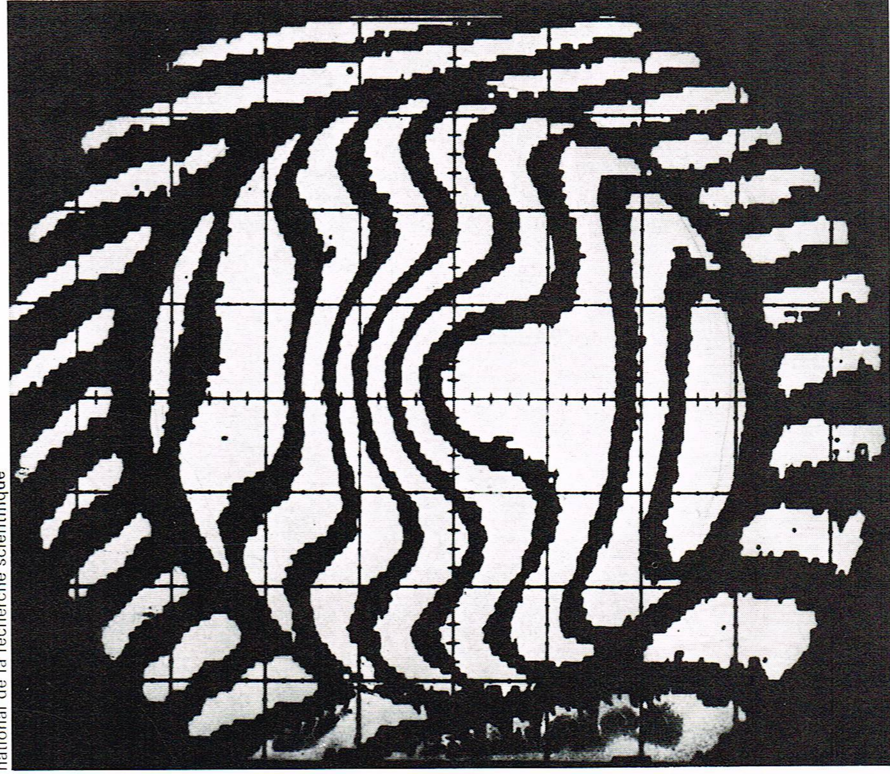
Le poli est obtenu en interposant des abrasifs de plus en plus fins (rouge d'Angleterre). Les astronomes amateurs fabriquent ainsi leur miroir de télescope, en une centaine d'heures. La métallisation d'un miroir, pour le rendre réfléchissant, peut se faire soit par argenture chimique, soit par dépôt d'aluminium sous vide. Enfin, lorsqu'on veut limiter la réflexion parasite, en particulier dans les instruments terrestres, on dépose sur les lentilles une couche antireflet. Celle-ci est épaisse d'une fraction de micron, et élimine par interférence les réflexions multiples.

Lorsqu'on fabrique une pièce de grande dimension, comme un objectif de lunette ou de télescope, il est nécessaire de contrôler la qualité optique en cours d'exécution, pour apporter les retouches indispensables. La méthode la plus simple est celle de Foucault; la *figure* 103 en représente l'application pour un miroir concave. Une fente très fine est placée devant une source lumineuse, à proximité du centre de courbure. Il se forme une image réelle, elle aussi proche du centre. Si l'on place l'œil derrière cette image, il voit le miroir éclairé sur toute sa surface. Approchons lentement vers le haut une lame de couteau pour intercepter les rayons, au point où ils convergent : pour un miroir sphérique parfait, l'éclairement disparaît instantanément. Par contre, si certaines régions ont localement un rayon de courbure décalé, elles forment une image décalée. Certains rayons sont interceptés avant l'arrivée du couteau, d'autres après. Les plages défectueuses apparaissent donc plus ou moins lumineuses que l'ensemble, et peuvent être détectées.

Les défauts très petits sont gênants par la lumière qu'ils diffractent; mais cette propriété peut servir à les mettre en évidence. On emploie un dispositif analogue au contraste de phase utilisé en microscopie. Il a été mis au point par l'astronome Lyot pour contrôler ses objectifs de coronographe.

Autres instruments astronomiques

En astronomie, les objets observés sont très peu lumineux, et l'augmentation du flux reçu est la raison principale de la course aux grandes dimensions. On ne peut pas d'autre part augmenter énormément les temps de pose photographiques au-delà de quelques heures. Aussi la mise au point par Lallemand après 1950 d'une caméra électronique a-t-elle permis d'augmenter notablement les possibilités. Il s'agit d'un système utilisant la focalisation des électrons par des lentilles électroniques, comme dans le microscope électronique. Dans le plan focal du télescope est placée une couche sensible à la lumière qui émet des électrons lorsqu'elle est touchée par des photons. Une plaque photographique, placée après les lentilles, est impressionnée par les électrons, qui, après leur focalisation, reproduisent une image identique. L'ensemble est placé dans un vide poussé, et refroidi pour éviter les vapeurs parasites. Il n'y a aucune perte en pouvoir séparateur et un gain de temps de pose égal à 20 en moyenne.



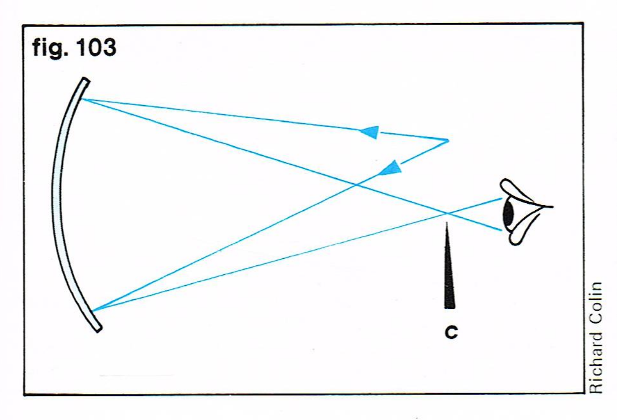
Institut d'optique du Centre national de la recherche scientifique

▲ *Interférogramme d'une lentille asphérique non traitée de 80 mm de focale ouverte à f/1. Le contrôle a été effectué sur l'axe pour le meilleur plan de mise au point. Le système de franges à la périphérie correspond à la monture métallique de la lentille qui se comporte comme un miroir dans cette région spectrale.*

La *spectroscopie* est une technique très employée en astronomie, car elle donne les seuls renseignements que l'on puisse obtenir sur la composition des objets célestes. Le montage le plus simple consiste à placer l'élément dispersif, prisme ou réseau, sur le trajet des rayons lumineux atteignant la plaque photographique. L'image circulaire de chaque étoile est remplacée par son spectre, sous forme d'une bande allongée. Si l'on désire une meilleure résolution, on procède comme pour les spectrographes terrestres : on interpose au niveau de l'image réelle une fente d'autant plus fine que la précision demandée est plus grande. Cela a l'inconvénient d'une perte de luminosité importante. Dans les observatoires modernes, une salle fixe est en général réservée au spectrographe. Les rayons lumineux y sont amenés par un système de miroirs plans, quelle que soit la direction du télescope. Le progrès le plus important depuis 1960 est l'utilisation de la spectroscopie par transformation de Fourier. C'est évidemment la méthode de choix, puisque les sources astronomiques sont très peu intenses. P. Connes a pu ainsi étudier les spectres des atmosphères de Vénus, Mars, Jupiter et Saturne.

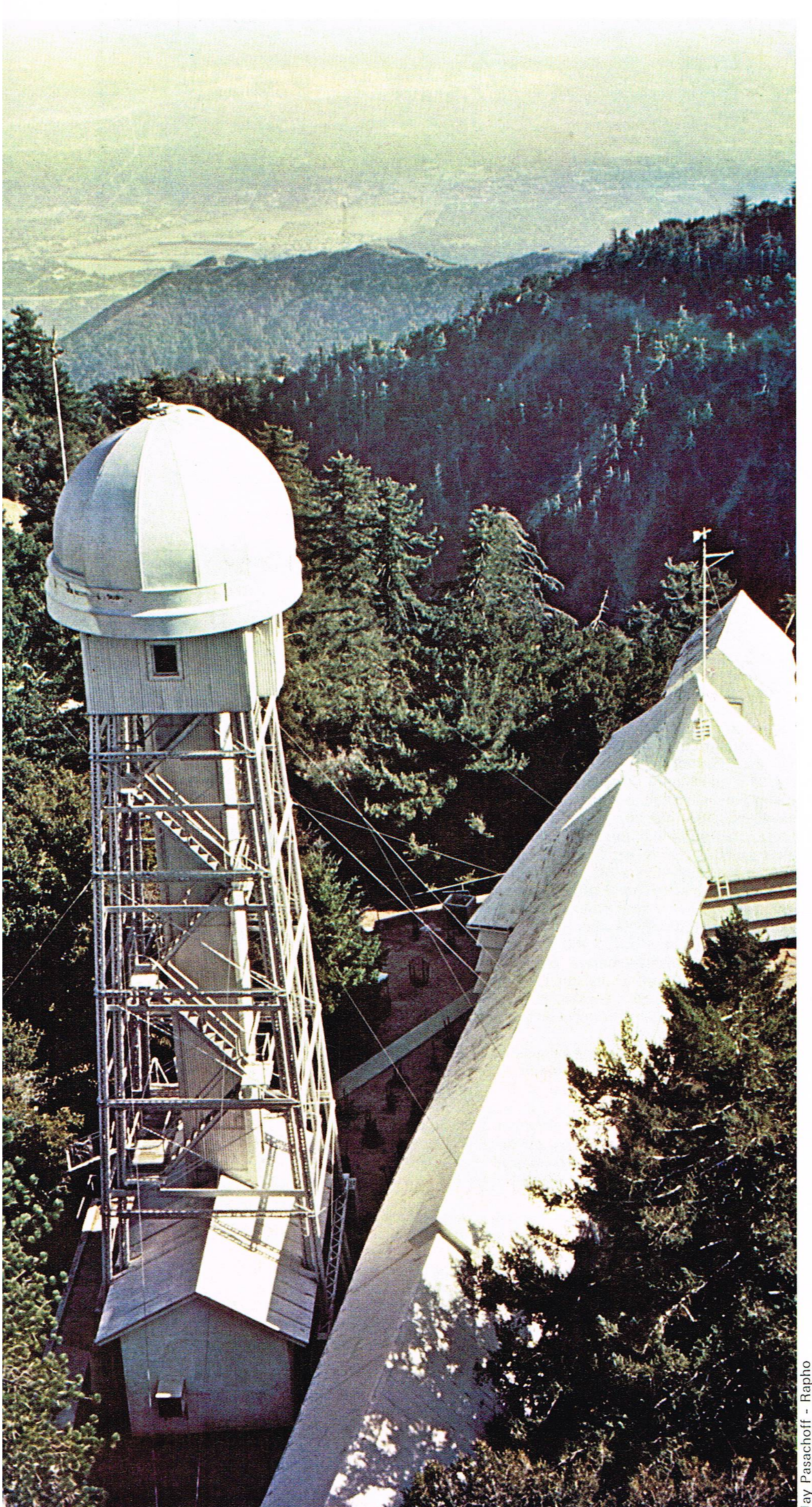
Les instruments destinés à l'étude du Soleil forment un groupe un peu à part, bien que leur principe n'ait rien de spécifique. La source étant très lumineuse, il n'y a aucun inconvénient à utiliser plusieurs miroirs plans mobiles pour renvoyer les rayons dans une direction fixe; la construction du télescope est simplifiée, puisqu'il n'est pas orientable (cœlostat). Un exemple est la tour solaire de Meudon (1970), dont l'objectif a un diamètre de 60 cm et une distance focale de 45 m.

Le disque solaire n'est pas le seul objet digne d'intérêt. Il existe autour de lui une enveloppe gazeuse très ténue : la couronne. Sa brillance est un million de fois plus faible que celle du disque, et encore mille fois plus faible que celle de la lumière diffusée par l'atmosphère. Aussi n'était-elle observable que pendant les éclipses totales de Soleil, avant l'invention du *coronographe* de Lyot (1930). En effet, pendant ces instants privilégiés, la Lune forme, en dehors de l'atmosphère terrestre, un obstacle à la lumière du disque. Le coronographe est une lunette astronomique particulièrement soignée. Il est toujours situé en altitude pour diminuer la diffusion par l'air. L'objectif est construit de façon à éliminer tout défaut, source de diffraction, produisant une lumière parasite. Enfin, des écrans réfléchissants sont disposés pour intercepter l'image du disque solaire et l'image de la diffraction de Fraunhofer produite par la périphérie de l'objectif.



Richard Colin

◀ *Figure 103; méthode de Foucault appliquée au contrôle d'un miroir sphérique : c, lame de couteau.*


Jay Pasachoff - Rapho

On doit également à Lyot un *filtre monochromatique* qui, réglé sur une raie d'émission de la couronne, permet de rendre celle-ci visible, malgré la brillance du disque. Il utilise la propriété des lames biréfringentes placées entre deux polariseurs croisés, et dont les axes sont à 45° : seules certaines radiations, dont les longueurs d'onde sont régulièrement espacées, sont transmises. Une série de lames, dont l'épaisseur est chaque fois moitié de la précédente, est disposée entre polariseurs (*fig.* 104). Au total, une seule raie est transmise.

Radio-astronomie

La lumière visible n'est pas la seule radiation électromagnétique qui nous parvienne du ciel sans être absorbée par l'atmosphère terrestre. Il existe une autre « fenêtre » : celle des longueurs d'onde de l'ordre de 1 cm à 10 m. Le phénomène a été découvert sur certaines ondes de T. S. F. par l'ingénieur Jansky en 1931 : il y existe un bruit de fond, dû à la Voie lactée.

Le développement de la technologie des radars a ensuite permis la construction de radiotélescopes. Le principe est exactement le même que celui des télescopes optiques, mais il faut l'adapter à des longueurs d'onde beaucoup plus grandes. Pour obtenir une image, il faut atteindre des dimensions énormes. Par contre, la tolérance sur les défauts de la surface est augmentée d'autant. En pratique, les miroirs sont composés d'un tissu métallique, à mailles très larges, tendu sur une armature. Le radiotélescope parabolique orientable de Jodrell Bank en Angleterre a un diamètre de 75 m. Celui de Nançay en France possède un miroir sphérique fixe de dimension 300×35 m^2 et un miroir plan mobile de 200×40 m^2. En comparant ces dimensions avec la longueur d'onde, on voit que le pouvoir séparateur, limité par la diffraction, est très mauvais par rapport aux instruments optiques. Comme il est impossible d'augmenter la taille, on combine l'information provenant de plusieurs appareils éloignés. Ainsi, un grand nombre de petites antennes identiques alignées sur plusieurs kilomètres, et dont on additionne les signaux avec le déphasage correct, réalise une sorte de grand miroir très étroit et allongé : le pouvoir séparateur est augmenté, mais dans une seule direction. Allant plus loin encore et abandonnant complètement la notion d'image, on peut obtenir des renseignements sur une source céleste par une méthode interférométrique. Des signaux sont alors enregistrés simultanément par des récepteurs situés à plusieurs milliers de kilomètres de distance, et comparés. Une autre solution consiste à faire une mesure assez longue, et à tenir compte du déplacement dû à la rotation de la Terre dans le calcul. En l'absence d'image, il est nécessaire, pour interpréter les résultats, de faire des hypothèses sur la symétrie géométrique de la source.

Observatoires non terrestres

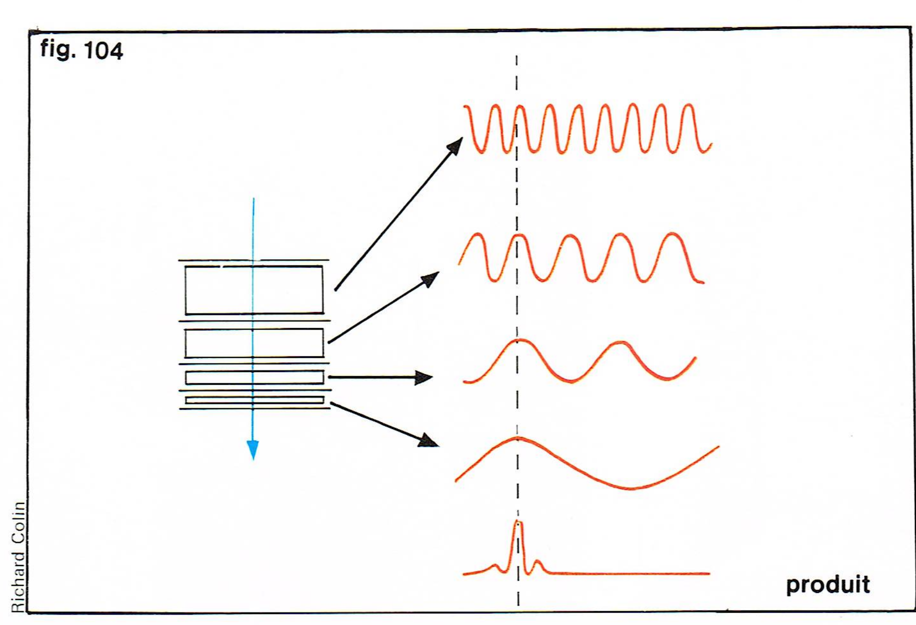
Les astronomes ont toujours souhaité supprimer l'atmosphère terrestre qui, sur l'ensemble du spectre des radiations électromagnétiques, ne laisse ouvertes que les deux fenêtres de la lumière visible et des ondes radio. C'est maintenant possible grâce aux ballons, aux fusées et aux satellites artificiels. Une des régions intéressantes est celle de l'ultraviolet, car la spectroscopie y donne de nombreux renseignements. Après un premier échec, les satellites américains *OAO2* et *OAO3* ont parfaitement fonctionné. Le plus perfectionné, *OAO3* (1973), contient un télescope de 82 cm de diamètre et de 3 m de long. Pour diriger l'instrument, certaines étoiles particulièrement brillantes sont repérées, et l'ensemble du satellite est alors pointé, par télécommande à partir du sol, à un dixième de seconde d'arc près.

Une nouvelle branche de l'astronomie est l'étude des sources de rayons X. Ce rayonnement a tendance à pénétrer à l'intérieur de la matière, quelle qu'elle soit. On a réussi cependant à construire des miroirs satisfaisant aux lois de l'optique géométrique, pourvu que l'incidence soit rasante. Les premiers résultats ont été obtenus avec des fusées faisant leurs observations au-dessus de l'atmosphère, pendant un temps très court. Une quarantaine de sources ont été ainsi découvertes.

En 1970, une fusée américaine lançait un satellite italien, *Uhuru*. Il était conçu pour détecter les longueurs d'onde entre 0,5 et 5 Å. Il a permis une moisson de découvertes nouvelles, probablement des étoiles à neutrons et des « trous noirs ».

BIBLIOGRAPHIE

BERKELEY PHYSICS COURSE III, Mac Graw Hill, 1965. - BERNARD M. Y., *Masers et Lasers,* P. U. F., 1964. - BORN M. et WOLF E., *Principles of Optics,* Pergamon Press, 1959. - BOUASSE, *Optique géométrique supérieure,* Delagrave, 1917. - BOUTRY G. A., *Optique instrumentale,* Masson, 1946. - BROTHERTON M., *Fonctionnement et utilisation des masers et lasers,* Dunod, 1970. - BRUHAT G. et KASTLER A., *Optique,* Masson, 1953. - BRUHAT G. et MARÉCHAL A., *Optique géométrique,* Masson, 1956. - CAUCHOIS Y., *Atomes, Spectres, Matière,* Albin Michel, 1952. - COUDERC A. et DANJON A., *Lunettes et Télescopes,* éd. *Revue d'optique,* 1935. - FEYNMANN R. P., *Lectures on Physics I,* Addison-Wesley, 1963. - FLEURY G. et MATHIEU J.-P., *Images optiques, Interférences,* Eyrolles, 1956. - FRANCON M., *Diffraction, cohérence en optique,* Gauthier-Villars, 1964 ; *le Contraste de phase,* éd. *Revue d'optique,* 1950 ; *Progress in Microscopy,* Pergamon Press, 1961 ; *Holographie,* Masson, 1969. - FRANCON M. et MARÉCHAL A., *Diffraction,* éd. *Revue d'optique,* 1951. - GLAFKIDES P., *Chimie et physique photographiques,* Paul Montel, 1966. - GOODMAN J. W., *Introduction à l'optique de Fourier et à l'holographie,* Masson, 1972. - HANDBUCH DER PHYSIK, volume XXIV, Springer, 1956. - JOUGUET M., *Ondes et Corpuscules,* Eyrolles, 1963. - MARÉCHAL A., *Imagerie géométrique,* éd. *Revue d'optique,* 1951. - MARÉCHAL A. et TERRIEN J., *Optique théorique,* P. U. F., 1971. - TERRIEN J., *la Microscopie,* P. U. F., 1968 ; *Optique astronomique,* P. U. F., 1972. - WRIGHT W. D., *la Vision des couleurs,* in *Atomes* n° 267, 1969.



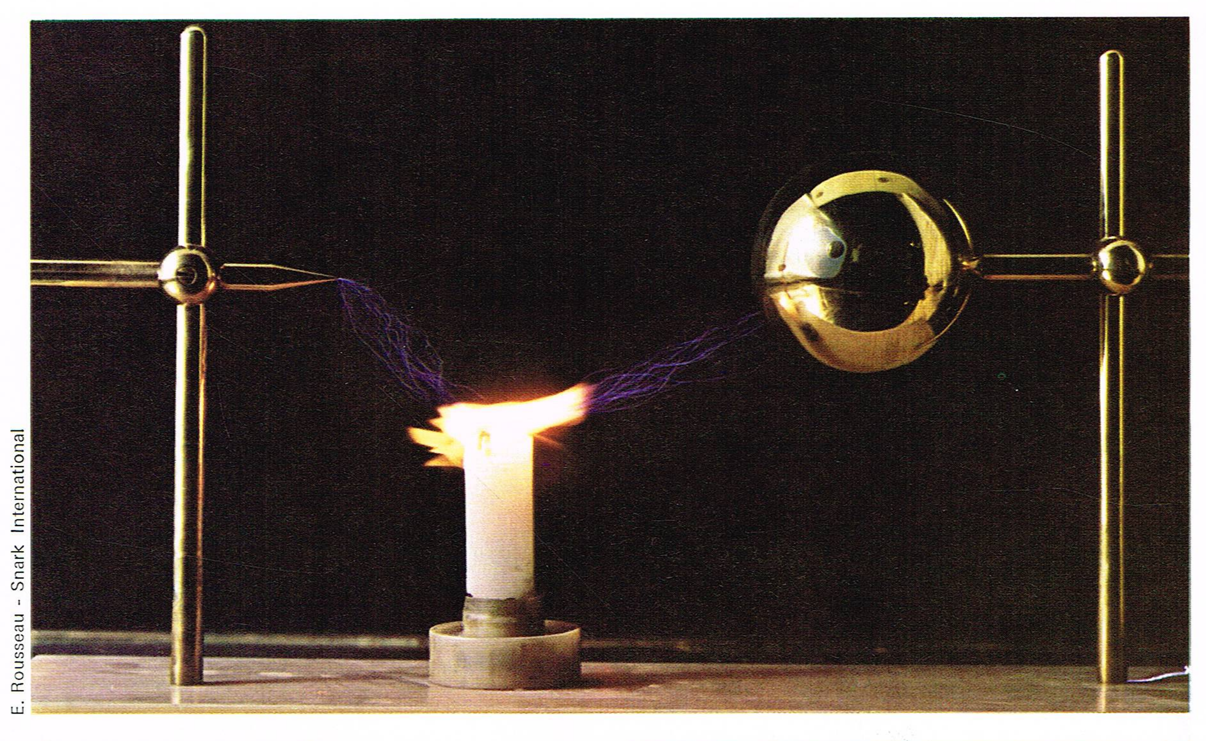
▲ *Figure 104 : filtre de Lyot et spectre des radiations transmises par les différentes lames.*

◀ *Page ci-contre, l'observatoire astronomique de Big Bear (États-Unis).*

▼ *Une des nombreuses installations de l'observatoire de radio-astronomie de Nançay (Sologne).*

De Sazo - Rapho

▶ *Ionisation dans les flammes; ici, décharge d'un électroscope à travers la flamme d'une bougie.*



E. Rousseau - Snark International

ÉLECTRICITÉ

Nous aborderons dans ce chapitre l'étude de ce que l'on désigne sous le nom d' « électricité ». L'électrostatique, la magnétostatique, les courants continus et les courants alternatifs, ainsi que l'électromagnétisme avec les équations de Maxwell, constitueront le canevas de l'étude qui sera faite. Signalons également que les milieux diélectriques et magnétiques occuperont aussi la place qui leur est due.

fig. 1
objet électrisé
boule de métal
tige de métal
feuilles d'or

Richard Colin

▶ *Figure 1 : principe de l'électroscope à feuilles d'or.*

La charge électrique et le champ électrostatique

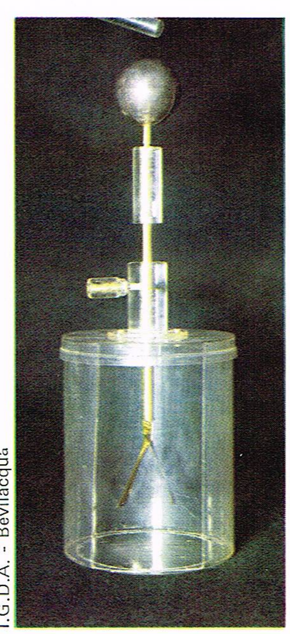
L'électrisation

Nous allons introduire la notion de *charge électrique* en montrant ce qu'est le *phénomène d'électrisation.* Pour cela, il faut distinguer deux catégories de corps : les isolants et les conducteurs. Certains corps frottés par exemple avec des tissus attirent des poussières; ces corps frottés sont dits « électrisés par frottement ». Ils acquièrent et conservent l' « électrisation »; ce sont les *isolants.* Les autres corps acquièrent ou n'acquièrent pas, mais ils ne conservent de toute manière pas l' « électrisation »; ce sont les *conducteurs.*

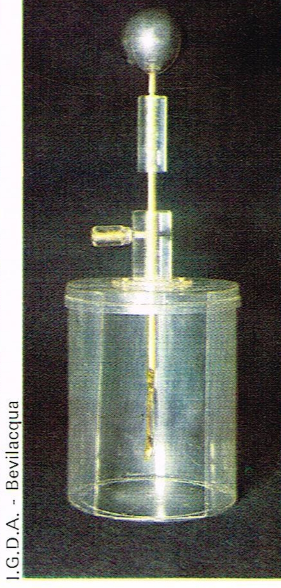
Il existe d'autres procédés d'électrisation. Un corps peut en effet devenir électrisé par contact avec un autre corps électrisé. Il devient alors capable d'attirer des poussières. L'électroscope permet de constater cette électrisation. Il en existe deux types : à feuilles et à aiguilles.

— L'*électroscope à feuilles* (*fig.* 1) est constitué d'une boule de métal et d'une tige également en métal, terminée par deux feuilles d'or très fines (de l'ordre de quelques microns). L'approche d'un corps électrisé fait écarter les feuilles d'or.

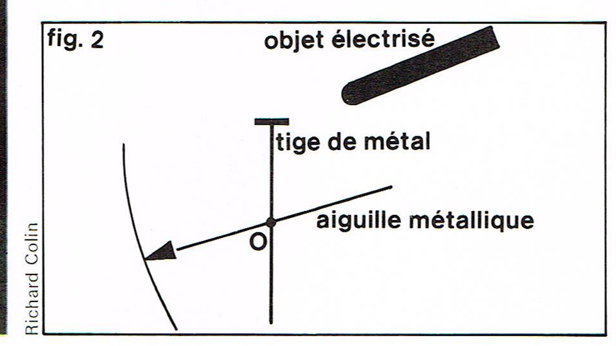
— L'*électroscope à aiguille* (*fig.* 2) comporte, quant à lui, une tige de métal et une aiguille métallique qui peut pivoter autour d'un axe O en faisant un certain angle avec la tige. Là encore, l'approche d'un objet électrisé fait s'écarter l'aiguille métallique de la tige.



I.G.D.A. - Bevilacqua

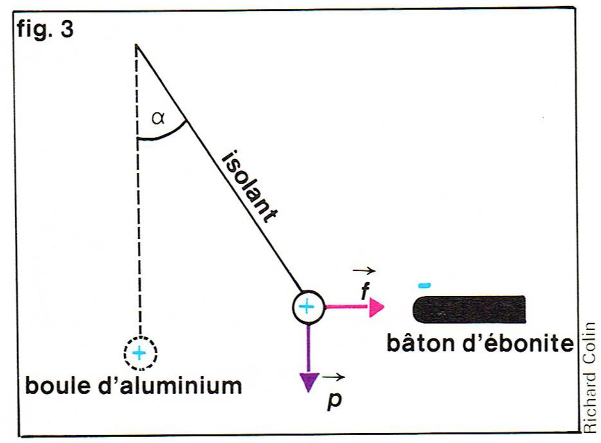


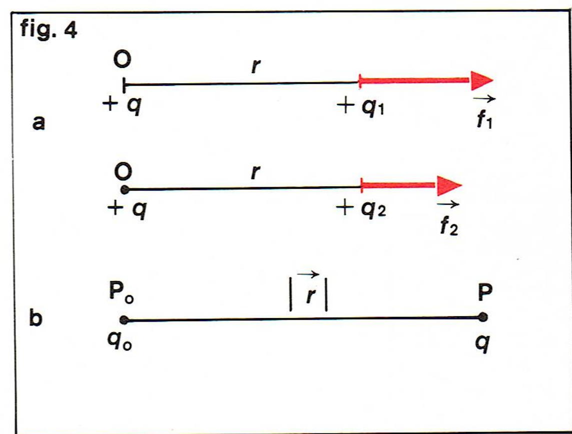
I.G.D.A. - Bevilacqua



Richard Colin

▶ *A gauche, phénomène de l'électrisation sur un électroscope à feuilles utilisé en laboratoire. A droite, figure 2 : principe de l'électroscope à aiguille.*





◀ *A gauche, figure 3 : la boule électrisée positivement est attirée par le bâton d'ébonite électrisé négativement.*

A droite, figure 4 : , le rapport de la force sur la charge correspondante est constant : $\frac{\vec{f_1}}{q_1} = \frac{\vec{f_2}}{q_2}$*; b, force qui s'exerce entre 2 charges q et q_0 situées dans le vide à une distance $|\vec{r}|$ l'une de l'autre :* $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^3}\vec{r}$.

Les charges électriques

La notion de charge électrique va à présent apparaître clairement si l'on considère l'expérience suivante (*fig.* 3) : soit une tige d'isolant terminée par une petite boule d'aluminium. Supposons que la boule soit électrisée positivement. L'approche d'un bâton d'ébonite électrisé négativement produit une attraction de la boule par ce bâton d'ébonite. La tige fait un angle α par rapport à sa position initiale. Si $\vec{p}$ est le poids de la boule, alors, la force d'attraction est donnée par $\vec{f} = \vec{p}$ tg α.

Si l'on diminue la distance entre le bâton d'ébonite et la boule, on constate que l'angle α croît, donc $\vec{f}$ croît; $\vec{f}$ est une fonction décroissante de la distance.

Ainsi, la notion de charge ponctuelle est liée à la distance. Qualitativement, la charge apparaît comme un corpuscule électrisé dont les dimensions linéaires sont négligeables vis-à-vis des distances considérées.

Une autre expérience va nous permettre d'avoir une approche quantitative de la notion de charge. Ainsi, si, dans l'expérience précédente, on garde la même distance entre la boule et le bâton, mais que l'on frotte plus le bâton d'ébonite, on constate que la force $\vec{f}$ est plus grande, car α est plus grand. La notion de *quantité de charge* sur le bâton d'ébonite est liée à cette force. Supposons alors qu'en un point O on place une charge $+q$ ponctuelle (*fig.* 4a). Plaçons à une distance de O une charge ponctuelle $+q_1$; elle est repoussée avec une force $\vec{f_1}$. Recommençons l'expérience en remplaçant la charge $+q_1$ par une autre charge ponctuelle $+q_2$. On constate que, si $q_1 > q_2$, alors $\vec{f_1} > \vec{f_2}$, et en plus que $\frac{\vec{f_1}}{q_1} = \frac{\vec{f_2}}{q_2}$. De plus si $q_1 = nq_2$, alors $\vec{f_1} = n\vec{f_2}$, et à $q_1 + q_2$ correspond la force $\vec{f_1} + \vec{f_2}$. Donc la charge électrique est une grandeur mesurable.

La loi de Coulomb va permettre d'exprimer quantitativement la valeur de la force $\vec{f}$ qui s'exerce entre deux charges situées à une distance $|\vec{r}|$ l'une de l'autre (*fig.* 4b).

Soit deux charges q_0 et q situées à une distance $|\vec{r}|$ l'une de l'autre. Coulomb eut l'idée d'introduire une analogie de forme d'interaction entre les particules q_0 et q et l'interaction de gravitation entre deux masses matérielles $\left(\text{il s'agit d'une forme d'interaction coulombienne en } \frac{1}{r^2}\right)$.

Étant donné que l'on constate qu'il s'exerce entre q_0 et q une force $\vec{f}$, on peut alors écrire d'après cette analogie :

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^3}\vec{r}$$

ε_0 étant la *permittivité diélectrique du vide.*

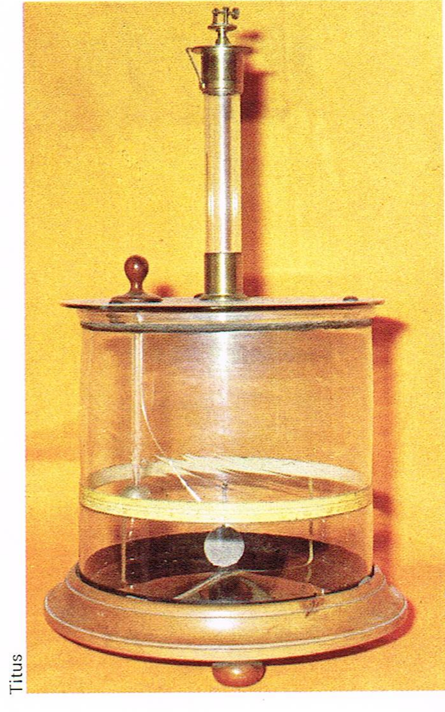
Cette loi est la **loi de Coulomb**, qui s'énonce ainsi : *deux charges électriques q et q_0, placées dans le vide à la distance $|\vec{r}|$ l'une de l'autre, exercent une force représentée par le vecteur :*

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}\vec{u} \quad (\vec{u} \text{ tel que } \vec{r} = r\vec{u})$$

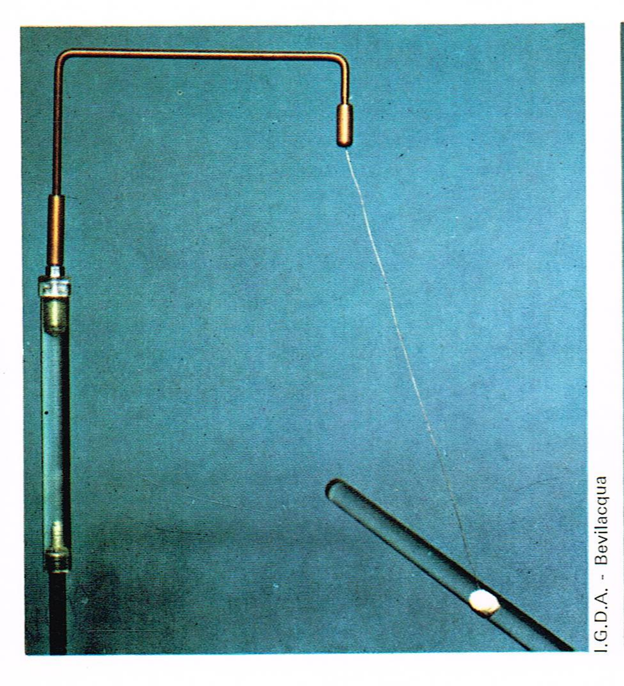
répulsive ou attractive selon que les charges sont de même signe ou non.

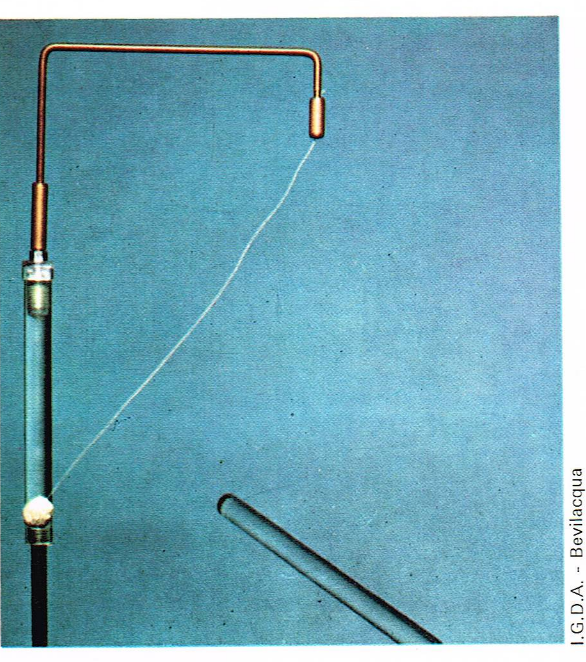
Dans le système M. K. S. A. :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \quad \text{et} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$$


Titus

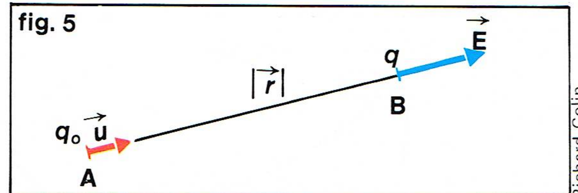
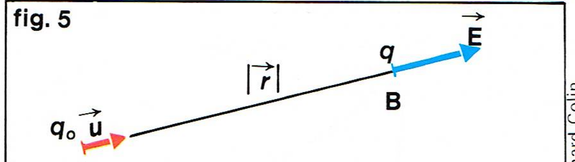
▲ *La balance de Coulomb.*


I.G.D.A. - Bevilacqua


I.G.D.A. - Bevilacqua

◀ *Pendule électrique : quand la petite boule parvient à toucher la baguette électrisée (photo de gauche), l'attraction se change en répulsion (photo de droite).*

▶ *Figure 5 : à tout point B de l'espace situé à une distance $|\vec{r}|$ de A correspond le vecteur champ électrique $\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_0}{r^2}\,\vec{u}$.*

Le champ électrostatique

Nous allons définir ce qu'est le champ électrostatique créé par une charge unique, puis celui créé par un ensemble de charges.

Considérons donc, en premier lieu, une charge q_0 placée en un point A (*fig.* 5). En un point B, situé à une distance $|\vec{r}|$ de A, où l'on a mis une charge q, cette charge q_0 crée la force $\vec{f} = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_0 q}{r^2}\,\vec{u}$.

A tout point B de l'espace, différent de A, on fait correspondre un vecteur $\vec{E}$, appelé « vecteur champ électrique », défini par $\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_0}{r^2}\,\vec{u}$.

Si q_0 est positif, par définition $\vec{E}$ est alors dirigé selon $\vec{u}$. Si en B on met une charge q, cette charge est soumise alors à la force $\vec{f} = q\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_0 q}{r^2}\,\vec{u}$.

Au point de vue des dimensions, $\vec{E}$ a les dimensions du rapport d'une force par une charge, soit, en M. K. S. A. : newton/coulomb, ou encore volt/mètre.

Un ensemble de charges peut aussi créer un champ électrostatique en un point. Soit donc dans le vide q_i particules, i variant de 1 à n, situées respectivement à des distances $|\vec{r_i}|$ d'une particule q située en un point P. Chaque particule q_i exerce sur la charge q la force :

$$\vec{f_i} = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{q q_i}{r_i^2}\,\vec{u_i}$$

donc la particule q est soumise à la force totale :

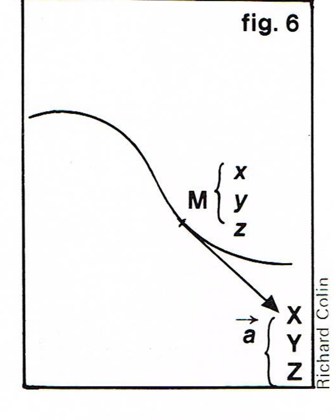
$$\vec{f} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{f_i} = \frac{q}{4\,\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{r_i^2}\,\vec{u_i}$$

$$\vec{f} = q\left[\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_i}{r_i^2}\,\vec{u_i}\right] = q\vec{E}_P$$

$\vec{E}_P$ désignant le champ total créé au point P par l'ensemble des charges q_i :

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{r_i^2}\,\vec{u_i}$$

Ce champ $\vec{E}_P$ est défini pour tous les points P différents des points P_i où sont situées les charges q_i.



▲ *Figure 6 : définition d'une ligne de champ.*

Le potentiel électrostatique

Avant de définir le potentiel électrostatique, nous allons d'abord faire quelques rappels mathématiques.

Rappels mathématiques

Champ de vecteurs

Soit en un point de l'espace M (x, y, z) un vecteur $\vec{a}$ de composantes (X, Y, Z) qui sont des fonctions continues et dérivables de (x, y, z) sur un repère cartésien.

Une *ligne de champ* est une courbe telle qu'en chacun des points de cette courbe, le vecteur $\vec{a}$ soit porté par la tangente (*fig.* 6).

Un *tube de champ* est formé par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée. On définit de même la *circulation* d'un vecteur $\vec{a}$ le long d'une courbe Γ.

Soit en effet une courbe Γ quelconque et un point M en lequel le vecteur $\vec{a}$ est tangent à la courbe Γ (*fig.* 7). Si le point M se déplace sur Γ d'une quantité infinitésimale $\overrightarrow{MM'} = \vec{dl}$, on définit alors la circulation élémentaire de $\vec{a}$ par la formule $dC = \vec{a} \cdot \vec{dl}$.

Comme $\vec{a}$ a pour composantes X, Y, Z, et $\vec{dl}$ a pour composantes dx, dy, dz :

$$dC = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \vec{a} \cdot \vec{dl}$$

La circulation de $\vec{a}$ le long d'un arc fini AB de Γ est :

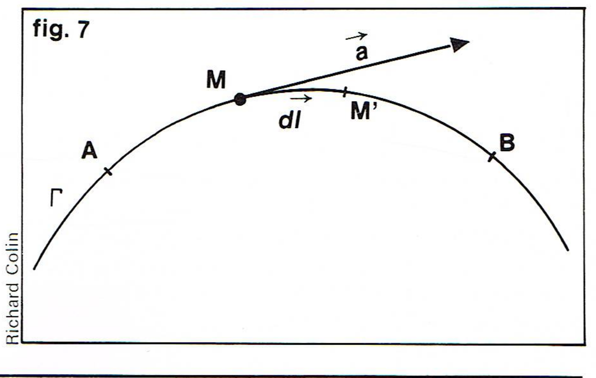
$$C_A^B = \int_A^B dC = \int_A^B \vec{a} \cdot \vec{dl}$$

et le long d'une courbe fermée :

$$C_A^A = \oint dC = \oint \vec{a} \cdot \vec{dl}$$

Notion de potentiel scalaire

Supposons que $dC = \vec{a} \cdot \vec{dl}$ soit une différentielle totale exacte. Alors la circulation de $\vec{a}$ entre les points A et B ne dépend pas de la trajectoire suivie pour aller de A vers B.



▶ *Figure 7 : si $\vec{dl}$ est un déplacement élémentaire sur le tronçon de courbe AB, la circulation élémentaire du vecteur $\vec{a}$ est $dC = \vec{a} \cdot \vec{dl}$.*

ABRÉVIATIONS UTILISÉES EN ÉLECTRICITÉ

- $\vec{B}$: champ magnétique
- C : circulation
- C : capacité
- $\vec{E}$: champ électrique $\vec{E} = \vec{E_e} + \vec{E_m}$
- $\vec{E_e}$: champ électrostatique
- $\vec{E_m}$: champ magnétique
- $\vec{E_i}$: champ électromoteur d'induction
- $\vec{E_t}$: champ total
- E : énergie fournie par un circuit à un générateur
- $\mathcal{E}$: f. é. m.
- $\mathcal{E}'$: f. c. é. m.
- e : force électromotrice d'induction
- e : distance entre les plaques d'un condensateur
- I : intensité
- j : $\sqrt{-1}$
- $\vec{J}$: vecteur intensité d'aimantation
- $\vec{J}$: vecteur densité de courant
- L : coefficient de self-induction
- M : coefficient d'induction mutuelle
- $\mathcal{M}$: moment
- m : masse magnétique
- $\vec{n}$: normale
- N : nombre de spires d'un solénoïde
- N : fréquence (courant alternatif)
- $\vec{p}$: moment électrique
- $\vec{dp}$: moment dipolaire
- $\vec{P}$: vecteur polarisation
- q : charge
- R : résistance
- T : période
- $u\,(t)$: potentiel aux bornes d'un condensateur
- V : potentiel
- V* : potentiel magnétique
- V : vitesse
- v : volume
- W : travail
- W : énergie électrostatique
- Z : impédance
- γ : conductivité
- Γ : courbe
- Γ : moment
- ε : constante diélectrique
- ε_0 : permittivité diélectrique du vide
- ε_r : permittivité relative du milieu
- Φ : flux élémentaire
- Φ_c : flux élémentaire coupé
- ρ : résistivité
- ρ : rayon de courbure
- ρ_v : densité volumique de charge
- ρ_p : distribution volumique de charges fictives
- σ : densité de charges surfaciques
- σ : densité superficielle de masse magnétique
- σ_p : densité superficielle de charges fictives
- χ_e : susceptibilité électrique du milieu
- Ω : angle solide

▶ *Tableau récapitulatif des noms et symboles correspondants, utilisés dans le texte d'Électricité.*

Elle ne dépend que de la position des points A et B. En ce cas, la circulation le long de toute ligne fermée est nulle.

On dit alors que le vecteur $\vec{a}$ dérive d'un potentiel qui est une fonction scalaire que l'on note, par exemple, V.

Ainsi $$\int_A^B \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_A^B dC = V_A - V_B$$

où $V_A - V_B$ est la diminution de potentiel. En ce cas, la relation de définition peut s'écrire :

$$dC = -dV = \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

On voit ainsi que le potentiel n'est défini qu'à une constante près.

Or : $$-dV = -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz$$
$$= X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

donc $$X = -\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$
$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Ce que l'on peut traduire en disant que $\vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$.

Donc les composantes de $\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ sont $\frac{\partial V}{\partial x}\;\frac{\partial V}{\partial y}\;\frac{\partial V}{\partial z}$

Plus généralement, la relation $dV = -\vec{a} \cdot d\vec{l}$ permet de calculer la valeur de la composante a_e de $\vec{a}$ dans une direction quelconque :

$$a_e = -\frac{\partial V}{\partial e}$$

En coordonnées polaires (r, θ, φ), les déplacements élémentaires sont dr, $r d\theta$, $r \sin\theta\, d\varphi$ (nous le montrerons ultérieurement).

Ainsi $$a_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$
$$a_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$
$$a_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

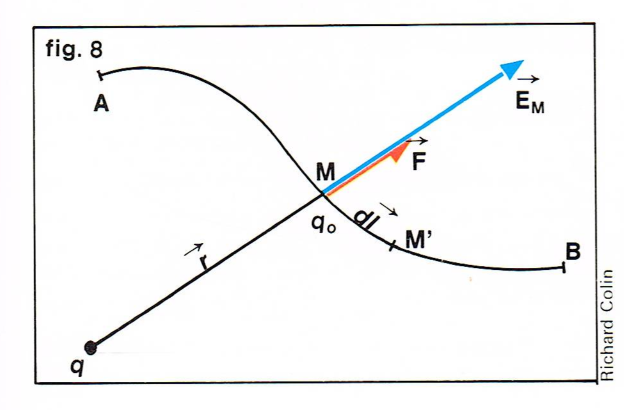
Travail des forces électrostatiques - Potentiel électrostatique

Le problème va être à présent de montrer que la circulation élémentaire du vecteur $\vec{E}$ est la différentielle totale exacte d'une fonction qui sera le *potentiel électrostatique*. Pour définir la circulation du vecteur $\vec{E}$, il faut d'abord définir le travail d'une force électrostatique.

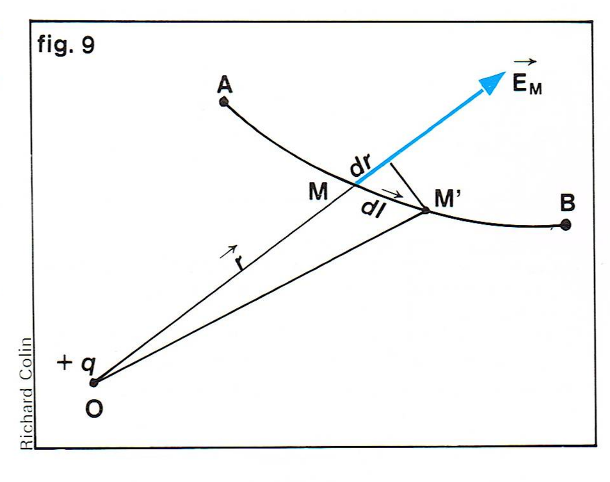
Soit donc une charge q produisant en un point M un champ $\vec{E}_M$ (*fig.* 8). Plaçons en M une charge passive q_0, c'est-à-dire telle qu'elle ne modifie pas le champ $\vec{E}$. Le problème est de calculer le travail de la force que subit q_0.

Soit un déplacement de M vers M' ; $\overrightarrow{MM'} = d\vec{l}$

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{l} = q_0\vec{E} \cdot d\vec{l}$$



◀ *Figure 8 : le travail de la force électrostatique $q_0\,\vec{E}$ le long de la courbe est $W_A^B = q_0 C_A^B$.*



◀ *Figure 9 : la circulation de $\vec{E}$ entre les points A et B ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A en B.*

$$W_A^B = q_0 \int_A^B \vec{E}_M \cdot d\vec{l} = q_0 C_A^B$$

C_A^B étant la circulation du vecteur $\vec{E}$ le long de la courbe AB.

Donc, lorsqu'une charge électrique se déplace dans un champ électrostatique, le travail de la force qu'elle subit est égal au produit de cette charge par la circulation de ce champ électrique. Il est facile de calculer la valeur de cette circulation. En effet :

$$C_A^B = \int_A^B \vec{E}_M \cdot d\vec{l}$$

Or, d'après la *figure* 9, le champ $\vec{E}_M$ produit au point M par la charge q placée en O à la distance $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ de M est :

$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

$$\vec{E}_M \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr$$

où dr est la projection de $d\vec{l}$ sur le vecteur $\overrightarrow{OM}$

donc $$\vec{E}_M \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr$$

et $$dC = \vec{E} \cdot d\vec{l} = d\left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right) = -d\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right)$$

Nous voyons que la circulation élémentaire dC est une différentielle totale exacte ; c'est la différentielle totale exacte d'une fonction V, donc $dC = -dV$.
L'intégration s'en déduit facilement.

Soit $$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} \quad \vec{r}_B = \overrightarrow{OB}$$

On a : $$C_A^B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Donc la circulation de $\vec{E}$ entre les points A et B ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A en B.

Considérons à présent la circulation d'un champ électrique $\vec{E}$ produit par n charges. En un point M, le champ total est :

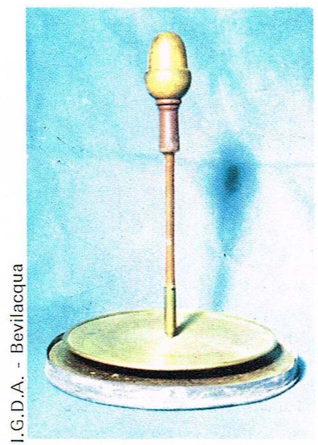
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i$$

$$dC = \sum_i dC_i = \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{l} =$$
$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i d\left(\frac{q_i}{r_i}\right) = -d\left(\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}\right)$$

$$C_A^B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\left(\frac{1}{r_{iA}} - \frac{1}{r_{iB}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_{iA}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_{iB}}$$

Si les charges sont distribuées de façon continue, il faut remplacer le signe Σ par le signe $\int$.

Comme conclusion, on peut dire que, dans un champ électrostatique, la circulation élémentaire du vecteur champ est une différentielle totale exacte d'une fonction V ; donc $dC = -dV$.



▲ *L'électrophore de Volta : la plus simple des machines à induction électrostatique (Milan, musée des Sciences et des Techniques).*



Palais de la Découverte, Paris

▲ *A gauche, étincelles de 40 cm amorcées entre la terre et le corps isolé d'un visiteur porté à 300 000 volts négatifs. A droite, figure 10 : passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques.*

Il s'ensuit donc que $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ est indépendante de la trajectoire suivie pour aller de A à B et que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Le potentiel électrostatique peut être défini par l'une des deux formes :

$$dV = d\left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}\right)$$

ou

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} + V_0$$

où V_0 est une constante.

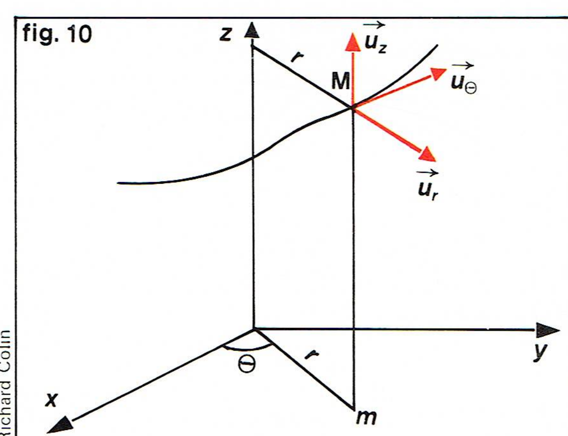
Si les charges sont réparties sur une surface S de densité de charge σ, ou dans un volume τ de densité volumique ρ_v, on remplace alors la formule donnant le potentiel par :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r} + V_0$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_\tau \frac{\rho_v d\tau}{r} + V_0$$

Comme $dC = -dV$, $C_A^B = V_A - V_B$. Donc la circulation du champ électrique entre deux points est égale à la baisse de potentiel entre ces deux points.

Nous allons à présent définir le potentiel V_0. Physiquement, ce qui est défini, c'est la différence de potentiel entre deux points A et B ou la différentielle dV. Par contre, la valeur du potentiel en un point d'un champ électrostatique dépend de la constante V_0 qui est arbitraire.



Mathématiquement, on obtient l'expression la plus simple du potentiel $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$, en choisissant $V_0 = 0$; cela revient à admettre que le potentiel est nul à l'infini, c'est-à-dire en tout point infiniment éloigné des charges créant un champ électrostatique.

Il existe une relation entre le champ et le potentiel. Puisque $\vec{E}$ dérive en effet du potentiel V, on a donc

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$$

Ainsi, dans un trièdre O, x, y, z :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Le potentiel s'exprimant en *volts*, nous allons définir le volt à partir du travail d'une force électrostatique s'exerçant sur une charge q_0. Nous avons vu que

$$W_A^B = q_0 C_A^B = q_0 (V_A - V_B)$$

Ainsi le volt est la différence de potentiel qui existe entre deux points soumis à un champ électrique, si le travail de la force qui s'exerce sur une charge de 1 coulomb est égal à 1 joule lorsque la charge se déplace d'un point à l'autre.

Expression du gradient en coordonnées cylindriques

S'il s'agit de passer des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées cylindriques (r, θ, z) ; on a les égalités suivantes (*fig.* 10) :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

Soit $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$ les vecteurs unitaires dans le système de coordonnées cylindriques. Soit $\overrightarrow{MM'} = d\vec{S}$ un déplacement élémentaire du point M. Les composantes de $d\vec{S}$ sont :

$$d\vec{S} \begin{cases} dr\vec{u}_r \\ rd\theta\vec{u}_\theta \\ dz\vec{u}_z \end{cases}$$

Soit la fonction $u = u\ (r, \theta, z)$; posons que $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\ u$. Les composantes de $\vec{A}$ sont :

$$\vec{A} \begin{cases} A_r\vec{u}_r \\ A_\theta\vec{u}_\theta \\ A_z\vec{u}_z \end{cases}$$

Or, par définition du gradient, on a l'égalité :

$$du = \overrightarrow{\text{grad}}\ u \cdot d\vec{S}$$

Soit : $$du = A_r dr + A_\theta r d\theta + A_z dz$$

D'autre part : $du = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$

Il s'ensuit que, dans le système de coordonnées cylindriques, les composantes de $\overrightarrow{\text{grad}}\ u$ sont :

$$A_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$A_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$A_z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

En coordonnées sphériques (r, θ, φ) [*fig.* 11],

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

$d\vec{S}$ est tel que :

$$d\vec{S} \begin{cases} dr\vec{u}_r \\ rd\theta\vec{u}_\theta \\ r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi \end{cases}$$

Soit $u = u\,(r, \theta, \varphi)$ et $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\,u$; les composantes de A dans ce système sont : $\vec{A} \begin{cases} A_r\vec{u}_r \\ A_\theta\vec{u}_\theta \\ A_\varphi\vec{u}_\varphi \end{cases}$

$$du = A_r dr + A_\theta r d\theta + A_\varphi r \sin\theta\, d\varphi$$

D'autre part :

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi$$

Ainsi les composantes du gradient sont :

$$A_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$A_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$A_z = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

Si l'on applique ces résultats au champ électrostatique : $\vec{E}_e = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$, nous obtenons, par exemple en coordonnées cylindriques :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Si l'on considère le plan, la coordonnée z est supprimée. Il s'ensuit que :

$$\vec{E} = \vec{E}\,(r, \theta)\,; \quad \text{donc } E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Surfaces équipotentielles

Une surface équipotentielle est une surface où le potentiel a une valeur constante V_0. Donc $V\,(x, y, z) = V_0 =$ constante. Ainsi, en faisant varier le paramètre V_0, on a toute une famille d'équipotentielles.

Ces surfaces équipotentielles ont plusieurs propriétés.

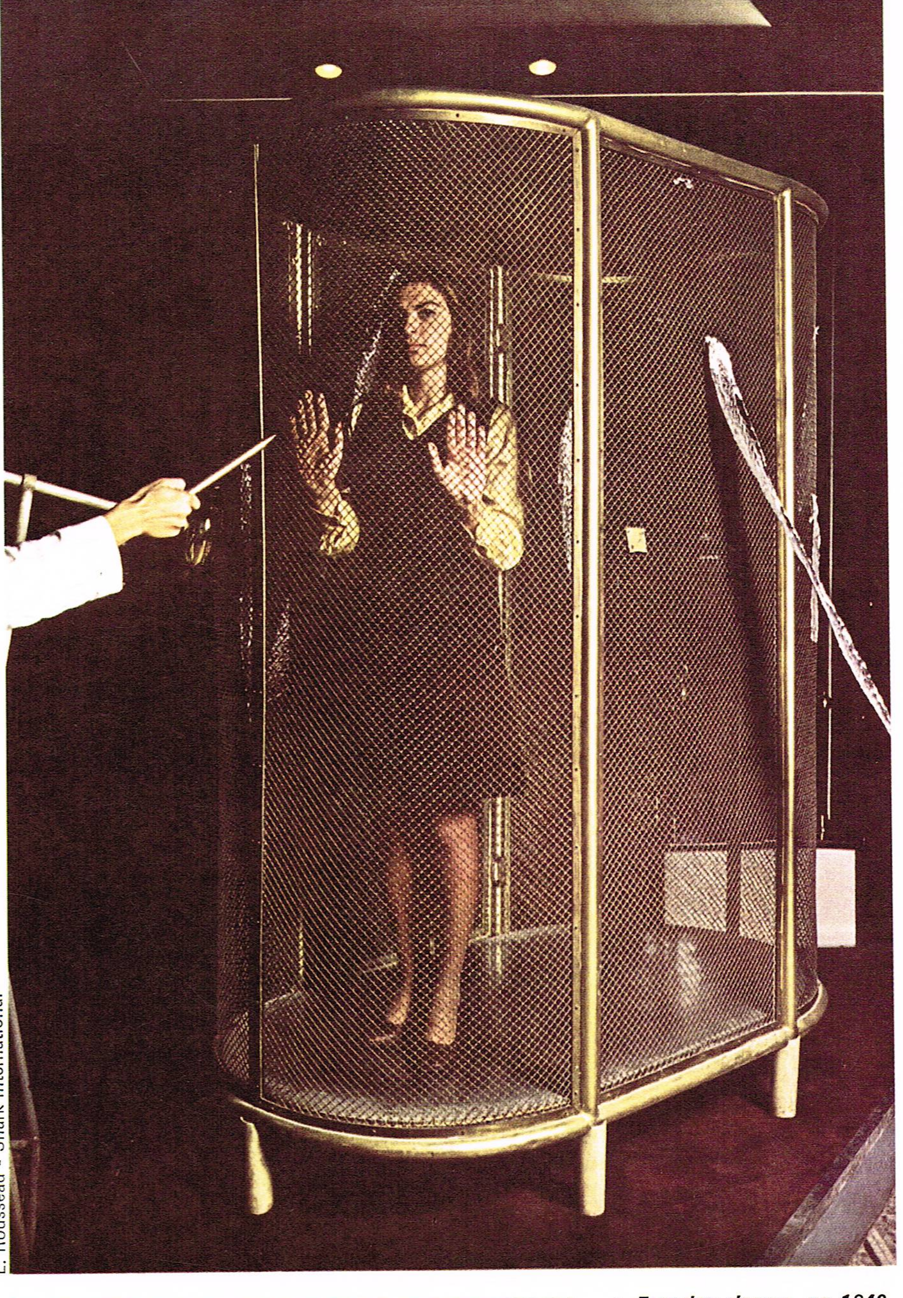
La *première propriété* est que deux surfaces équipotentielles ne se coupent pas. En effet, aux points éventuels où ces surfaces se couperaient, on aurait deux valeurs du potentiel, ce qui est absurde.

La *deuxième propriété* est que, en tout point d'une surface équipotentielle, le vecteur champ électrique lui est normal ; on le voit de la manière suivante :

soit $$dC = -dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

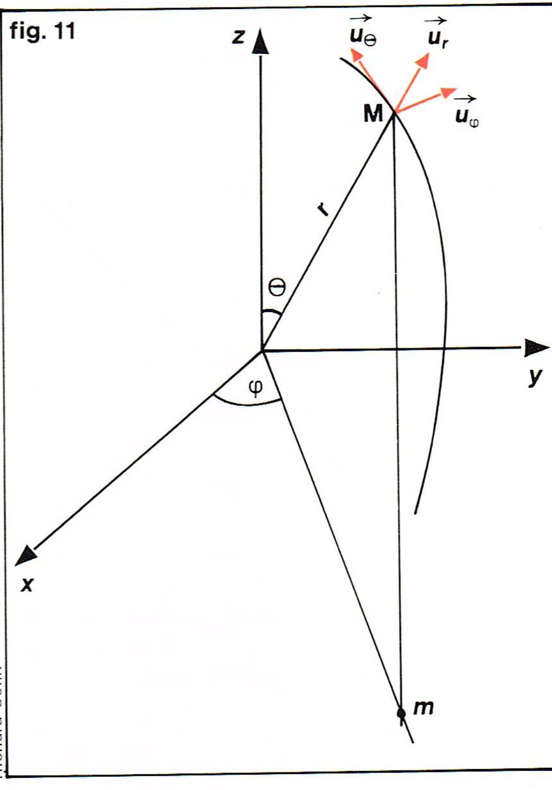
Sur une équipotentielle V = constante, ce qui entraîne $dV = 0$. Donc $\vec{E}$ et $d\vec{l}$ sont perpendiculaires. Ainsi $\vec{E}$ est normal à l'équipotentielle et est dirigé vers les potentiels décroissants, puisque $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$.

Enfin la *troisième propriété* est que les lignes de champ sont les trajectoires orthogonales des surfaces équipotentielles.



E. Rousseau - Snark International

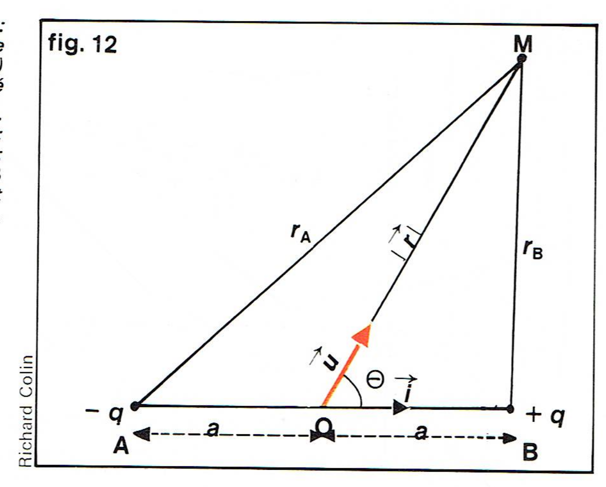
▲ *Faraday donne, en 1843, la théorie de l'électrisation par influence et montre qu'un conducteur creux* **(cage de Faraday)** *forme écran pour les actions électriques.*

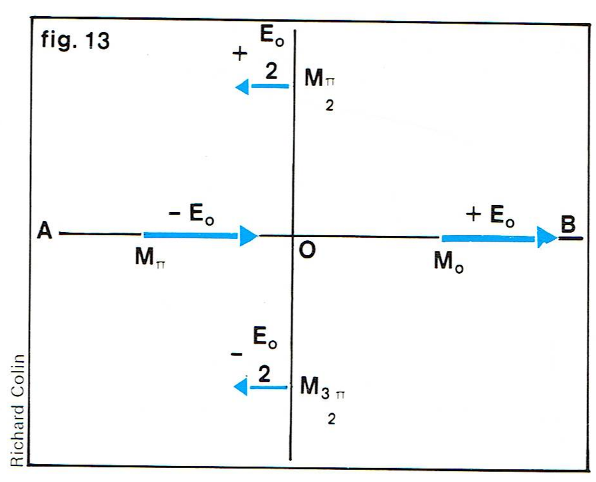


Richard Colin

◀ *Figure 11 : passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques.*

▶ *A gauche, figure 12 : potentiel créé par le dipôle électrique $(-q, +q)$ en un point M situé à la distance $|\vec{r}|$ de ce dipôle. A droite, figure 13 ; les « positions de Gauss » : M se trouve sur l'axe AB ou perpendiculairement à cet axe.*





Le dipôle électrique

On appelle dipôle électrique l'ensemble de deux charges ponctuelles opposées $+q$ et $-q$ tel que leur distance $d = 2a$ soit petite par rapport aux distances où l'on étudie l'action de ce dipôle (*fig.* 12). Soit O le milieu de AB. En A se trouve la charge $-q$ et en B la charge $+q$. Calculons d'abord le potentiel créé par ce doublet au point M dans le vide.

Soit $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$; $|\vec{r}_A| = |\overrightarrow{AM}|$ et $|\vec{r}_B| = |\overrightarrow{BM}|$

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$$

$$V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

or
$$r_B^2 = r^2 + a^2 - 2\,a\,r\cos\theta$$
$$r_A^2 = r^2 + a^2 + 2\,a\,r\cos\theta$$

or, par définition, a est très petit devant r_A, r_B et r et

$$\frac{1}{r_B} = \left(r^2 + a^2 - 2\,a\,r\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

et
$$\frac{1}{r_A} = \left(r^2 + a^2 + 2\,a\,r\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

En faisant un développement limité au premier ordre, on obtient :

$$\frac{1}{r_B} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_A} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

soit
$$\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = \frac{2\,a}{r^2}\cos\theta$$

Donc $V_M = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{2\,a}{r^2}\cos\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{2\,aq\cos\theta}{r^2}$

or on appelle *moment électrique* la quantité

$$\vec{p} = 2\,aq\vec{i} = d\cdot q\vec{i}$$

d'autre part, $\cos\theta = \vec{u}\cdot\vec{i}$

donc $V_M = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{u}}{r^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{p\cos\theta}{r^2}$ avec $|\vec{p}| = p$

Ce dipôle crée un champ électrique puisque

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$$

En coordonnées polaires, nous avons vu que $E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r}$

et $E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta}$

soit $E_r = \dfrac{2\,p}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{\cos\theta}{r^3}$ *(composante radiale)*

et $E_\theta = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{\sin\theta}{r^3}$ *(composante tangentielle)*

$\vec{E}$ a pour module : $|\vec{E}| = \sqrt{(E_r)^2 + (E_\theta)^2} =$

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

La direction de ce champ est donnée par l'angle α $\left(\text{tel que } \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{E_\theta}{E_r} = \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\right)$.

Pour une même distance r de O, il existe deux positions de M qui sont intéressantes (*fig.* 13). Ce sont les *positions de Gauss.*

En premier lieu, lorsque M se trouve sur l'axe AB, donc $\theta = 0$ ou π :

si $\theta = 0$: $E_\theta = 0$ et $E_r = E_0$ avec $E_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{2\,p}{r^3}$

si $\theta = \pi$: $E_r = -E_0$ et $E_\theta = 0$

En second lieu, lorsque M se trouve sur un plan perpendiculaire à O, donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$:

si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$: $E_r = 0$ et $E_\theta = \dfrac{E_0}{2}$

si $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$: $E_r = 0$ et $E_\theta = -\dfrac{E_0}{2}$

Surfaces équipotentielles et lignes de champ du dipôle

Nous avons vu que, pour le dipôle :

$$V_M = V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

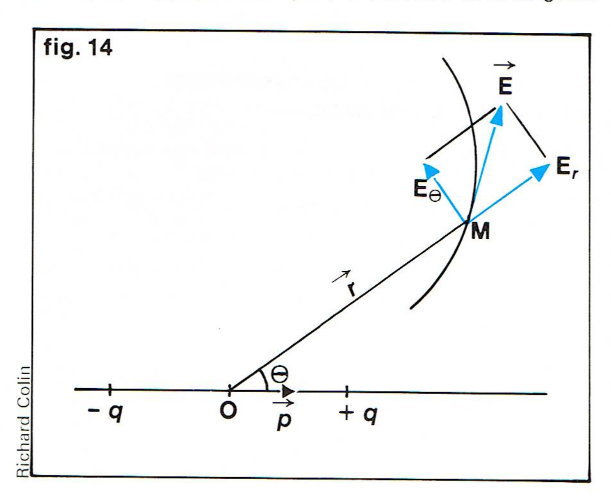
une équipotentielle V_0 est telle que $V_M = V_0$, on a donc en coordonnées polaires :

$$r^2 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 V_0}\cos\theta = B\cos\theta$$

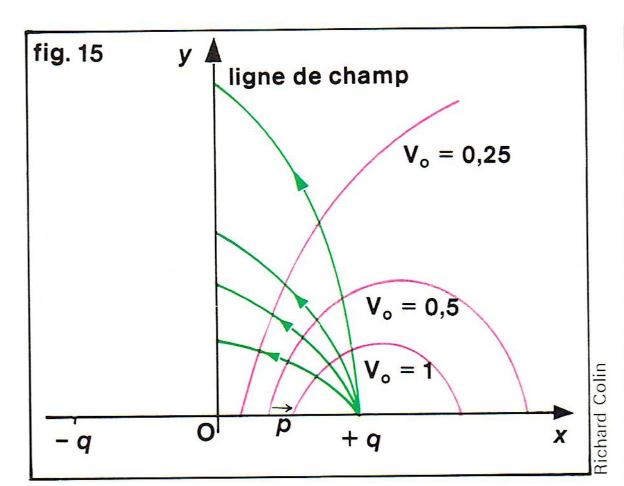
où B est une constante.

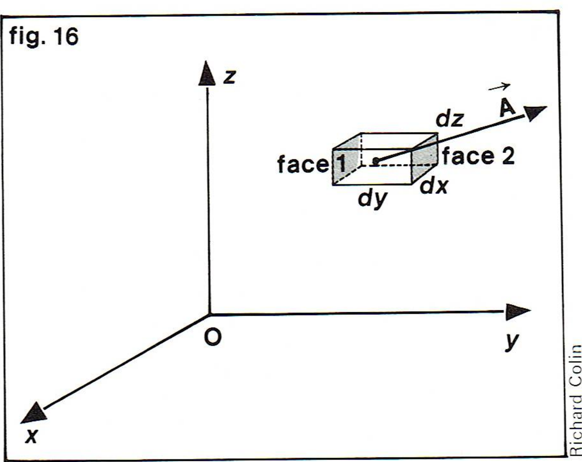
Quant aux lignes de champ, nous avons également vu qu'une ligne de champ était une courbe telle qu'en chacun de ses points, le vecteur $\vec{E}$ devait être porté par la tangente. Considérons alors la *figure* 14 :

$\vec{E} = E_r\,\vec{u}_r + E_\theta\,\vec{u}_\theta$; d'autre part, la direction de la tangente



▶ *Figure 14 : $\vec{E}$ est tangent à la courbe $r(\theta)$ au point M. Ses composantes, en coordonnées polaires, sont $\vec{E} = E_r\,\vec{u}_r + E_\theta\,\vec{u}_\theta$.*





◄ *A gauche, figure 15 : l'équation des « lignes de champ » relatives à un dipôle est $r = r_0 \sin^2 \theta$. A droite, figure 16 ; flux élémentaire d'un vecteur $\vec{A}$ à travers le parallélépipède élémentaire dx, dy, dz :* $d\,\Phi_{total} = \text{div}\,\vec{A} \cdot d\tau$.

à la courbe $r(\theta)$ au point M est celle de $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$. Or $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

donc $$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} + \vec{u}_r\frac{dr}{d\theta}$$

mais $$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$$

il s'ensuit que $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \dfrac{dr}{d\theta}\vec{u}_r + r\vec{u}_\theta$

Comme $\vec{E}$ et la tangente en M ont même direction, les coefficients directeurs sont égaux. Ainsi les équations donnant $\vec{E}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$ ont les mêmes coefficients directeurs.

Soit : $\dfrac{E_\theta}{E_r} = \dfrac{r}{\dfrac{dr}{d\theta}}$ ainsi $\dfrac{dr}{r} = d\theta\,\dfrac{E_r}{E_\theta}$

Or, dans le cas du dipôle :

$$E_r = \frac{2\,p}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{\cos\theta}{r^3} \quad \text{et} \quad E_\theta = \frac{p}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sin\theta}{r^3}$$

Soit $\dfrac{dr}{r} = 2\,\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta$; cette équation intégrée donne :

$$\text{Log}\,r = 2\,\text{Log}\sin\theta + \text{Cte} \quad \text{ou} \quad r = r_0\sin^2\theta$$

c'est l'équation de la courbe $r(\theta)$, c'est-à-dire l'équation des lignes de champ relatives à un dipôle. Nous voyons que, en coordonnées polaires, nous avons affaire à une famille de courbes qui dépendent de la valeur de r_0 (*fig.* 15).

Action d'un champ électrique sur un dipôle

On montre facilement que, dans le cas d'un champ uniforme, un dipôle électrique de moment $\vec{p}$ placé dans ce champ est soumis à un couple $\vec{C}$ qui tend à l'orienter de façon que ce moment ait la direction et le sens du champ :

$$\vec{C} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Flux du champ électrostatique - Théorème de Gauss

Nous allons aborder la notion de flux en considérant la *figure* 16. Soit un élément de surface dS tel que le vecteur $d\vec{S} = \vec{n}dS$, $\vec{n}$ étant la normale à la surface, orientée positivement. Soit un vecteur $\vec{A}$ traversant la surface et faisant un angle α avec le vecteur $d\vec{S}$. On appelle *flux élémentaire du vecteur* $\vec{A}$ à travers la surface $d\vec{S}$ le produit scalaire $d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} = |\vec{A}| \cdot |d\vec{S}| \cdot \cos\alpha$.

$d\Phi > 0$ si α est aigu,

$d\Phi < 0$ si α est obtus,

$d\Phi = 0$ si $\vec{A}$ est parallèle à $d\vec{S}$.

Le flux total de $\vec{A}$ à travers une surface finie S est donc :

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

Pour une surface fermée, la normale $\vec{n}$ étant dirigée par définition vers l'extérieur, le flux Φ est sortant.

Notions sur la divergence d'un vecteur $\vec{A}$

Soit la *figure* 16. Considérons par ailleurs un vecteur $\vec{B}$ quelconque dont les composantes sont B_x, B_y, B_z. Par définition de la divergence, on a :

$$\text{div}\,\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

C'est un scalaire.

Sur la *figure* 16, nous considérons à présent le flux d'un vecteur $\vec{A}$ à travers le parallélépipède élémentaire dx, dy, dz défini sur trois axes orthonormés $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Considérons le flux élémentaire de $\vec{A}$ à travers les surfaces dx, dz parallèles au plan xOz.

Le flux à travers la face 1 est < 0 puisque $\vec{A}$ et $\vec{n}$ sont en sens inverse.

$$d\Phi_1 = \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 = -\,A_y \cdot dx \cdot dz$$

Le flux à travers la face 2 est > 0. Or si le vecteur est $\vec{A}$ lorsqu'il traverse dS_1, il devient $A_y + \dfrac{\partial A_y}{\partial y}\,dy$ lorsqu'il traverse la surface dS_2.

Donc $$d\Phi_2 = \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y}\,dy\right) dx \cdot dz$$

donc $$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) dx \cdot dy \cdot dz$$

Par permutation circulaire, les flux sortant par les faces parallèles aux deux autres plans sont :

$$d\Phi_{xOy} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dy \cdot dz \cdot dx$$

et $$d\Phi_{yOz} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) dz \cdot dx \cdot dy$$

Donc

$$d\Phi_{total} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dx \cdot dy \cdot dz = \text{div}\,\vec{A} \cdot d\tau$$

avec $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ donc $\text{div}\,\vec{A} = \lim\limits_{d\tau \to 0} \dfrac{\vec{A} \cdot d\vec{S}}{d\tau}$

Si le flux Φ sortant de toute surface fermée est nul, on dit que le flux est conservatif.

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iiint_\tau \text{div}\,\vec{A} \cdot d\tau = 0$$

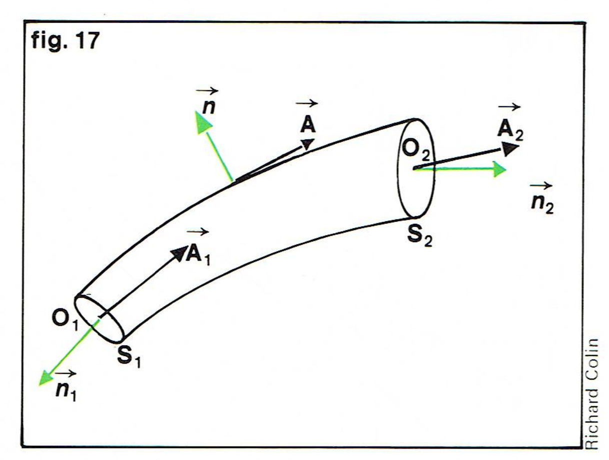
Cela entraîne que $\text{div}\,\vec{A} = 0$. Donc, si le flux de $\vec{A}$ est conservatif, $\text{div}\,\vec{A} = 0$.

On le retrouve en appliquant le **théorème de Green :**

$$\iiint_\tau \text{div}\,\vec{A} \cdot d\tau = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

S étant la surface délimitant le volume τ.

▶ *Figure 17 : toutes les surfaces d'un tube de champ à flux conservatif sont traversées par le même flux.*



Toutes les surfaces d'un tube de champ à flux conservatif sont traversées par le même flux. En effet : soit un tube de champ limité par deux surfaces quelconques S_1 et S_2 (*fig.* 17). Soit $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ les directions des normales à S_1 et S_2 dirigées respectivement vers l'extérieur de chaque surface. Le flux sortant latéralement est nul, puisque le vecteur $\vec{A}$ est tangent aux lignes de champ et que la normale en chaque point est perpendiculaire à ce vecteur.

Soit Φ_1 le flux à travers S_1 ; il est *entrant*. Soit Φ_2 le flux à travers S_2 ; il est *sortant*. Donc $-\Phi_1 + \Phi_2 = 0$; ce qui entraîne que $\Phi_1 = \Phi_2$. Donc le flux est conservatif à travers un tube de champ.

Soit alors un tube de champ élémentaire. Il est traversé par un flux $\Phi = \vec{A} \cdot \vec{S}$ constant. Nous voyons que, si $\vec{S}$ augmente, $\vec{A}$ diminue, donc le module du vecteur champ est inversement proportionnel à la surface qu'il traverse.

Flux du champ électrique $\vec{E}$

▶ *Figure 19 : par définition, l'angle solide d'un cône est la surface Ω qu'il découpe sur une sphère de rayon unité.*

Si l'on considère un élément de surface dS autour d'un point M, on définit une normale $\vec{n}$ dans le sens positif, telle que $d\vec{S} = \vec{n}dS$. Soit $\vec{E}$ le champ en M. Le flux élémentaire de $\vec{E}$ à travers la surface dS est donné par

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Si l'on considère à présent le flux de $\vec{E}$ à travers une surface quelconque S, l'expression du flux est :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Si la surface est fermée et si la normale est dirigée vers l'extérieur, Φ est le flux sortant de la surface.

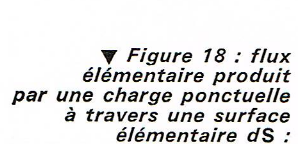
Flux produit par une charge ponctuelle

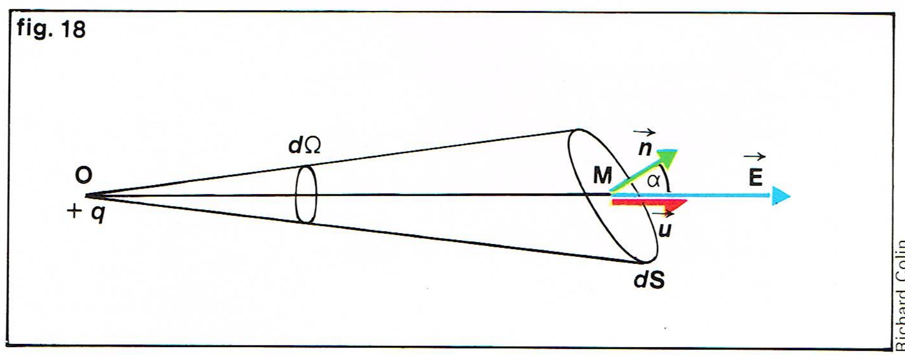
Nous envisagerons le cas d'une surface élémentaire. Soit en un point O une charge $+q$. Le problème est de calculer le flux du vecteur $\vec{E}$ produit par la charge q en un point M où se trouve placée une petite surface élémentaire dS (*fig.* 18).

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

or $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

▼ *Figure 18 : flux élémentaire produit par une charge ponctuelle à travers une surface élémentaire dS :*


$d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\, d\Omega.$



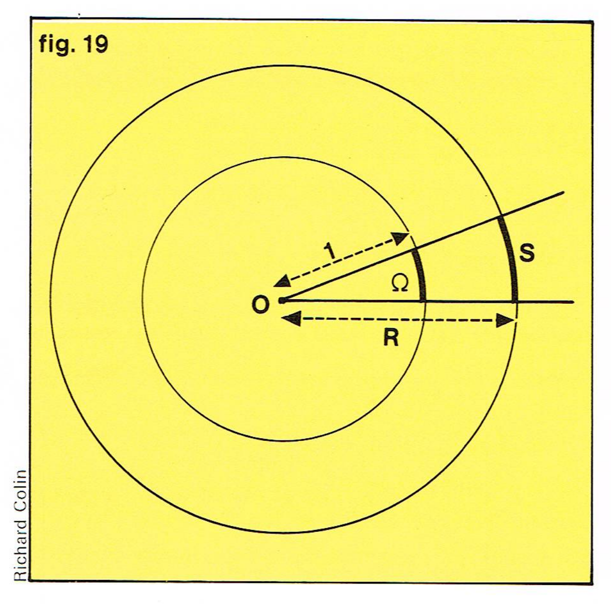
donc $$d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\alpha\, dS$$

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q d\Omega \quad \text{avec} \quad d\Omega = \frac{dS\cos\alpha}{r^2} = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

L'utilisation de $d\Omega$ va nous permettre d'introduire la notion d'*angle solide*. Soit un cône de sommet O et de section quelconque (*fig.* 19). Par définition, l'angle solide de ce cône est la surface Ω qu'il découpe sur une sphère de rayon unité. L'unité d'angle solide est le stéradian. Si l'on considère une sphère de rayon R, la surface découpée par le cône est S. Or les surfaces Ω et S sont homothétiques, donc $\frac{\Omega}{1} = \frac{S}{R^2}$; ainsi $\Omega = \frac{S}{R^2}$.

Pour l'ensemble de l'espace autour de O (sphère),

$$\Omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$



Pour un cône de révolution de demi-angle au sommet θ,

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$$

Pour θ petit, $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ donc $\Omega \simeq 2\pi\frac{\theta^2}{2} \simeq \pi\theta^2$.

Soit, en un point M, une surface dS caractérisée par $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$. Pour calculer l'angle solide sous lequel on voit, à partir du point O, l'élément de surface dS situé à la distance $|\vec{r}| = |\overrightarrow{OM}|$, il faut considérer la surface découpée par le cône sur la sphère de centre O et de rayon $|\overrightarrow{OM}|$. Cette surface est :

$$d\vec{S}' = d\vec{S}\cos\alpha \quad \text{avec} \quad \cos\alpha = (\vec{u} \cdot \vec{n})$$

or $d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$, soit $d\Omega = \frac{dS\cos\alpha}{r^2}$

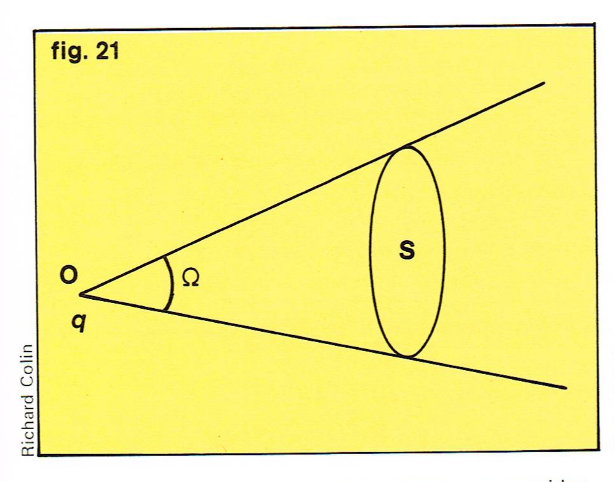
donc $$d\Omega = dS \cdot \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

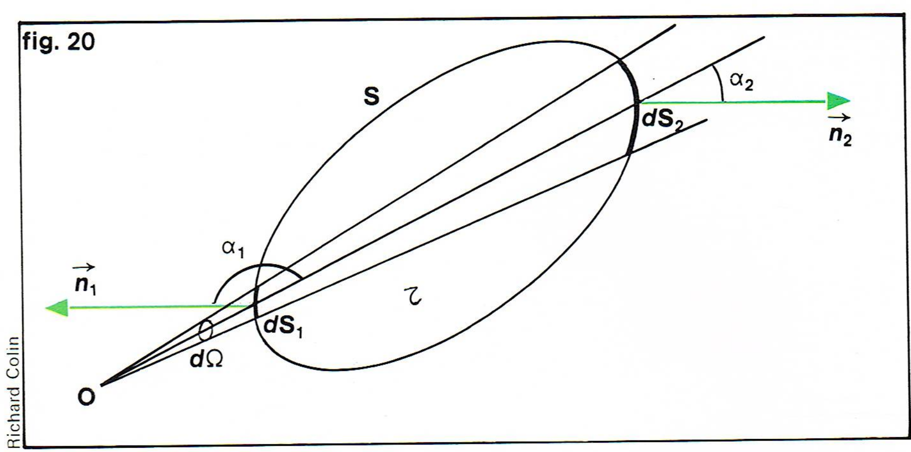
Quant à l'angle solide sous lequel on voit une surface fermée, il peut avoir une des trois valeurs suivantes :
— il est nul, si le point est à l'extérieur de la surface ;
— il vaut 4π, s'il est à l'intérieur de la surface ;
— il vaut 2π, s'il est sur la surface.

Dans le premier de ces trois cas, soit une surface fermée S et un point O extérieur à cette surface (*fig.* 20). Traçons à partir de O le cône découpant sur S les deux surfaces dS_1 et dS_2. α_1 est obtus et α_2 est aigu, or les angles solides découpés sur dS_1 et dS_2 ont la même valeur absolue (homothétie),

donc $$d\Phi_1 = -d\Phi_2$$

On peut ainsi former des couples de surfaces élémentaires comme (dS_1, dS_2) de sorte que les flux élémentaires s'annulent respectivement. Aussi le flux total Φ est-il nul.





▲ *A gauche, figure 21 : S est la surface vue du point O sous l'angle solide Ω. A droite, figure 20 : démonstration de la valeur nulle de l'angle solide sous lequel on voit une surface fermée lorsque le point est à l'extérieur de cette surface.*

Les démonstrations pour les deux autres cas sont identiques. Le cas général est donné par la *figure* 21, où une surface S quelconque est vue d'un point O sous l'angle solide Ω :

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$$

On constate que le flux est conservatif dans un cône de champ (c'est-à-dire un cône dont les génératrices sont des lignes de champ).

Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss s'énonce ainsi : *le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée est égal (dans le vide) au quotient par ε_0 de la somme algébrique des charges électriques situées à l'intérieur de la surface.*

Soit en effet *une charge q_i* :

— si elle est située à l'extérieur de la surface, nous avons vu que $d\Phi = 0$, donc $\Phi_{\text{total}} = 0$;

— si elle est située à l'intérieur de la surface, $d\Phi = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$ pour une direction $\vec{B_i}$ donnée. Pour avoir le flux Φ_{total}, il faut considérer toutes les directions $\vec{B_i}$. Donc il faut étudier l'angle solide total 4π.

Ainsi : $$\Phi = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

Dans le cas où l'on a affaire à *plusieurs charges $q_1, ..., q_n$* à l'intérieur de la surface :

$$\Phi = \frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0}$$

Équation de Poisson et de Laplace dans le vide

$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$, or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$, ce qui nous donne :

$$-\text{div}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\,V) = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

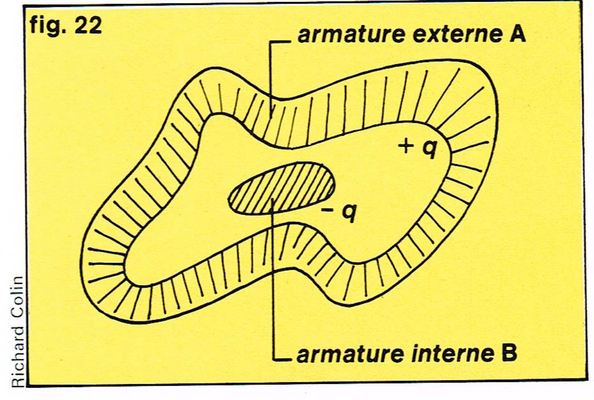
Ainsi $\nabla^2 V + \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} = 0$. C'est l'*équation de Poisson*, qui se réduit à l'*équation de Laplace* $\nabla^2 V = 0$ dans le cas où il n'y a pas de charges.

Capacité - Condensateurs

Dans le cadre de cet ouvrage, nous n'aborderons pas l'étude des conducteurs, ni l'influence électrostatique. Nous débuterons l'étude des condensateurs par la définition suivante : un condensateur est formé de deux conducteurs dont l'un est creux et contient l'autre. L'espace qui les sépare peut être rempli d'un diélectrique de constante diélectrique ε.

Le conducteur externe A est appelé *armature externe*, l'autre B est appelé *armature interne* (*fig.* 22). Si l'armature externe est portée au potentiel V_A et l'armature interne au potentiel V_B, on montre que les deux armatures se chargent respectivement des charges $+q$ et $-q$. Si l'on pose $(V_A - V_B) = V$, on établit que

$$q = CV$$



◀ *Figure 22 : un condensateur est formé de deux conducteurs dont l'un est creux et contient l'autre. Le premier est appelé « armature externe » (A), le second « armature interne » (B).*

Donc la charge du condensateur est proportionnelle à la différence de potentiel entre les deux armatures. Le coefficient de proportionnalité est appelé *capacité du condensateur*.

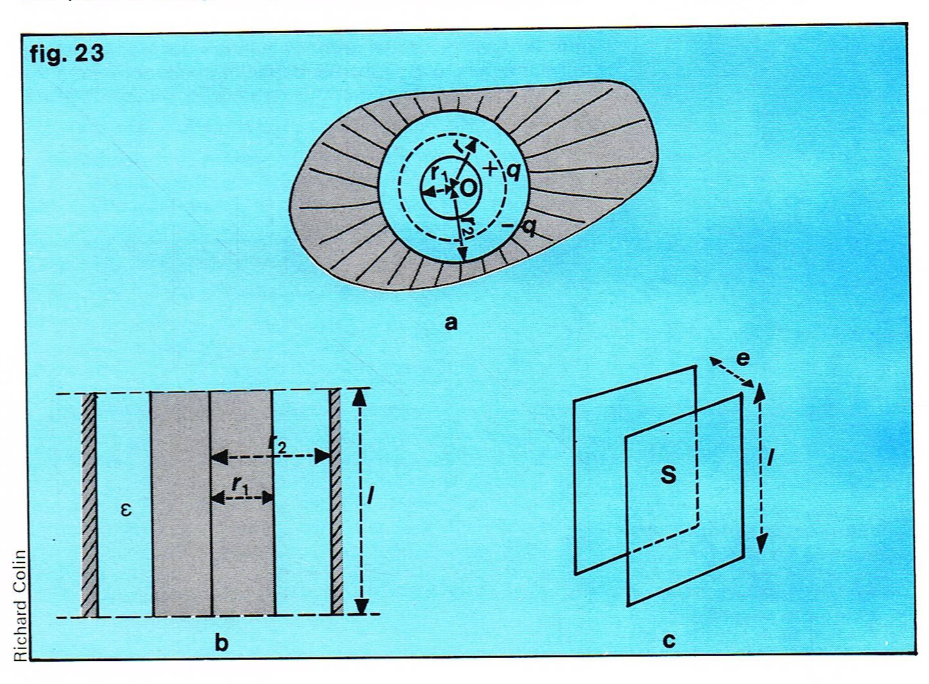
Condensateurs de forme géométrique simple

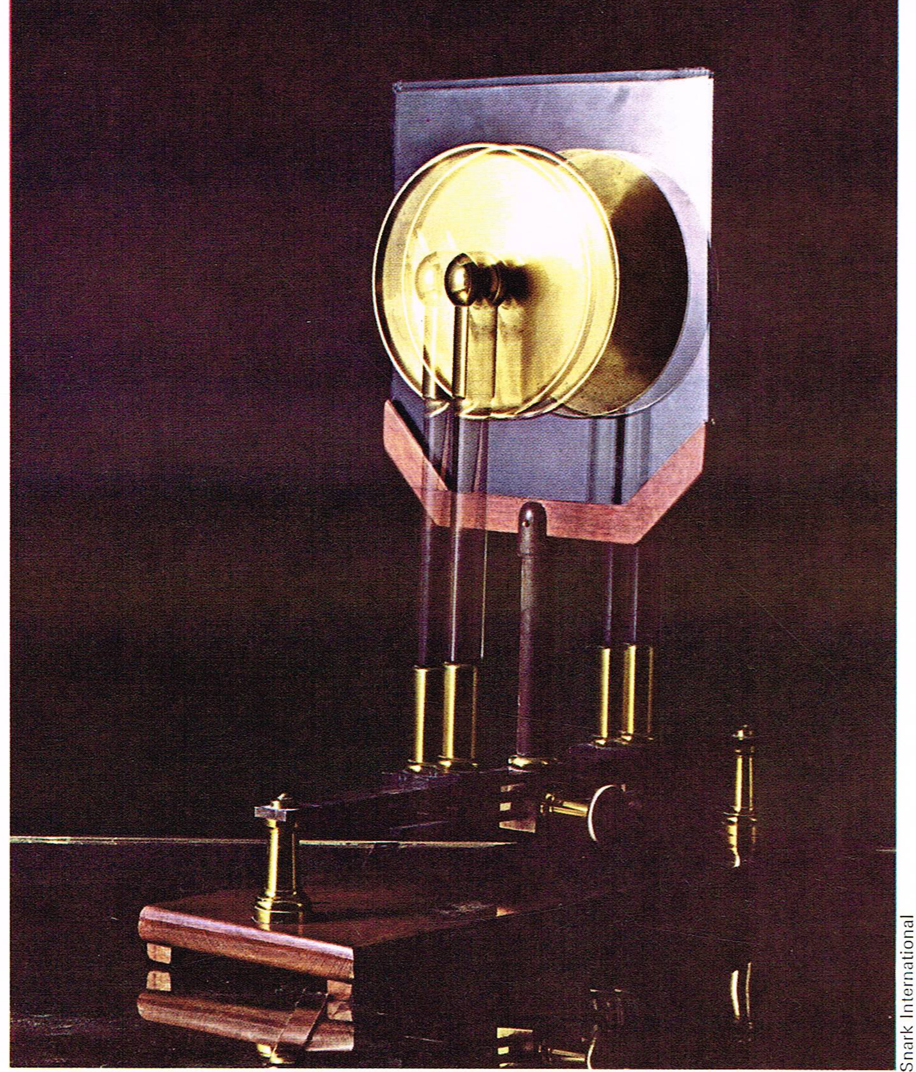
De manière générale, lorsque les condensateurs ont une forme géométrique simple, on procède de la manière suivante : on se donne q, on calcule $\vec{E}$ par application du théorème de Gauss, on en déduit V. Il est ensuite facile d'en déduire la capacité C du condensateur.

Condensateur sphérique

La forme de l'armature externe importe peu (*fig.* 23a). Elle porte la charge $-q$, tandis que l'armature interne

▼ *Figure 23 ; trois types de condensateurs de forme géométrique simple : a, condensateur sphérique ; b, condensateur cylindrique ; c, condensateur plan.*





Snark International

▲ ***Un** condensateur plan est tel que ses armatures ont des surfaces en regard planes et parallèles.*

porte la charge $+q$. Soit r_1 le rayon de l'armature interne et r_2 celui de la surface intérieure de l'armature externe.

A une distance r de O, $\vec{E}$ est donné par le théorème de Gauss dans un diélectrique de constante diélectrique ε :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}$$

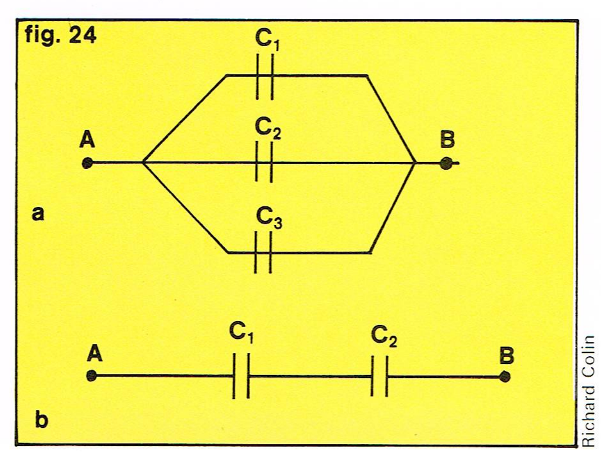
$$V = \int_{r_1}^{r_2} E \cdot dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

On en déduit que $C = 4\pi\varepsilon \dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$.

Condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique est tel que ses armatures sont limitées par deux surfaces cylindriques de révolution de même axe (*fig.* 23b). La capacité correspondant à un tronçon de longueur l compris entre deux sections droites est :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$



Richard Colin

▶ *Figure 24 : a, condensateurs mis en parallèle :* $C = C_1 + C_2 + C_3$. *b, condensateurs groupés en série :* $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$

Condensateur plan

Un condensateur plan est tel que ses armatures ont des surfaces en regard planes et parallèles. La distance e qui les sépare est appelée *épaisseur du condensateur* (*fig.* 23c).

Pour une surface S de l'armature, la capacité de ce condensateur est $C = \dfrac{\varepsilon S}{l}$.

Groupement des condensateurs

Nous pouvons grouper les condensateurs.

Condensateurs mis en parallèle

On remarque très facilement que la capacité totale de l'ensemble est égale à la somme des capacités de chacun des condensateurs (*fig.* 24a).

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

Condensateurs en série

Dans le cas où les condensateurs sont groupés en série (*fig.* 24b), la capacité totale de ce groupement est telle que :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{soit : } C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

L'énergie électrostatique

Nous avons vu qu'une charge placée dans un champ électrique possède de l'énergie. L'énergie W qu'il faut fournir à une charge q pour la faire passer du potentiel 0 au potentiel V est aussi l'énergie que cède cette charge lorsqu'elle repasse de V à 0.

Cette énergie est : $W = qV$.

Pour ce qui est des conducteurs chargés en équilibre, on montre que l'énergie de ce système est :

$$\textbf{(1)} \qquad W = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i$$

où q_i et V_i désignent respectivement la charge et le potentiel du i-ième conducteur. Appliquons cette relation à la détermination théorique de l'énergie d'un condensateur.

Soit un condensateur dont l'armature interne B, au potentiel V_B, porte la charge $-q$, et l'armature externe A, au potentiel V_A, porte la charge $+q$. La relation générale **(1)** donne :

$$W = \frac{1}{2} q (V_A - V_B)$$

Soit $V = V_A - V_B$, la tension entre ces deux armatures. Alors la formule précédente s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad \text{car } q = CV$$

Localisation de l'énergie électrostatique

Nous allons montrer, à l'aide de l'exemple simple d'un condensateur plan, que, dans une région où règne un champ $\vec{E}$, il y a une densité d'énergie $W_0 = \dfrac{\varepsilon}{2}E^2$.

Soit en effet un condensateur plan indéfini, de constante diélectrique ε, dont les armatures sont séparées par la distance e. Soit une portion de surface S de ce conducteur; son énergie est $W = \dfrac{1}{2}CV^2$. Comme $|\vec{E}| = \dfrac{V}{e}$, on obtient :

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{e}E^2 e^2 = \frac{1}{2}\varepsilon S E^2 e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 v$$

où v est le volume compris entre les deux armatures. Donc l'énergie du condensateur est proportionnelle au volume v; aussi cette énergie est-elle localisée dans ce volume. L'énergie localisée par unité de volume est

$$\frac{W}{v} = W_0 = \frac{\varepsilon E^2}{2}$$

On peut généraliser ce résultat et dire que l'énergie d'un système de condensateurs chargés est localisée là où

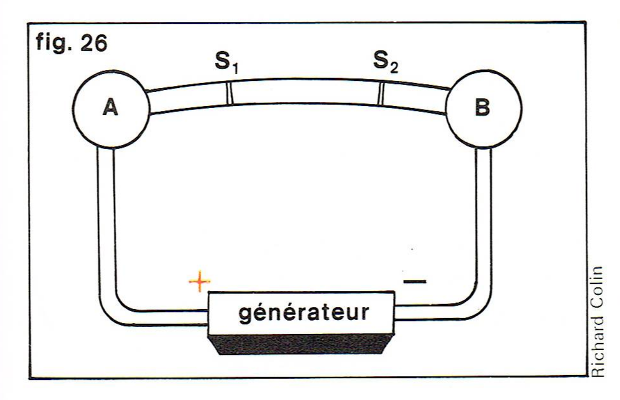


fig. 28

Richard Colin

◀ *A gauche, figure 26 : la quantité de charge dq traversant une section de fil est la même pour toute section. On a affaire à un régime « permanent » ou « stationnaire ».*
A droite, figure 28 : toutes les particules qui traversent la surface dS_2 entre les instants t et t + dt sont contenues dans un cylindre de base dS_1 (ou dS_2) et de génératrice $\vec{V}dt$.

règne un champ électrique $\vec{E}$. La densité volumique y est : $W_0 = \frac{\varepsilon E^2}{2}$. Dans un autre ordre d'idée, considérons un dipôle électrique de moment électrique $\vec{p}$.

Plaçons-le dans un champ électrique $\vec{E}$; alors l'énergie de ce dipôle est : $W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.

Courant électrique - Résistance

Il existe des appareils qui peuvent maintenir entre deux conducteurs A et B une différence de potentiel constante au cours du temps, lorsque ces deux conducteurs sont eux-mêmes reliés à un fil également conducteur. Ces appareils sont appelés *générateurs* ou *électromoteurs* (piles, dynamos, accumulateurs, etc.). Ils possèdent deux pôles. L'un est appelé *pôle positif* et l'autre *pôle négatif*. Le schéma conventionnel est celui de la *figure* 25.

Supposons à présent que nous ayons le schéma suivant (*fig.* 26) où A et B sont les deux conducteurs en question. Puisque le pôle + du générateur est relié au conducteur A, on aura par définition $V_A > V_B$. Cette différence de potentiel étant toujours maintenue dans le temps, il en résulte un déplacement des charges identique à lui-même dans le temps. Il n'y a ni accumulation, ni déperdition de charges à travers le circuit. D'autre part, cela exige également que, pendant un laps de temps donné, la quantité de charges *dq* traversant une section du fil est la même pour toute section. On dit que le circuit est traversé par un *courant continu* ou que l'on a un *régime permanent* ou *stationnaire*.

Vecteur densité de courant - Intensité du courant

Nous allons à présent définir le **vecteur densité de courant** ainsi que l'**intensité du courant électrique.** Soit un conducteur de forme quelconque, homogène et isotrope. Ce peut être soit une masse métallique à conduction électronique, soit un électrolyte à conduction ionique. Prenons ce second cas, et considérons la *figure* 27. Le conducteur est constitué d'un ballon rempli de mercure dans lequel baignent deux pointes métalliques A et B, reliées aux bornes d'un générateur. Par convention, des charges + vont circuler de A vers B, à l'intérieur du ballon, en suivant des trajectoires bien déterminées que l'on appelle *lignes de courant*, qui sont orientées dans le sens de déplacement des charges +.

Soit M un point du milieu conducteur considéré, et se trouvant sur une ligne de courant. Considérons un élément de surface *dS* autour du point M. On conçoit que la quantité de charges *dq* (notion de quantité d'électricité) traversant la surface *dS* pendant *dt* est liée à la densité volumique de charges ρ_v autour du point M et à la vitesse $\vec{V}$. En effet, nous voyons sur la *figure* 28 que toutes les particules qui traversent la surface dS_2 entre les instants *t* et *t* + *dt* sont contenues dans un cylindre de base dS_1 (ou dS_2) et de génératrice $\vec{V}dt$ (en effet, si, au temps *t*, elles se trouvent sur dS_1, au temps $t + dt$, elles atteindront la surface dS_2). Or le volume du cylindre est

$$dv = dS_1 \cdot h = dS_1 \cdot V \cdot dt \cos \alpha$$
$$dv = \vec{V} \cdot dt \cdot d\vec{S}_1$$

La charge élémentaire contenue dans ce volume est :

$$dq = \rho_v dv = \rho_v \vec{V} \cdot dt \cdot d\vec{S}_1$$

On pose par définition $\vec{J} = \rho_v \vec{V}$ qui est le vecteur densité de courant au point M.

$$dq = \vec{J} \cdot dt \cdot d\vec{S}_1 ; \quad \text{donc } \frac{dq}{dt} = \vec{J} \cdot d\vec{S}_1$$

Soit alors une surface quelconque S, et soit *dq* la charge traversant cette surface pendant le temps *dt*.

On a alors $\frac{dq}{dt} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I$ qui est la définition de l'intensité. I représente donc le flux de $\vec{J}$ à travers la surface S.

Soit un conducteur *f* dans lequel les charges sont mises en mouvement sous l'action d'un champ électrostatique $\vec{E}_e$ (on applique par exemple une différence de potentiel à ce conducteur). La loi d'Ohm établit une loi de proportionnalité entre la densité de courant en un point du conducteur et le champ, en ce même point. Cette relation s'écrit :

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}_e$$

γ étant la conductivité.

Résistance - Résistivité

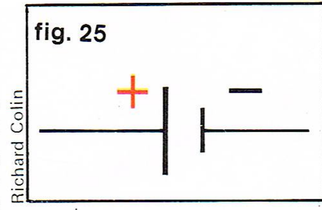
Introduisons à présent la notion de **résistance** dans le cas d'un conducteur cylindrique, en régime permanent. En régime permanent, la quantité d'électricité traversant, pendant un temps donné, une section, est la même pour toutes les sections. Aussi le flux de $\vec{J}$ est conservatif ; cela se traduit par $\text{div } \vec{J} = 0$;

or $\vec{J} = \gamma \vec{E}_e$; donc $\text{div } \vec{E}_e = 0$, et comme $\vec{E}_e = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, on obtient finalement la relation $\nabla^2 V = 0$.

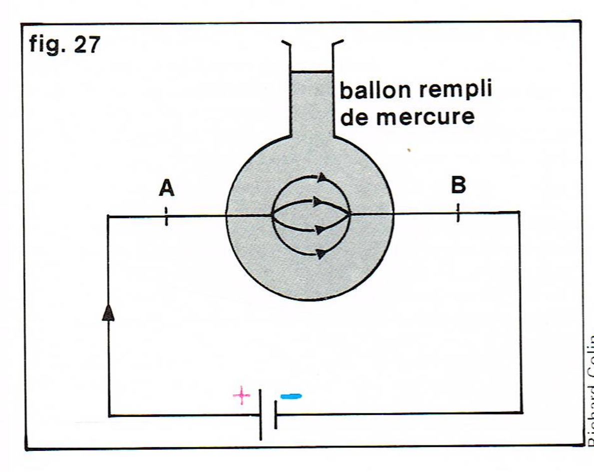
Donc le potentiel à l'intérieur d'un tel conducteur obéit à l'équation de Laplace $\nabla^2 V = 0$.

Considérons donc un conducteur cylindrique, en régime permanent, de longueur *l* et de section droite S (*fig.* 29). On impose aux deux extrémités les potentiels constants V_A et V_B. Il circule alors dans le cylindre un courant permanent I. Les lignes de courant, donc les lignes de champ, sont, par symétrie, parallèles aux génératrices du cylindre : donc les surfaces équipotentielles sont des sections droites.

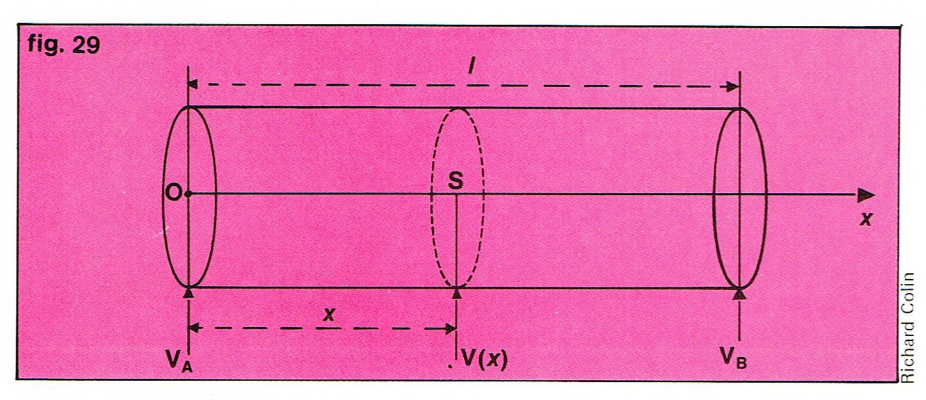
Cherchons la loi $V = V(x)$. Or V obéit à l'équation de Laplace : $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$



▲ *Figure 25 : représentation conventionnelle d'un générateur.*



◀ *Figure 27 : matérialisation de lignes de courant dans le cas d'un conducteur constitué d'un ballon rempli de mercure dans lequel baignent deux pointes métalliques A et B reliées aux bornes d'un générateur.*



▲ ***Figure 29 : définition de la résistance à partir d'un conducteur cylindrique homogène, en régime permanent, de longueur l et de section droite S : $R = \rho \frac{l}{S}$.***

Dans notre cas, nous avons affaire à la seule direction selon l'axe des x.

Aussi $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$. L'intégration donne $\frac{\partial V}{\partial x} = \text{Cte} = a$,

soit $V(x) = ax + b$. Les conditions aux limites sont telles qu'en $x = 0$, $V(o) = V_A$, et en $x = l$, $V(l) = V_B$; $V(x)$ s'écrit donc $V(x) = \frac{V_A - V_B}{l} x + V_A$.

Or $E = -\frac{\partial V}{\partial x} = \text{Cte}$ et est parallèle à Ox, donc $E = \frac{V_A - V_B}{l}$,

et $\vec{J}$ est également une constante parallèle à Ox, donc perpendiculaire à S. L'intensité I à travers une section droite est alors :

$$I = \iint \vec{J} \cdot \vec{ds} = JS = \gamma ES = \frac{\gamma S}{l} (V_A - V_B) = I$$

Ainsi
$$\frac{V_A - V_B}{I} = \frac{l\gamma}{S}$$

Le second membre de cette équation ne dépend que des dimensions du conducteur et de sa nature. C'est par définition sa résistance :

$$R = \frac{V_A - V_B}{I} = \rho \frac{l}{S}$$

avec ρ qui est la **résistivité** du conducteur $\left(\rho = \frac{1}{\gamma}\right)$.

Dans le système M. K. S. A., l'unité de résistance est l'ohm (Ω).

Lois relatives aux résistances

La *figure* 30a montre la représentation conventionnelle d'une résistance.

Résistances mises en série (*fig.* 30b)

$$V_A - V_B = R_1 I$$
$$V_B - V_C = R_2 I$$
$$V_C - V_D = R_3 I$$

Soit $V_A - V_D = (R_1 + R_2 + R_3)$ I. Ainsi l'ensemble des résistances en série est équivalent à $R = R_1 + R_2 + R_3$.

fig. 30

▶ ***Figure 30 : a, représentation conventionnelle d'une résistance ; b, mise en série de résistances $R = R_1 + R_2 + R_3$; c, mise en parallèle de résistances $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.***

Résistances en parallèle ou en dérivation (*fig.* 30c)

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{(V_A - V_B)}{R_2} + \frac{(V_A - V_B)}{R_3}$$

$$I = V_A - V_B \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$V_A - V_B = \frac{I}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)}$$

or
$$V_A - V_B = RI = \frac{I}{\frac{1}{R}}$$

donc la résistance équivalente est telle que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Cela constitue le **théorème des « conductances ».**

Application : shunt d'un appareil

Nous allons appliquer ce résultat au shunt d'un appareil. La *figure* 31 montre un appareil de résistance interne shunté. Un tel appareil est dit shunté lorsqu'on a placé un conducteur en parallèle sur lui de sorte qu'il ne reçoive qu'une fraction $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1\,000}\right)$ du courant total I (on shunte un appareil afin de ne pas le détériorer par le passage d'un courant trop intense).

On a :

$$I = I_1 + I_2 = \left(\frac{V_A - V_B}{g}\right) + \left(\frac{V_A - V_B}{s}\right)$$
$$= (V_A - V_B)\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{s}\right)$$

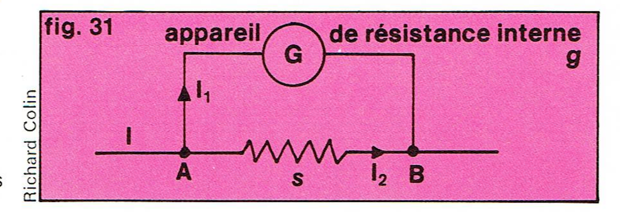
$$I = V\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{s}\right)$$

Or $I_1 = \frac{V}{g}$; donc $\frac{I}{I_1} = g\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{s}\right) = 1 + \frac{g}{s}$

Donc, si l'on veut que $\frac{I}{I_1}$ soit égal à 100, il faut que $\frac{g}{s} = 99$.

Notons que, de manière générale, dans le cas d'un shunt : $I_1 = \frac{I}{g + s} \cdot s$.

En effet : $I_1 = \frac{V}{g} = \frac{I\,(s \cdot g)}{(s + g) \cdot g} = \frac{I}{s + g} \cdot s$



▶ ***Figure 31 : l'appareil G de résistance interne g est shunté par la résistance s.***

L'énergie électrique - Générateurs et récepteurs

Énergie électrique

Définissons d'abord l'énergie électrique en *courant continu*. Soit donc un circuit parcouru par un courant continu constant I (on est donc en *régime permanent*), et sur ce circuit considérons un tronçon de conducteur AB tel que le courant entre par A et sorte par B.

Soit $V = V_A - V_B$

la différence de potentiel entre A et B avec $V_A > V_B$.

Nous avons vu que, pendant un temps t, une section quelconque de conducteur était traversée par la charge $q = It$. Nous avons vu également que toute charge q placée dans une différence de potentiel $V_A - V_B$ était soumise à une force dont le travail était $q\,(V_A - V_B)$, ce qui correspond à une baisse de potentiel. Ainsi la charge se déplaçant vers les potentiels décroissants subit une diminution d'énergie

$$W_e = q\,(V_A - V_B)$$

Ainsi $\dfrac{W_e}{V_A - V_B} = It$, ce qui entraîne que $W_e = VIt$ car $V = V_A - V_B$.

W_e constitue l'**énergie électrique** dépensée dans le tronçon AB.
Or $W_e = Pt$, P étant la puissance dissipée dans le tronçon AB. Donc $P = VI$. En unités M. K. S. A., la puissance s'exprime en watt.

Introduisons à présent l'*effet Joule*. Supposons pour cela qu'entre A et B n'apparaît aucune autre forme d'énergie que de l'énergie calorifique. Ainsi toute l'énergie électrique, soit $W_e = VIt$, s'est transformée en énergie calorifique (conservation de l'énergie) : donc $W_{calorifique} = W_{électrique}$.
Or $V_A - V_B = V = RI$ (R étant la résistance du tronçon) donc $W_{calorifique} = RI^2t$,
ce qui entraîne que $P_{calorifique} = RI^2 = VI$.

Si le courant n'est pas constant et est une fonction du temps, $I = I(t)$; alors, entre t et $t + dt$, $dW = RI^2(t)\,dt$.

$$W_{t_1}^{t_2}{}_{calorifique} = R\int_{t_1}^{t_2} I^2(t)\,dt$$

$W_{t_1}^{t_2}{}_{calorifique}$ étant l'énergie calorifique apparaissant entre les instants t_1 et t_2.

Notions de force électromotrice et de force contre-électromotrice

Générateurs

La *figure* 32 permet d'introduire la notion de force électromotrice d'un générateur. Il s'agit d'un générateur débitant dans un circuit ACB. D'après la figure, $V_A > V_B$ et les charges $+q$ circulent dans le circuit extérieur ACB de A vers B ; elles se dirigent vers les potentiels décroissants, soumises au *champ électrostatique* E_e allant lui aussi vers les potentiels décroissants, car

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_e \cdot d\vec{l}.$$

Or, à l'intérieur du générateur, ce champ électrostatique existe aussi, allant du pôle + (P) vers le pôle — (N), donc les charges $+q$ arrivant en B auront tendance à être repoussées dans le circuit C sous l'action de ce champ. Mais elles traversent le générateur dans le sens de B vers A puisqu'elles circulent sans accumulation dans tout le circuit. Il existe donc une force $\vec{F}_m$ autre que celle due au champ électrostatique et qui permet le passage des charges dans le générateur. On pose alors par définition, et par analogie avec le champ électrostatique :

$\vec{E}_m = \dfrac{\vec{F}_m}{q}$; E_m est le *champ électromoteur* du générateur.

Ainsi, à l'intérieur du générateur, une charge $+q$ est soumise à l'action des deux champs $\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m$.

Soit alors une ligne de courant formant une trajectoire fermée Γ. La circulation de $\vec{E}$ le long de Γ est :

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_\Gamma \vec{E}_e \cdot d\vec{l} + \oint_\Gamma \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

or $\vec{E}_e$ dérive d'un potentiel, donc $\oint_\Gamma \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = 0$

donc $C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$

Dans le cas que nous avons considéré, cette circulation est uniquement effectuée à l'intérieur du générateur, de N vers P, pour permettre aux charges de passer, puisque dans le reste du circuit E_m n'existe pas. C'est cette circulation du champ électromoteur que l'on appelle **force électromotrice du générateur** (f. é. m.) et que l'on peut noter $\mathcal{E}$. La circulation de $\vec{E}_m$,

soit $C_N^P = V_P - V_N = \int \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$ a les dimensions d'une différence de potentiel. Elle s'exprime donc en volts dans le système M. K. S. A.

Nous verrons en électromagnétisme un exemple de champ électromoteur. Citons aussi l'exemple d'un conducteur circulaire (spire) soumis à une variation de flux magnétique, qui peut être par exemple due à un aimant que l'on approche ou que l'on éloigne de la spire ; dans cette spire il se crée un courant dû au « champ électromoteur d'induction ».

Revenons au générateur précédent. Puisqu'il fournit un travail dû au champ électromoteur $\vec{E}_m$, c'est donc une source d'énergie électrique.

Or $C_N^P = \int \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$ (circulation du champ électromoteur) et une charge q placée dans le champ $\vec{E}_m$ est par définition soumise à la force $\vec{F}_m = q\vec{E}_m$.

Donc le travail de cette force $\vec{F}_m$ est :

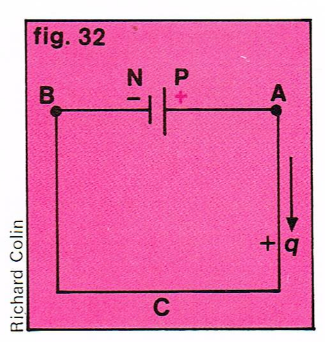
$$W = \int q\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = q\mathcal{E}$$

Comme il s'agit du travail de la force $\vec{F}_m$ due au produit de la charge par le champ électromoteur, c'est donc qu'un générateur traversé par une charge q fournit l'énergie électrique $W_e = q\mathcal{E}$.

$$P_{fournie} = \frac{q}{t}\mathcal{E} = I\mathcal{E}$$

Belzeaux - Rapho

▲ ***La centrale électrique de Persan-Beaumont (France).***



▼ ***Figure 32 : notion de* force *électromotrice d'un générateur ; les charges* + *q circulent de A vers B.***

Richard Colin



▲ *Le physicien allemand* Georg Simon Ohm *(1789-1854).*

▶ *Page ci-contre, en bas, figure 37 :* a, *charge d'un condensateur à travers une résistance;* b, *la tension u(t) croît exponentiellement avec la constante de temps* RC.

▼ *A gauche, figure 33 :* a, *un courant constant est fourni par le générateur g; il entre par* A *dans le tronçon* AB *contenant le générateur* G. b, *un courant constant est fourni par le générateur g; il entre par* A *dans le tronçon* AB *contenant un récepteur. A droite, figure 34 : représentation d'un réseau comprenant des résistances, générateurs et récepteurs. Les lois de Kirchhoff permettent de calculer les paramètres d'un tel réseau.*

Récepteurs

Soit un appareil d'utilisation traversé par un courant I. S'il n'apparaît aucune forme d'énergie autre que l'énergie calorifique RI^2t, alors l'appareil se comporte comme une résistance morte. S'il apparaît une autre forme d'énergie, par exemple de l'énergie mécanique, alors l'appareil est un « récepteur ». Soit W_r cette autre forme d'énergie apparue pendant le temps t. Pendant ce même temps, le récepteur est traversé par la charge q. Par définition, on désigne par **force contre-électromotrice** (f. c. é. m.) du récepteur le rapport $\mathcal{E}' = \frac{W_r}{q}$ qui, comme la force électromotrice d'un générateur, a les dimensions d'une différence de potentiel. Elle s'exprime donc en volts dans le système M. K. S. A.

$$\mathcal{E}' = \frac{W_r}{It} = \frac{P_r}{I}$$

Donc $P_r = \mathcal{E}'I$ qui est la puissance apparue dans le récepteur, autre que la puissance calorifique.

Loi d'Ohm généralisée

Soit un tronçon quelconque AB du circuit parcouru par un courant I et dans lequel il y a des résistances, des générateurs de force électromotrice $\mathcal{E}$, des récepteurs de force contre-électromotrice $\mathcal{E}'$. La loi d'Ohm généralisée permet d'obtenir la d. d. p. (différence de potentiel) entre A et B, moyennant certaines conditions.

La loi d'Ohm généralisée est la suivante :

$$V_A - V_B = \Sigma RI - \Sigma \mathcal{E}$$

à condition que le courant entre par A et sorte par B. $\mathcal{E}$ désigne indifféremment la force électromotrice d'un générateur ou la force contre-électromotrice d'un récepteur; il suffit d'affecter à $\mathcal{E}$ le signe + si l'on rencontre en second lieu la borne + et le signe — si l'on rencontre en second lieu la borne —.

Si, par exemple, au départ, on sait qu'on a affaire à un récepteur dont les pôles sont connus à l'avance, il faut le disposer dans le circuit de telle manière que le pôle — figure en second lieu. La *loi de Pouillet* traduit le cas du circuit fermé. Dans la loi d'Ohm généralisée, V_A est alors égale à V_B. Ainsi $\Sigma \mathcal{E} = \Sigma RI$.

Analysons les deux exemples suivants.

— Dans le premier cas (*fig.* 33a), le courant I constant est fourni par le générateur g. Il entre par A dans le tronçon AB contenant un autre générateur G. Soit R la résistance du tronçon AB, y compris la résistance interne du générateur G. La loi d'Ohm s'écrit :

$$V_B - V_A = \mathcal{E} - RI$$

$\mathcal{E}$ étant la f. é. m. du générateur G.

— Le second cas (*fig.* 33b) est l'exemple d'un tronçon AB contenant un récepteur. R est la résistance du tronçon AB, y compris celle du récepteur. Dans ce cas, la loi d'Ohm s'écrit :

$$V_A - V_B = RI + \mathcal{E}'$$

$\mathcal{E}'$ étant la f. c. é. m. du récepteur.

Réseaux de conducteurs - Loi de Kirchhoff - Applications

Réseau de conducteurs

Un réseau de conducteurs est formé par une association, plus ou moins compliquée, de résistances, de générateurs et de récepteurs (*fig.* 34). Ce réseau est constitué par un certain nombre de « branches », telle la branche AB. Un « nœud » du réseau est un point commun à plusieurs branches. Une « maille » du réseau est constituée par tout circuit fermé formé par des branches, par exemple la maille ABC ou encore la maille CDE.

Le problème qui se pose est le suivant : l'étude d'un réseau de conducteurs consiste à déterminer le sens et la valeur des intensités des courants passant dans chaque branche, connaissant les valeurs des éléments du réseau, c'est-à-dire les valeurs des différentes résistances, forces électromotrices et forces contre-électromotrices figurant dans le réseau. Ce sont les *lois de Kirchhoff* qui permettent de résoudre ce problème.

Lois de Kirchhoff

Elles sont au nombre de deux : la « loi des nœuds » et la « loi des mailles ».

La **loi des nœuds** est la suivante : *la somme des intensités des courants qui partent d'un nœud est égale à la somme des intensités qui y arrivent.*

Cela se comprend, car, en régime stationnaire, il ne peut y avoir accumulation de charges en aucun point du réseau. On adopte les conventions suivantes : on affecte des signes + les courants arrivant sur le nœud et des signes — les courants partant du nœud. Avec ces conventions, la loi des nœuds s'écrit : $\Sigma I = 0$.

La **loi des mailles,** quant à elle, s'énonce ainsi : *si l'on parcourt une maille en partant et en revenant au même point (par exemple sur la figure le point A), la somme des d. d. p. des différentes branches constituant la maille est nulle.*

La loi d'Ohm généralisée s'écrit alors :

$$V_A - V_A = \Sigma RI - \Sigma \mathcal{E} = 0$$

Cela entraîne $\Sigma RI = \Sigma \mathcal{E}$.

Cette formule est valable à condition de respecter les conventions de signe suivantes qui découlent de celles faites dans la loi d'Ohm généralisée :

— on adopte un sens de parcours sur la maille; par exemple, dans la maille ABC, le sens A → B → C;

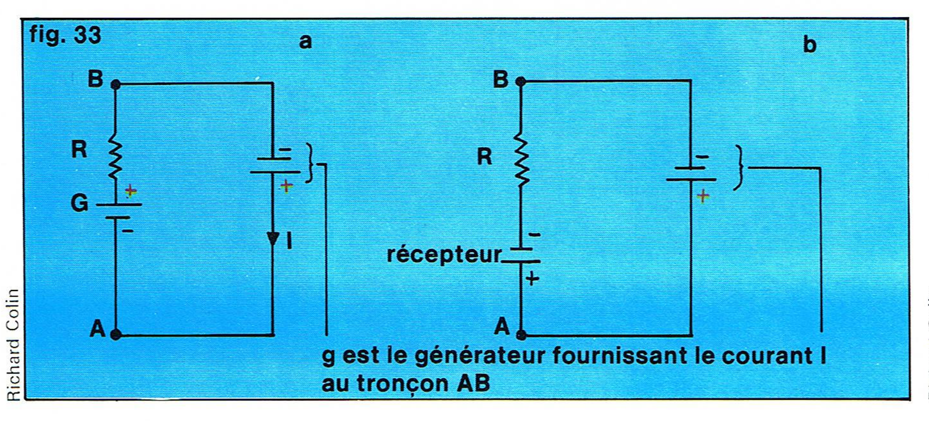
— on choisit arbitrairement, pour chaque branche, un sens du courant; si ce sens est celui du sens de parcours de la maille, alors I est choisi positif, sinon il est choisi négatif;

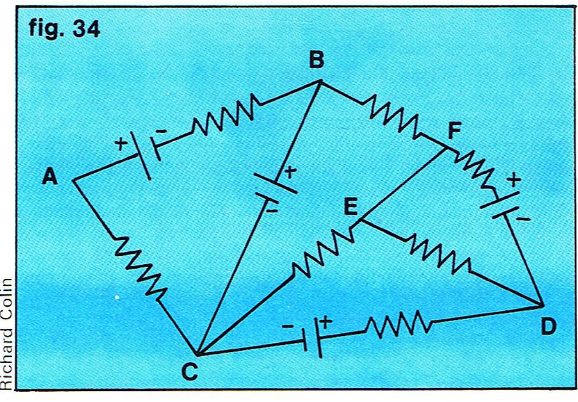
— on applique pour $\mathcal{E}$ les mêmes conventions que pour la loi d'Ohm généralisée;

— après résolution du système d'équations de Kirchhoff, on obtient des valeurs algébriques pour chacune des intensités; l'obtention d'une valeur négative pour une intensité, dans une branche, signifie que le sens réel du courant dans cette branche est le sens inverse de celui supposé au départ. Remarquons que, pour le signe de la f. é. m., seul compte le sens de parcours de la maille, le sens du courant ne comptant pas.

Théorème de superposition

Ce théorème découle immédiatement de la forme linéaire des lois de Kirchhoff par rapport aux intensités et aux f. é. m. : *le courant dans une branche quelconque est la somme algébrique des courants produits dans cette branche par chaque générateur supposé seul, les résistances gardant toujours la même valeur, et les autres générateurs étant remplacés par leur résistance interne.*





Théorème de Thevenin

Le courant dans une impédance quelconque Z_r branchée entre les deux extrémités M et N d'un circuit est le même que celui que l'on aurait si Z_r était reliée à un générateur dont la f. é. m. serait la d. d. p. V_0 mesurée en circuit ouvert entre les deux bornes M et N (donc en enlevant Z_r) et dont la résistance interne serait celle que l'on mesurerait entre ces deux bornes, les générateurs du circuit étant remplacés par leur résistance interne.

Comment appliquer le théorème de Thevenin? Soit en effet le circuit complexe comprenant entre deux de ses bornes M et N, une impédance Z_r (*fig.* 35a). Le problème est de calculer le courant dans cette impédance. On procède pour cela de la manière suivante : on enlève d'abord Z_r. On calcule alors (c'est-à-dire à vide) la d. d. p., soit V_0, entre les bornes M et N ; on remplace les générateurs du circuit complexe par leurs impédances internes, et on calcule alors, vue des deux bornes M et N (Z_r étant déconnectée), l'impédance Z. On fait alors le schéma équivalent représenté par la *figure* 35b. On peut alors, en branchant Z_r, obtenir le courant I qui y passe par la formule :

$$I = \frac{V_0}{Z + Z_r}$$

Charge et décharge d'un condensateur

Nous allons à présent aborder l'étude de la charge et de la décharge d'un condensateur à travers une résistance R. Il s'agit de trouver la loi de variation de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps. Soit $u = u\,(t)$.

Cas de la décharge

Soit un condensateur C, chargé avec la charge q_0 (*fig.* 36a). Nous pouvons relier ses deux armatures à une résistance R en fermant l'interrupteur K. Avant de fermer K, la d. d. p. entre les deux armatures du condensateur est u_0. Fermons K et supposons que $u_A > u_B$. Le courant circule alors dans le sens indiqué sur la figure. Soit $t_0 = 0$ l'instant où l'on a fermé l'interrupteur. A l'instant *t*, la tension aux bornes de C est $u\,(t)$, et sa charge sera $dq = -I\,(t)\,dt$ (on observe en effet, à l'instant *t*, un courant $I\,(t)$ fonction du temps, mais qui est positif). Le signe — affecté à dq vient du fait que la charge q diminue au cours du temps, puisque le condensateur se décharge. Or $q = Cu$ et $u = RI\,(t)$. On obtient ainsi l'équation différentielle $\frac{du}{u} = -\frac{1}{RC}\,dt$ qui, intégrée, donne la valeur de u à l'instant t : $u\,(t) = u_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

On pose $\theta = RC$ que l'on appelle *constante de temps* du circuit ; elle a les dimensions d'un temps. Au bout du temps θ, la tension a la valeur $\frac{u_0}{e}\left(\sim \frac{u_0}{3}\right)$. Cette constante caractérise donc la vitesse de décroissance de la tension (*fig.* 36b). En pratique, on considère qu'au bout du temps θ la décharge est pratiquement terminée. Par exemple, pour $t = 7\,\theta$, on a $u = \frac{u_0}{1\,000}$; ce qui est une tension très faible.

Quelle est l'*énergie dissipée* au cours de cette décharge ? Cette énergie est dissipée par effet Joule durant un temps théoriquement infini :

$$W = \int_0^{\infty} RI^2\,(t)\,dt$$

$$\text{avec } I\,(t) = \frac{u\,(t)}{R} = \frac{u_0}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{q_0}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

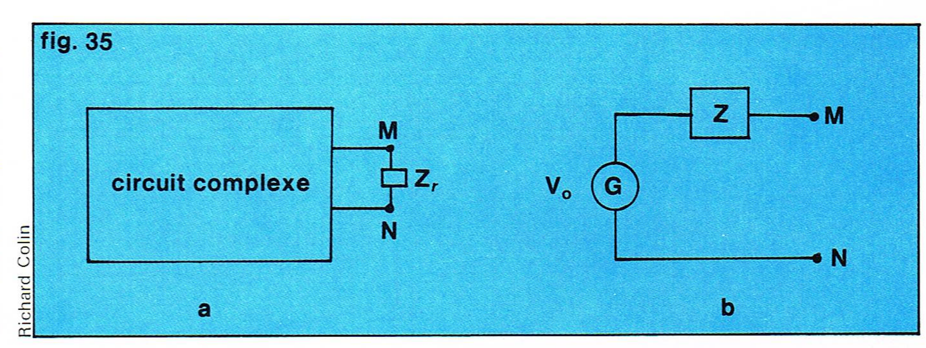
$$W = \int_0^{\infty} R\,\frac{q_0^2}{R^2C^2}\,e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt = \frac{q_0^2}{2\,C} = \frac{C^2u_0^2}{2\,C} = \frac{1}{2}\,Cu_0^2$$

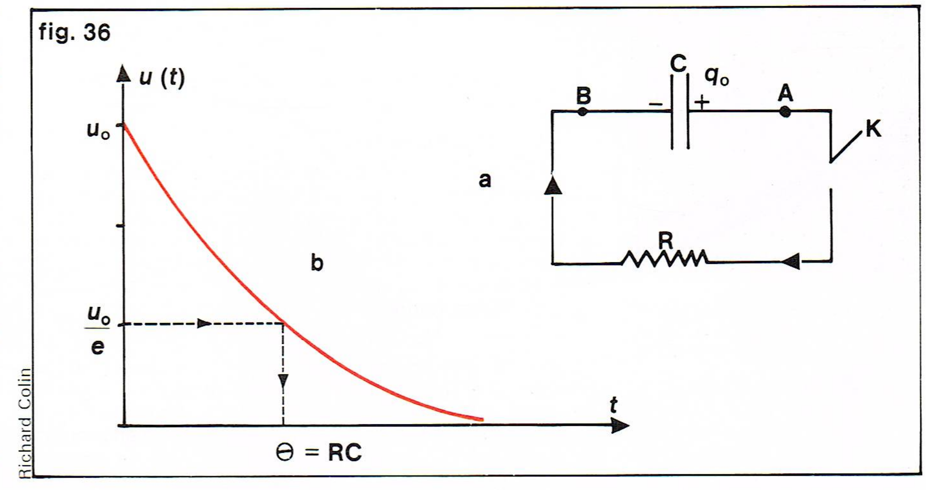
Donc, pendant la décharge, toute l'énergie du condensateur est transformée en chaleur.

Cas de la charge

Le cas de la charge est représenté par la *figure* 37a. Dans ce circuit, on relie les armatures du condensateur par l'intermédiaire d'une résistance R à un générateur de f. é. m. $\mathcal{E}$. Soit $t_0 = 0$ l'instant où l'on ferme l'interrupteur. A l'instant *t*, l'armature A du condensateur a la charge q_0 qui augmente avec le temps : $q = q\,(t)$.

La *tension* entre ses armatures est alors $u = \frac{q}{C}$.





L'*intensité* du courant, variable avec le temps, est alors

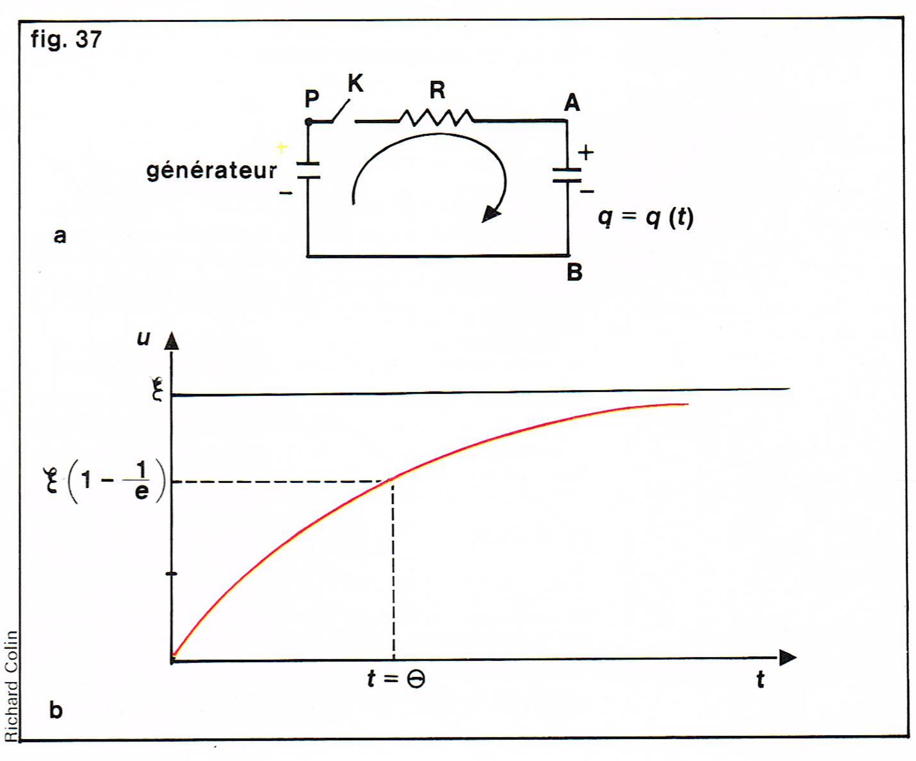
$$I = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt} = \frac{u}{R}$$

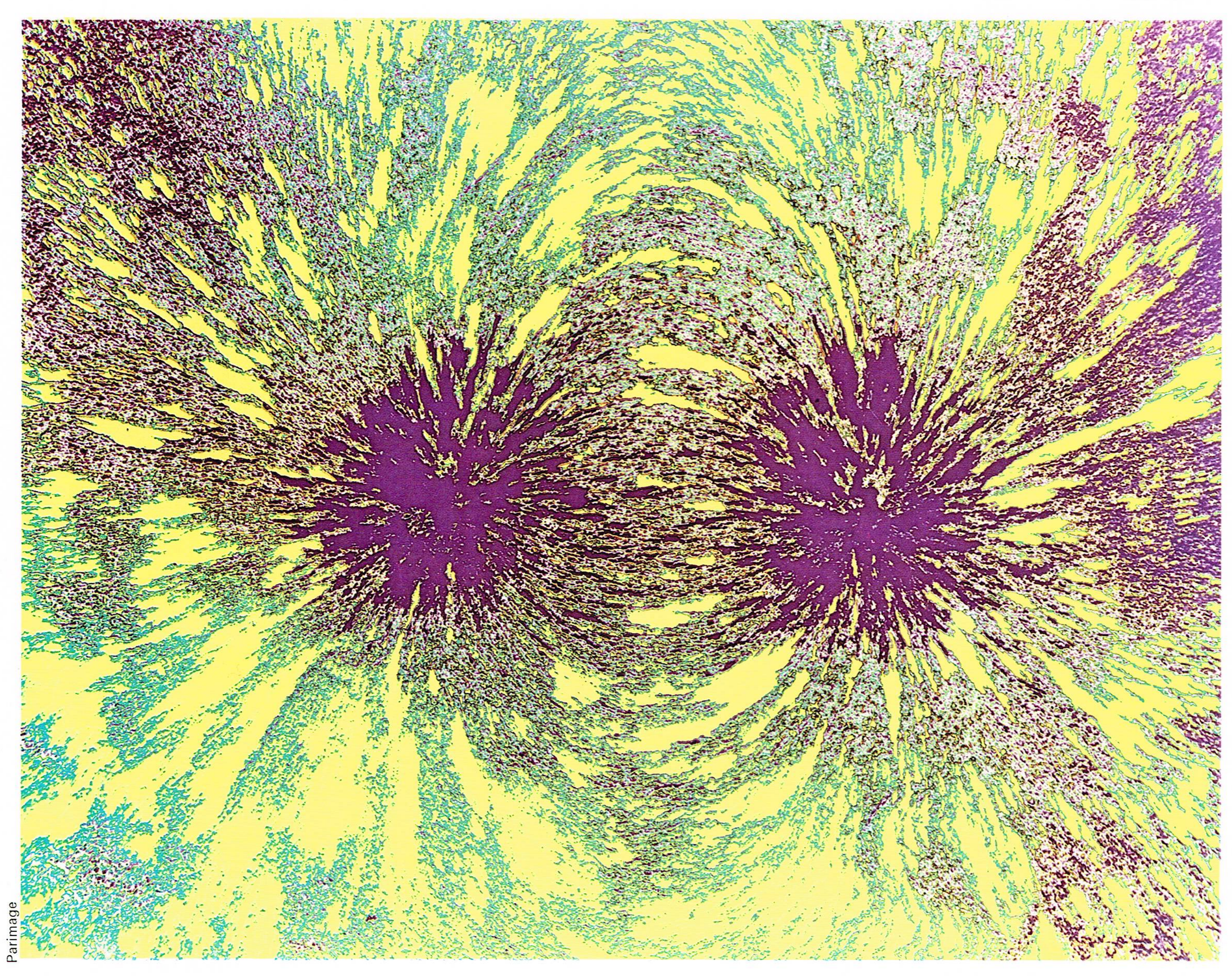
En appliquant la loi d'Ohm au circuit : $\Sigma RI = \Sigma \mathcal{E}$, on obtient la loi concernant $u\,(t)$: $u\,(t) = \mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}}\right)$.

Au bout du temps $\theta = RC$, $u = \mathcal{E}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \sim \frac{2}{3}\,E$.

Au bout de quelques θ, la charge est considérée comme terminée (*fig.* 37b).

▲ *En haut, figure 35 : le théorème de Thevenin permet de remplacer le circuit 35a par le circuit équivalent 35b et ainsi de calculer le courant dans l'impédance Z_r. Ci-dessus, figure 36 : a, décharge d'un condensateur à travers une résistance ; b, la tension u(t) décroît exponentiellement avec la constante de temps RC.*





Parimage

▲ **Spectre magnétique.**

Électromagnétisme

Forces magnétiques

Nous allons d'abord montrer l'existence de forces magnétiques. Soit donc un ensemble de charges que l'on désignera par le terme de « charges agissantes ». En électrostatique, ces charges agissantes sont immobiles et créent en tout point M de l'espace un *champ électrostatique* $\vec{E}_e$. Si nous plaçons en M une charge q_0, elle est soumise à la force $\vec{F} = q_0 \, \vec{E}_e$.

Supposons à présent que les charges agissantes soient en mouvement. Elles créent aussi en tout point M de l'espace un champ que l'on appelle *champ électrique* $\vec{E}$. Si l'on place en M une charge q_0 immobile, cette charge est soumise à la force $\vec{F} = q_0\vec{E}$. Si, toujours dans l'hypothèse des charges agissantes en mouvement, la charge q_0 est également en mouvement, alors cette charge se trouvant en M à l'instant t et ayant à cet instant la vitesse $\vec{V}$ est soumise à une force supplémentaire appelée *force magnétique* $\vec{F}_m$. Cette force magnétique est proportionnelle à q_0 et dépend de sa vitesse $\vec{V}$. Elle est également liée à une certaine déformation de l'espace créée par les charges agissantes en mouvement. Cette déformation de l'espace est caractérisée en tout point par un vecteur $\vec{B}$ appelé *vecteur induction magnétique*. Notons que ce vecteur n'existe en un point de l'espace que si les « charges agissantes » sont en mouvement. La force $\overrightarrow{F_m}$ à laquelle est soumise la charge q_0 est donnée par la relation fondamentale que l'on considère comme un postulat, car il a toujours été vérifié par l'expérience.

$$\overrightarrow{F_m} = kq_0 \, \vec{V} \wedge \vec{B}$$

Dans le système M. K. S. A. : $k = 1$.

Aussi $\overrightarrow{F_m} = q_0 \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$.

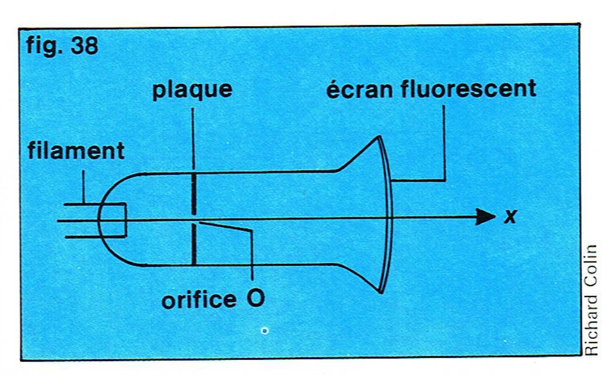
Ainsi la force totale à laquelle est soumise la charge q_0 est :

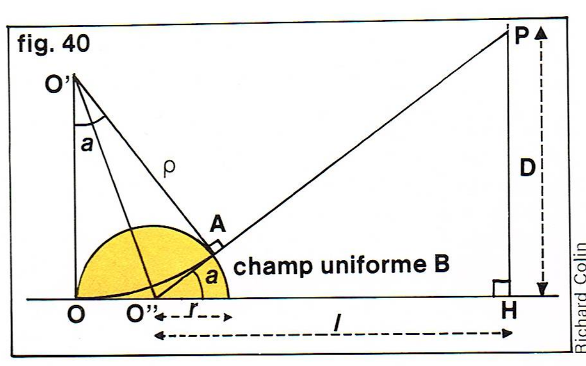
(2) $$\vec{F}_t = q_0 \, (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

Dans le système M. K. S. A., $\vec{F}_t$ s'exprime en coulombs (C), $\vec{B}$ en webers par mètre carré (Wb/m^2) ou teslas (T).

Cette force magnétique peut s'annuler dans trois cas : $\vec{V} = 0$ ou $\vec{B} = 0$, ou encore $\vec{V}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires.

Le premier cas est obtenu quand la charge q_0 est immobile. Le second cas quand ce sont les charges agissantes qui sont immobiles. La relation **(2)** étant une loi fondamentale et générale, il faut à présent déterminer les relations précises qu'il y a entre les champs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et les charges agissantes qui les ont créés. Si les charges agissantes sont animées d'un mouvement quelconque, le problème est très difficile à résoudre. C'est pourquoi nous traiterons le cas, important dans la pratique, de conducteurs immobiles parcourus par un courant I formé par les charges agissantes en mouvement. On supposera que ces conducteurs sont placés dans le vide (ou dans l'air). Dans le cas que nous considérons, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont indépendants du temps.





◀ *A gauche, figure 38 : représentation schématique d'un oscillographe cathodique.*
A droite, figure 40 : trajectoire suivie par l'électron dont le point d'impact sur l'écran fluorescent de l'oscilloscope cathodique est **P**.

On montre aussi que, parce que la vitesse des charges agissantes est faible, la force électrostatique $\vec{F_e}$ est négligeable devant $\vec{F_m}$. Donc seule subsistera la force $\vec{F_m} = q_0\vec{V} \wedge \vec{B}$.

Nous verrons dans un autre chapitre comment calculer $\vec{B}$ lorsque les conducteurs immobiles sont de forme simple. C'est le cas d'un fil rectiligne, d'une spire, d'un solénoïde, etc.

Action d'un champ magnétique sur le mouvement d'une particule - Vérification expérimentale de la relation fondamentale

Soit un oscilloscope cathodique. Succinctement, nous pouvons le décrire comme un tube ayant la forme présentée sur la *figure* 38 et dans lequel on a fait le vide. Un filament émet des électrons par effet thermo-électrique. Ces électrons sont attirés par une plaque munie d'un orifice O et portée à un potentiel positif par rapport au filament.

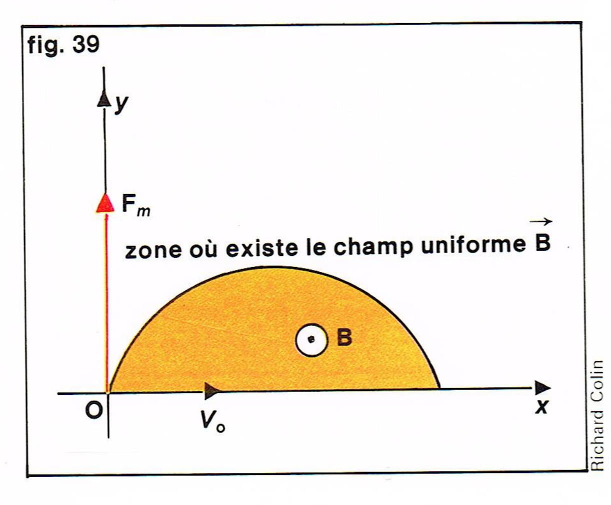
En l'absence de champ, les électrons poursuivent une trajectoire rectiligne, selon l'axe des *x*, et atteignent un écran fluorescent. Leur point d'impact peut donc être visibilisé.

Voyons à présent l'action d'un champ magnétique sur la trajectoire d'un électron.

Si l'on place la partie rectiligne du tube dans un solénoïde, on constate que la trajectoire de l'électron ne subit aucun changement. Cela s'exprime par le fait que $\vec{F_m} = q\vec{V} \wedge \vec{B} = 0$, car alors le champ $\vec{B}$ et la vitesse $\vec{V}$ de l'électron ont la même direction selon O*x*.

Si l'on place à présent la partie rectiligne du tube dans un champ magnétique uniforme, perpendiculaire à O*x* (on peut choisir ce champ magnétique perpendiculaire au plan de la feuille et allant, par exemple, d'arrière vers l'avant, et on emploie ainsi le signe suivant ⊙). On constate alors que la trajectoire de l'électron est déviée selon l'axe O*y*. En effet, à l'instant $t = 0$, avant d'être dévié, l'électron est placé à l'origine des coordonnées O; il a la vitesse V_0 selon l'axe des *x* (*fig.* 39).

A l'instant *t*, il est soumis à la force $\vec{F_m} = e\vec{V} \wedge \vec{B}$. Or $\vec{V}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires; avec l'hypothèse sur $\vec{B}$, on obtient $\vec{F_m}$ dirigée selon O*y* et $F_m = -eVB$. Donc la trajectoire de l'électron restera toujours dans le plan O*xy*. Or, $\vec{F_m}$ étant à tout instant perpendiculaire à $\vec{V}$, la composante tangentielle de F_m selon O*x*, soit F_{mx}, est nulle :



$$F_{mx} = m\,\frac{dV_x}{dt} = 0$$

ce qui entraîne que $V_x = \text{Cte} = V_0$
donc la vitesse se conserve tout au long de la trajectoire de l'électron. Ainsi le module de la force $\vec{F_m}$ sera $|\vec{F_m}| = eV_0B$; d'autre part, puisque l'accélération tangentielle est nulle, l'accélération se confond avec l'accélération normale;

donc $\gamma = \dfrac{V^2}{\rho} = \dfrac{V_0^2}{\rho}$,

ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire de l'électron.

Si, d'autre part, nous désignons par *m* la masse de l'électron, nous obtenons : $F = m\gamma = F_m = eV_0B$.

Ce qui entraîne que $\rho = \dfrac{mV_0}{eB}$; ρ étant une constante, la trajectoire de l'électron est un *cercle*.

Considérons alors la *figure* 40. La trajectoire de l'électron se compose d'un arc de cercle OA dans la région où cet électron est soumis au champ uniforme et d'une droite AP, P étant le point d'impact sur l'écran fluorescent. Soit O' le centre du cercle de rayon ρ, et soit l'angle $\widehat{OO'A}$. Il est égal à l'angle $\widehat{PO''H}$ (O'' étant le centre du cercle délimitant le champ uniforme $\vec{B}$. Son rayon est *r*.)

Appelons *l* la distance O''H et D la déviation PH repérable sur l'écran fluorescent.

$$D = l \operatorname{tg} a\,; \qquad \text{or } \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{r}{\rho}$$

d'autre part $$\operatorname{tg} a = \frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}} = \frac{2\,\frac{r}{\rho}}{1 - \frac{r^2}{\rho^2}} = \frac{2\,\frac{r}{\rho}}{\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2}}$$

$\operatorname{tg} a = \dfrac{2\rho r}{\rho^2 - r^2}$; or, en général, $r \ll \rho$.

Donc $\operatorname{tg} a = \dfrac{2\rho r}{\rho^2} = \dfrac{2r}{\rho}$, ce qui entraîne que $D = \dfrac{2lr}{\rho}$

$$D = \frac{2\,lreB}{mV_0}$$

Nous voyons que la déviation est inversement proportionnelle à la quantité de mouvement mV_0.

On peut aussi examiner cette déviation en fonction de la tension accélératrice des électrons *v*.

$$ev = \frac{1}{2}\,mV_0^2\,; \quad \text{soit : } V_0 = \sqrt{\frac{2\,ev}{m}}$$

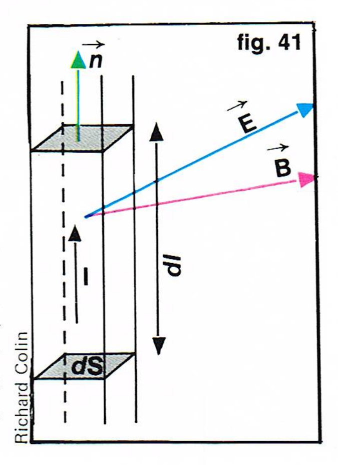
ce qui entraîne que $D = lrB\sqrt{\dfrac{e}{2\,mv}}$

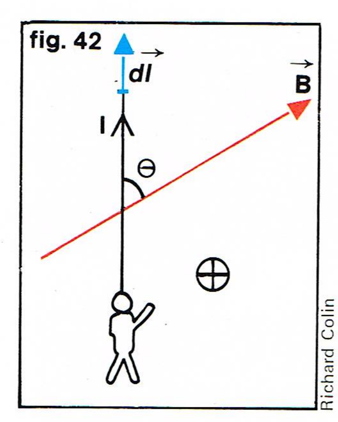
Comme application, nous citerons le principe du cyclotron (Lawrence, 1932).

Forces magnétiques appliquées à un élément de circuit. Loi de Laplace

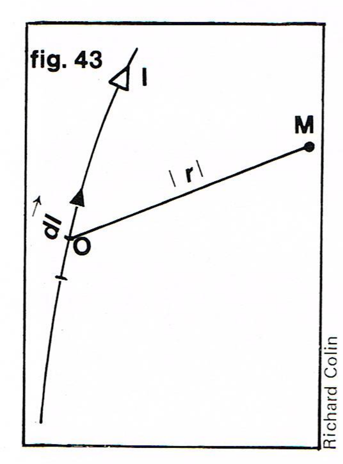
Soit un élément de courant dl (c'est un élément de circuit filiforme de longueur dl), immobile et parcouru par un courant constant I (*fig.* 41). Supposons que cet élément de courant soit soumis à un champ électrique $\vec{E}$ et à un champ magnétique B (créés par des « charges agissantes » extérieures en mouvement).

◀▼ *Figure 39 : si la partie rectiligne du tube cathodique est placée dans un champ magnétique* $\vec{B}$, *perpendiculairement au plan de la feuille, la trajectoire de l'électron est déviée selon l'axe* **Oy**. *Figure 41 ; l'élément de courant* $d\vec{l}$ *est soumis à la force de Laplace :* $d\vec{F_m} = I\,d\vec{l} \wedge \vec{B}$.



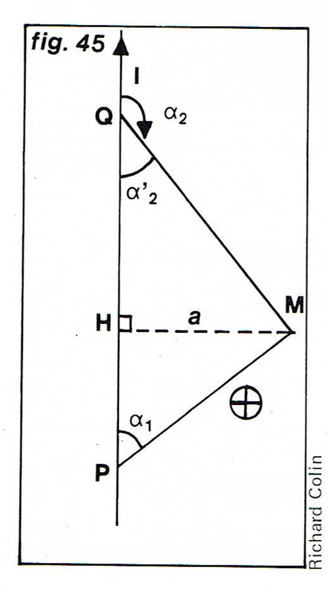


▲ *Figure 42 : la règle du bonhomme d'Ampère.*
▶ *Figure 44 : calcul du champ créé par un fil rectiligne indéfini.*



▲ *Figure 43 : champ magnétique créé par un élément de courant $\vec{dl}$ en un point M situé à une distance $|\vec{r}|$ de $\vec{dl}$.*

▼ *Figure 45 : champ créé par un fil rectiligne de longueur finie.*



L'action du champ électrique $\vec{E}$ sur l'élément dl est nulle. En effet, dans l'élément de courant, il y a autant de charges positives (ions + immobiles) que d'électrons mobiles, ce qui assure la neutralité du corps. Donc il y a création de deux forces égales et opposées qui s'annulent.

L'action du champ magnétique sur l'élément dl se traduit par une force magnétique $\vec{F_m}$ sur chaque charge q.
$\vec{F_m} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$ si $\vec{V}$ est la vitesse de la charge.

Calculons la résultante des forces magnétiques agissant sur les charges contenues dans l'élément dl. dl étant petit, on suppose que le champ est uniforme. La charge contenue dans l'élément dl, de surface de base dS, est : $dq = \rho_v \cdot dS \cdot dl$, ρ_v étant la *densité volumique de charges* :

$$d\vec{F_m} = \rho_v dS \cdot dl\, \vec{V} \wedge \vec{B}$$

$$d\vec{F_m} = dS \cdot dl \cdot \vec{J} \wedge \vec{B} \quad \text{avec } \vec{J} = \rho_v \vec{V}$$

Soit alors le vecteur unitaire $\vec{n}$, normal à la section dS.

$$\vec{dS} = \vec{n} \cdot dS \quad \text{et} \quad \vec{dl} = \vec{n} \cdot dl$$

Ainsi $dS \cdot dl = \vec{dS} \cdot \vec{dl}$

donc $d\vec{F_m} = \vec{dS} \cdot \vec{dl} \cdot \vec{J} \wedge \vec{B}$

Or $\vec{J} \cdot \vec{dS} = I$ étant l'intensité du courant donc

$$d\vec{F_m} = I \cdot \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

Ainsi un élément immobile dl de courant, parcouru par un courant I et soumis à un champ magnétique $\vec{B}$, est soumis à la force de Laplace donnée par l'expression ci-dessus.

Si θ est l'angle que fait l'élément de courant avec le champ, l'expression précédente s'écrit :

$$|d\vec{F_m}| = I \cdot dl \cdot B \sin\theta$$

Si, comme sur la *figure* 42, $\vec{dl}$ et $\vec{B}$ sont dans le plan de la feuille, alors $d\vec{F_m}$ sera orienté de l'avant vers l'arrière de la feuille (notation ⊕).

Notons que, pour connaître le sens de $d\vec{F_m}$, on peut utiliser la **règle du bonhomme d'Ampère** : *le courant entre par les pieds et sort par la tête du bonhomme qui regarde dans la direction de $\vec{B}$. Le sens de $d\vec{F_m}$ est indiqué par le bras gauche tendu.*

Champ d'induction magnétique créé par les courants

Comme nous l'avons déjà dit dans un chapitre précédent, nous allons maintenant calculer le champ magnétique $\vec{B}$ créé par des circuits immobiles traversés par un courant continu I, et placés dans le vide.

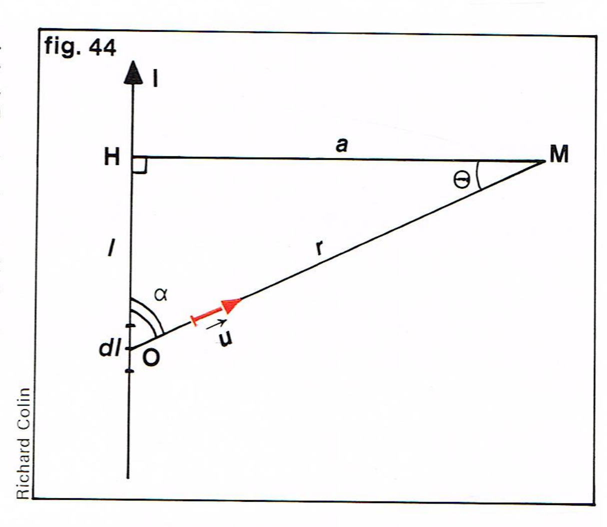
C'est la **loi de Biot-Savart** qui va permettre de calculer le champ $\vec{B}$ créé par de tels circuits. Pour faire ce calcul, considérons donc un circuit filiforme (*fig.* 43) traversé par un courant I. On décompose ce circuit en « éléments de courant » $\vec{dl}$, vecteurs dont le sens est celui du courant I. Chaque élément de courant $\vec{dl}$ apporte en tout point M de l'espace une contribution $d\vec{B}$ au champ total $\vec{B}$. Le champ $\vec{B}$ est alors égal à la somme des contributions de tous les « éléments de courant » tels que $\vec{dl}$. La loi de Biot-Savart établit la relation entre $\vec{dl}$ et $d\vec{B}$ en un point M situé à la distance $|\vec{OM}| = |\vec{r}|$ de O, milieu de l'élément $\vec{dl}$. Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par $\vec{OM}$ et α l'angle entre $\vec{dl}$ et $\vec{u}$. La relation vectorielle est la suivante :

$$d\vec{B} = k \frac{I}{r^2} \vec{dl} \wedge \vec{u}$$

et, sous forme rationalisée (M. K. S. A.), $k = \dfrac{\mu_0}{4\pi}$

la formule devient :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \vec{dl} \wedge \vec{u} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin\alpha$$



Le vecteur $d\vec{B}$ est donc perpendiculaire au plan défini par les vecteurs $\vec{dl}$ et $\vec{u}$. Son sens est donné par la règle du produit vectoriel, ou encore par la règle du bonhomme d'Ampère. Sur la *figure* 43, le sens de $d\vec{B}$ est d'avant vers l'arrière (⊕).

Dans le système M. K. S. A., rappelons que $d\vec{B}$ s'exprime en weber par mètre carré (Wb/m^2) ou encore en tesla (T). La valeur de μ_0 dans ce système est :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

Ainsi : $d\vec{B} = \dfrac{10^{-7}}{r^2} I \cdot \vec{dl} \wedge \vec{u}$

Calcul du champ d'induction créé par quelques circuits simples

Champ créé par un fil rectiligne (*fig.* 44)
Nous voyons sur cette figure que :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \vec{dl} \wedge \vec{u}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \cos\theta$$

Exprimons dl et r en fonction de θ : $l = OH = a \operatorname{tg}\theta$

comme $l = OH = a \operatorname{tg}\theta$ et $r = \dfrac{a}{\cos\theta}$

on obtient : $dB = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos\theta\, d\theta$

or $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ donc $d\theta = -d\alpha$

aussi $dB = -\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin\alpha\, d\alpha$, dont la valeur absolue est

$$dB = +\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin\alpha\, d\alpha$$

Dans le cas d'un *fil de longueur finie* (*fig.* 45), il crée en M le champ B :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha\, d\alpha$$

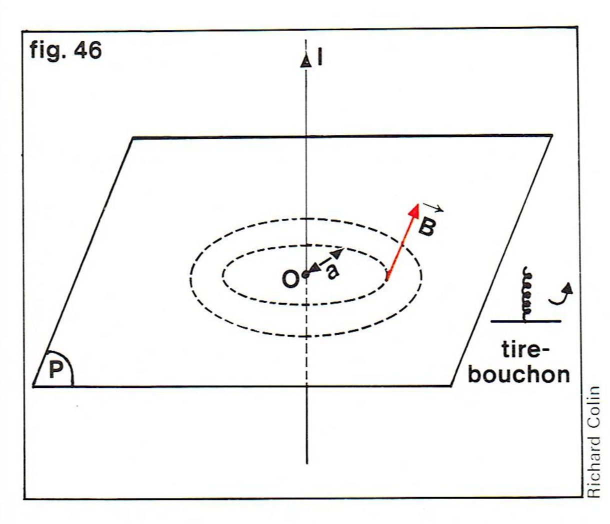
α_1 et α_2 étant les limites d'intégration, soit :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

Si l'on introduit l'angle α_2' qui est l'angle supplémentaire de α_2, on a : $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2')$

Si le *fil est infiniment long*, on peut dire que le point M se rapproche infiniment du fil.

α_1 tend vers 0 et α_2 tend vers π,



Calculons la contribution dB d'un élément dl de centre O de cette spire :

soit $OM = \rho$; $O'M = d$ et $O'O = R$.

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$ et θ l'angle $(\widehat{O'MO})$.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho^2} d\vec{l} \wedge \vec{u}$$

Or dl est perpendiculaire à $\vec{u}$, donc : $dB = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi\rho^2} dl$

D'autre part, par définition du produit vectoriel, dB est perpendiculaire à OM. Donc $dB_z = dB \sin\theta$.

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho^2} dl \sin\theta$$

Comme $\rho = \dfrac{R}{\sin\theta}$, on obtient $dB_z = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \sin^3\theta \, dl$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \sin^3\theta \int_0^{2\pi} dl = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\sin^3\theta}{R}$$

◄ *Figure 46 : l'ensemble des lignes de champ forme une famille de cercles concentriques. En chaque point, $\vec{B}$ est tangent à l'un de ces cercles.*

ce qui entraine que $|\vec{B}| = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot 2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

Remarque : dans le cas de la *figure* 45, le champ $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la feuille va de l'avant vers l'arrière (⊕).

Si nous prenons un fil vertical indéfini, parcouru par un courant I, et que nous le coupions par un plan horizontal (P), alors tous les points situés dans ce plan, à une distance a du point O (point de contact entre le fil et le plan), seront soumis au même vecteur d'induction

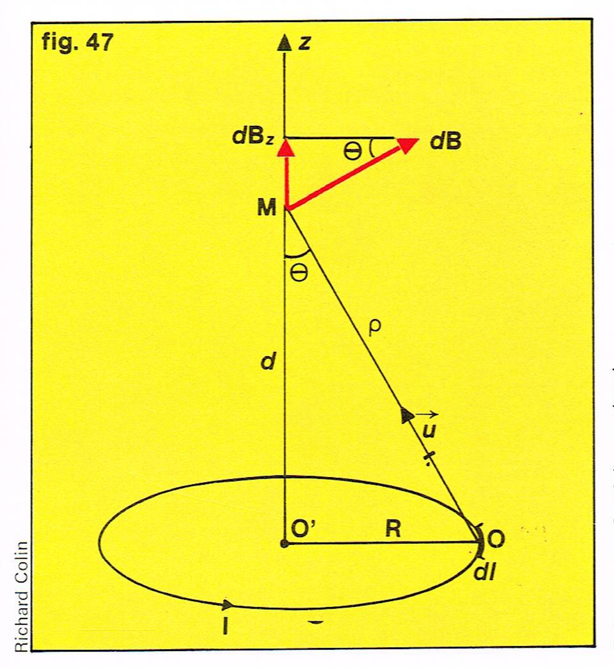
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

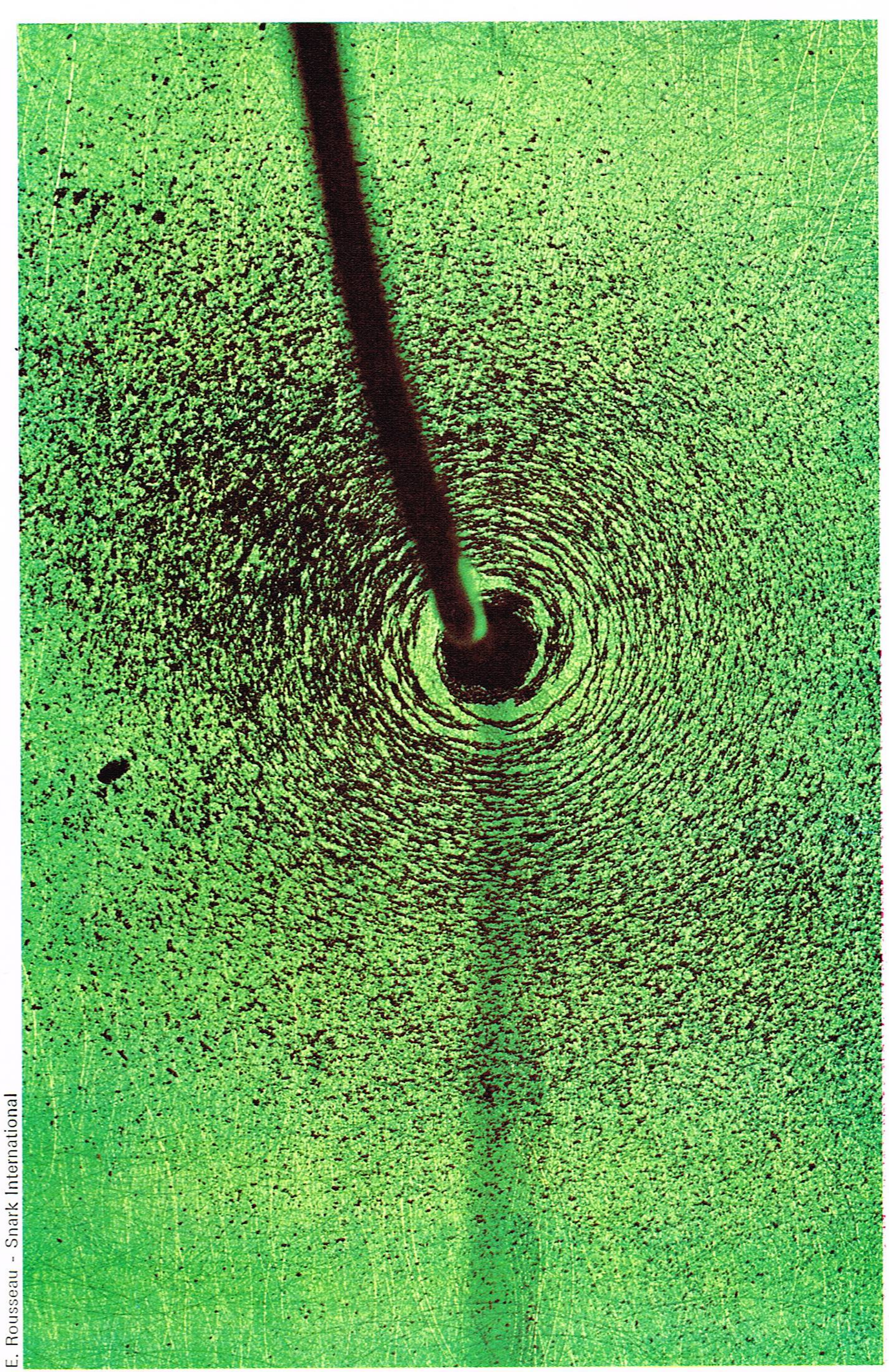
Le lieu de ces points est donc un cercle de centre O et de rayon a. Le champ $\vec{B}$ est tangent à ce cercle que l'on appelle *ligne de champ* (*fig.* 46). L'ensemble des « lignes de champ » forme une famille de cercles concentriques. Le sens de $\vec{B}$ qui est également celui des lignes de champ est donné, par exemple, par la **règle du tire-bouchon :** *c'est le sens donné par la rotation d'un tire-bouchon allant dans le sens de I.*

Calcul du champ d'induction créé par une spire circulaire

Soit une spire circulaire parcourue par un courant I dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (*fig.* 47).

Nous allons calculer le champ $\vec{B}$ créé par cette spire en un point M de l'axe O'z. Par raison de symétrie, le champ $\vec{B}$ sera porté par cet axe.





◄▼ *A gauche, figure 47 : champ magnétique créé par une spire en un point M de son axe O'z. A droite, champ d'induction magnétique d'un fil conducteur, visualisé à l'aide de limaille de fer.*

E. Rousseau - Snark International

▲ ***Visualisation du champ magnétique créé par un solénoïde.***

$$\text{car} \int_0^{2\pi} dl = 2\,\pi R$$

On peut exprimer également B_z en fonction de données connues, c'est-à-dire R et *d*.

On a :
$$\sin\theta = \frac{R}{\rho} = \frac{R}{(R^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}}$$

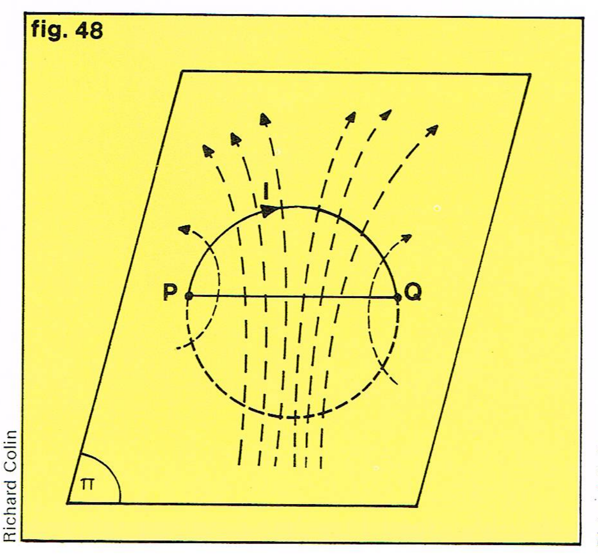
$$B_z = \frac{\mu_0 I R^3}{2\,R\,(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{R^2}{(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

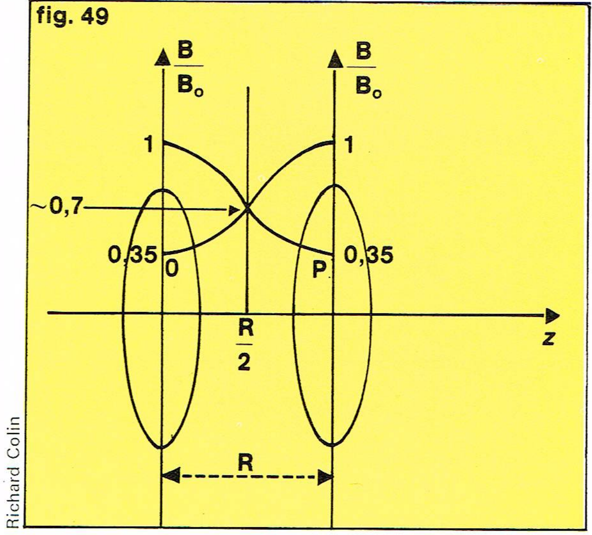
Nous remarquons que B_z a le sens positif de O_z (règle du tire-bouchon). Nous remarquons aussi que, si le point M se rapproche du centre de la spire, cela correspond à θ tendant vers $\frac{\pi}{2}$.

Aussi, le champ créé par une spire en son centre O′ est :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\,R}$$

Les lignes de champ créées par une spire circulaire parcourue par un courant I peuvent être matérialisées par de la limaille de fer. En effet, soit la *figure* 48, constituée par une spire circulaire coupée en son diamètre par un plan (π), sur lequel on a saupoudré de la limaille de fer. Lorsque le courant passe, par exemple de P vers Q, on constate que les lignes de champ sont « dessinées » par la limaille de fer. En chaque point de ces lignes, $\vec{B}$ est tangent. La face « sud » est la face par laquelle entrent les lignes de champ, et la face « nord » celle par laquelle elles sortent. Notons qu'il est possible d'obtenir un champ à peu près





► ***A gauche, figure 48 : lignes de champ créées par une spire circulaire. A droite, figure 49 : rapport*** $\frac{B}{B_0}$ ***pour chaque spire en fonction de la distance des deux spires séparées par*** R.

constant sur une certaine distance, entre deux spires de même rayon et parcourues par le même courant dans le même sens.

Considérons en effet la *figure* 49, constituée de deux spires séparées par la distance R. Un calcul simple montre qu'une spire circulaire crée en un point P situé sur son axe à une distance R de son centre un champ

$$B = 0{,}35 \frac{\mu_0 I}{2\,R} = 0{,}35\ B_0$$

Donc, à une distance R de O, on a : $\frac{B}{B_0} = 0{,}35$.

Nous voyons aussi sur cette figure le rapport $\frac{B}{B_0}$ pour chaque spire, en fonction de la distance des deux spires séparées par R. Les champs créés en chaque point s'additionnent, puisque les spires sont parcourues par les courants, dans le même sens. Nous constatons que le rapport $\frac{B}{B_0}$ est à peu près constant sur une petite distance autour de $\frac{R}{2}$ (notons qu'à la distance $\frac{R}{2}$ de chaque spire le rapport $\frac{B}{B_0}$ est un peu différent de 0,7).

Calcul du champ d'induction créé par un solénoïde en un point de son axe

Un solénoïde est une bobine cylindrique dont les spires sont serrées et régulièrement espacées. Soit n le nombre de spires par unité de longueur. Soit également un axe Ox passant par le centre du solénoïde (*fig.* 50a) dont le rayon est R. Pour calculer le champ créé par ce solénoïde en un point M de cet axe, nous devons considérer deux cas, selon que M est à l'extérieur ou à l'intérieur du solénoïde.

Si nous prenons un élément de longueur dx de ce solénoïde, il contient $n\,dx$ spires.

Considérons d'abord le *point M à l'extérieur du solénoïde.*

La spire S crée en ce point le champ :

$$dB_\theta = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\sin^3\theta}{R}$$

θ étant l'angle sous lequel on voit du point M la spire S.

La contribution dB créée par les $n\,dx$ spires, au champ B, est :

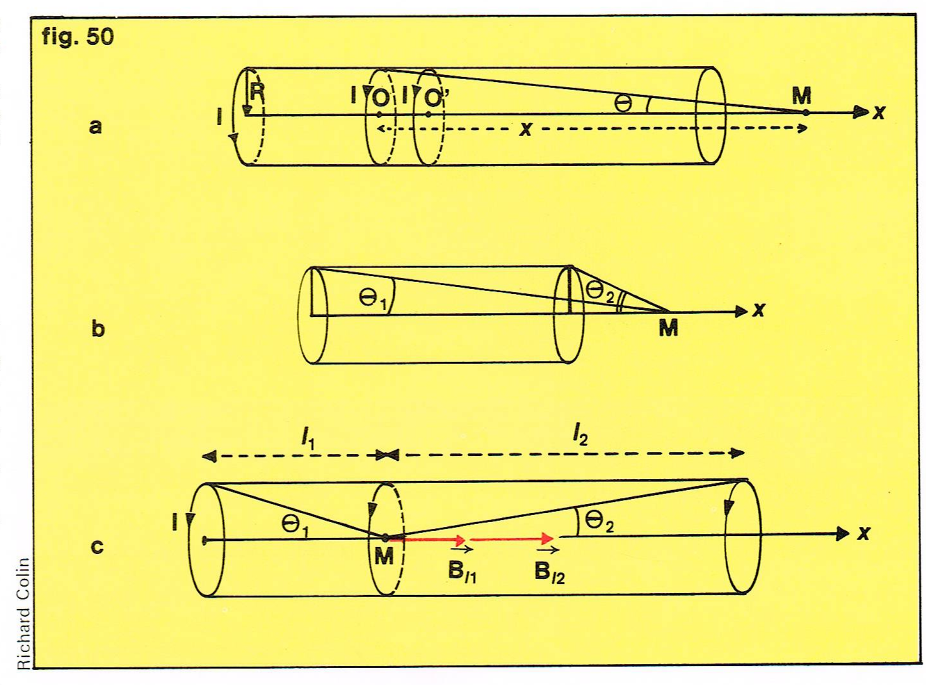
$$dB_\theta = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\sin^3\theta}{R} n dx$$

Exprimons dx en fonction de $d\theta$:

$$\frac{R}{x} = \operatorname{tg}\theta;\ x = \frac{R}{\operatorname{tg}\theta};\ \text{donc } dx = \frac{-R}{\operatorname{tg}^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{R\,d\theta}{\sin^2\theta}$$

ce qui entraîne la valeur de dB :

$$dB = \frac{-n\mu_0 I}{2} \sin\theta\, d\theta$$



Richard Colin

Physiquement, c'est la valeur absolue $+\frac{n\mu_0 I}{2} \sin\theta d\theta$ qui est valable. Si nous considérons alors les angles limites du solénoïde (angles sous lesquels on voit les deux extrémités du solénoïde), alors on peut intégrer dB et ainsi calculer le champ créé par tout le solénoïde en M (*fig.* 50b).

$$B = \frac{n\mu_0 I}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{n\mu_0 I}{2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

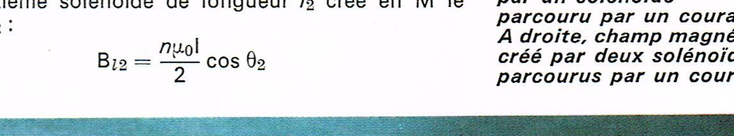
Si le point M se trouve sur la dernière spire du solénoïde, alors l'angle θ_2 tend vers $\frac{\pi}{2}$ et $\cos\theta_2$ tend vers 0.

Alors $B = \frac{n\mu_0 I}{2} \cos\theta_1 = B_l$

Le second cas envisageable est lorsque le *point M se trouve à l'intérieur du solénoïde* (*fig.* 50c). On peut alors considérer que l'on a affaire à deux solénoïdes l_1 et l_2 mis côte à côte. Le premier solénoïde de longueur l_1 crée en M le champ B_{l1} :

$$B_{l1} = \frac{n\mu_0 I}{2} \cos\theta_1$$

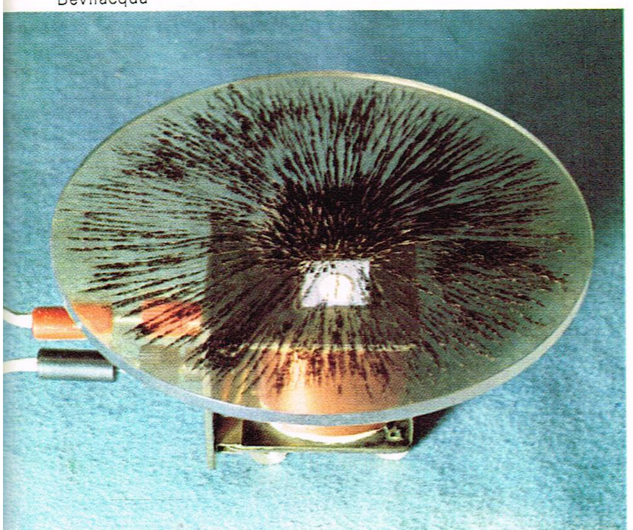
Le deuxième solénoïde de longueur l_2 crée en M le champ B_{l2} :



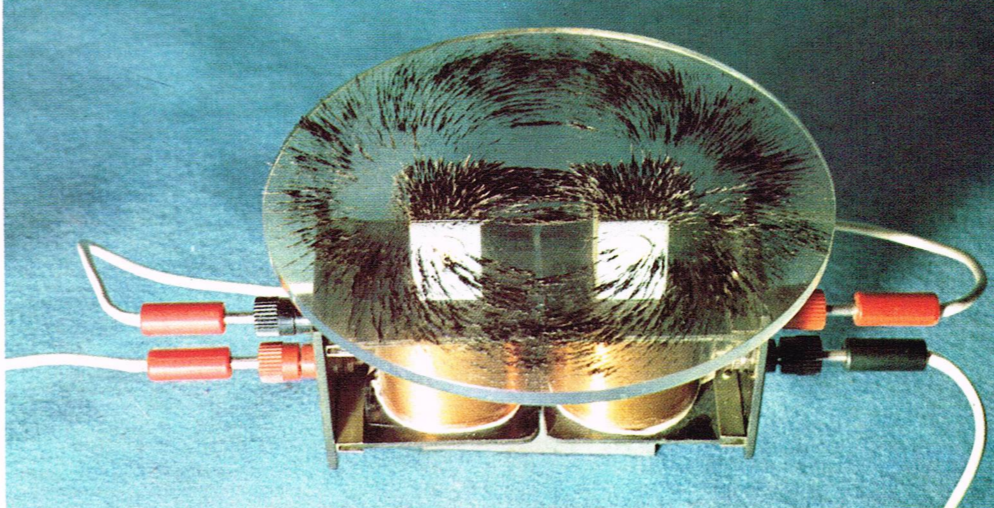
$$B_{l2} = \frac{n\mu_0 I}{2} \cos\theta_2$$

▲ ***Figure 50 :*** *a,* ***schéma d'un solénoïde (un élément dx de ce solénoïde contient ndx spires) ;***
b, ***champ créé par un solénoïde en un point*** M ***situé sur son axe et à l'extérieur du solénoïde ;***
c, ***champ créé par un solénoïde en un point*** M ***situé sur son axe et à l'intérieur du solénoïde.***

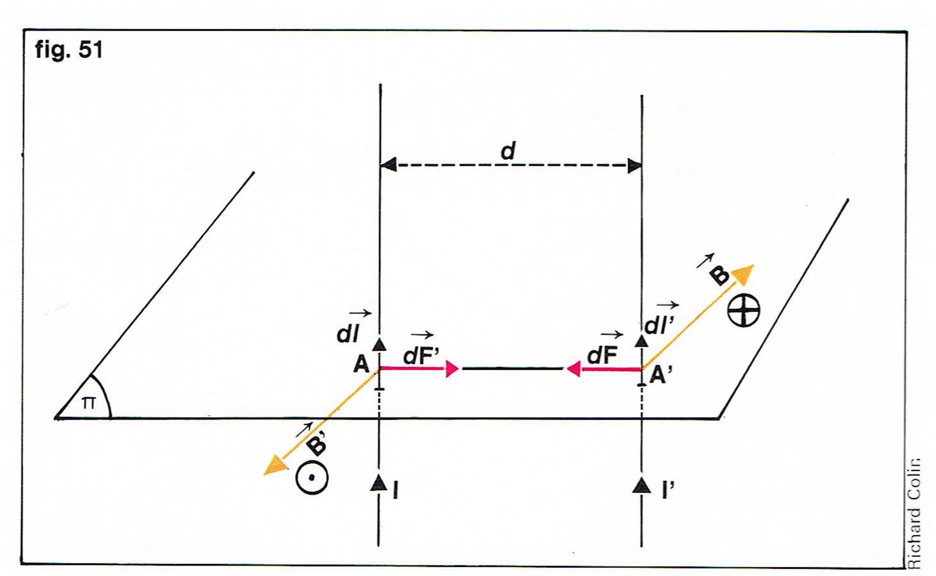




Bevilacqua



▼ ***A gauche, champ magnétique créé par un solénoïde parcouru par un courant. A droite, champ magnétique créé par deux solénoïdes parcourus par un courant.***



▲ *Figure 51 : interaction entre deux fils conducteurs parallèles.*

Ces deux champs sont dirigés dans le même sens, puisque le courant dans les spires a le même sens. D'autre part, d'après la *figure* 50c, $|\vec{B}_{l2}|$ est supérieur à $|\vec{B}_{l1}|$, puisque l_2 est plus long que l_1.

Le champ total en M est

$$B = B_{l2} + B_{l1} = \frac{n\mu_0 I}{2} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

Si le solénoïde est très long, les angles θ_1 et θ_2 tendent chacun vers 0. Alors $B = \frac{n\mu_0 I}{2} \times 2 = n\mu_0 I$.

Ce champ est uniforme, comme on peut le constater.

Dans le système M. K. S. A., n s'exprime en nombre de spires par mètre et I en ampères.

Interaction entre deux fils conducteurs parallèles

Soit deux fils conducteurs parallèles distants de d et parcourus par du courant dans le même sens. Le premier est parcouru par le courant I et le second par le courant I' (*fig.* 51). Soit un plan (π) coupant perpendiculairement les deux fils respectivement en A et A'.

Le courant I crée dans le plan (π) en A' (à une distance d de A) le champ $\vec{B}$ dont le module est :

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

et dont la direction est de l'avant vers l'arrière du plan de la feuille (notation ⊕). Donc l'élément de courant centré sur A' et de longueur dl' est soumis à la force de Laplace :

$$d\vec{F} = I'\vec{dl'} \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} II' \frac{\vec{dl'}}{d} = \frac{\mu_0}{2\pi} II' \frac{\vec{dl}}{d}$$

(car on peut choisir $\vec{dl'} = \vec{dl}$).

Cette force, dans le cas de la figure, est dirigée de A' vers A.

Intéressons-nous à présent au fil parcouru par le courant I'. Ce fil crée en A le champ $|\vec{B'}| = \frac{\mu_0 I'}{2\pi d}$

Ce champ est dirigé vers l'avant de la feuille (notation ⊙). A ce champ, il correspond la force de Laplace :

$$d\vec{F'} = I\vec{dl} \wedge \vec{B'}$$

$$d\vec{F'} = \frac{\mu_0}{2\pi} II' \frac{\vec{dl}}{d}$$

Nous constatons que les deux forces $d\vec{F}$ et $d\vec{F'}$ sont égales et de sens opposé, ce qui était prévisible d'après la loi générale en physique du principe de l'action et de la réaction. Nous voyons également que les deux forces sont attractives, car nous avons choisi les courants dans le même sens. Ces deux forces seraient de même répulsives si les courants avaient été choisis en sens inverse.

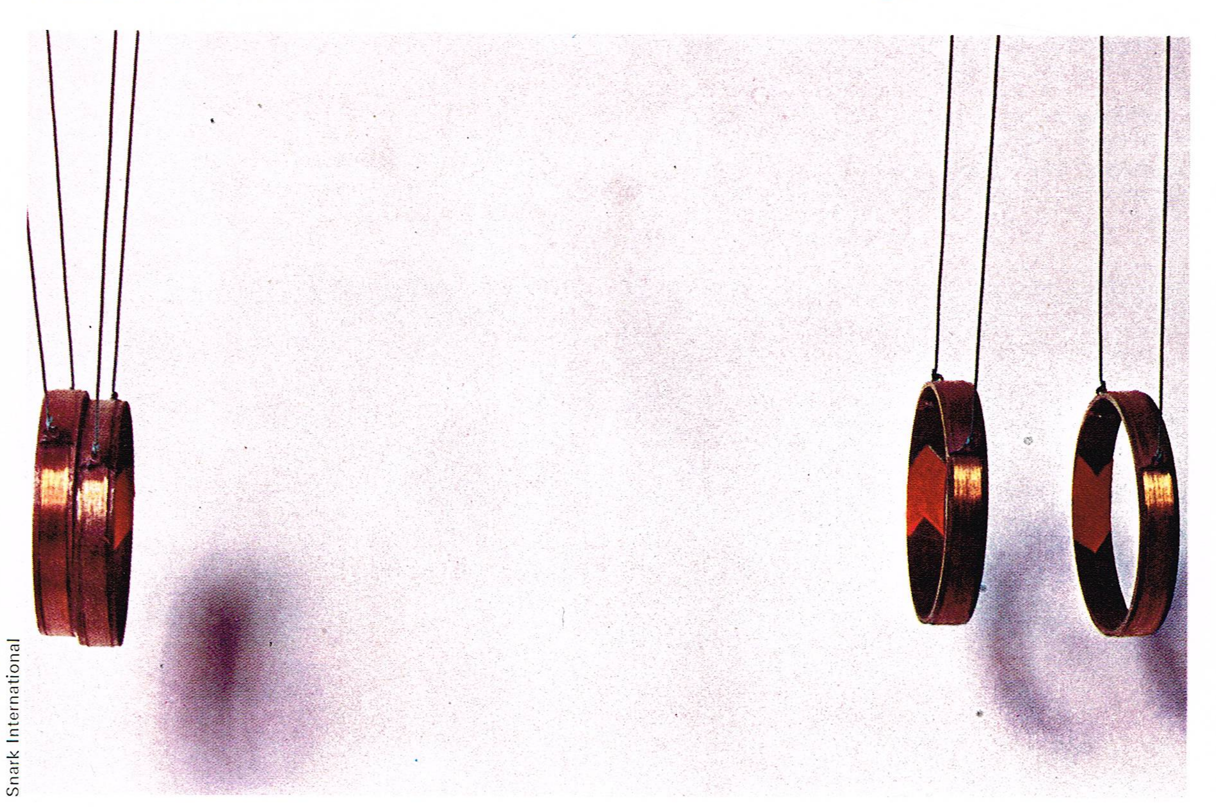
Définition de l'ampère

A partir d'une des deux relations précédentes, on peut donner la définition légale de l'ampère. *L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu entre deux conducteurs parallèles, indéfinis et séparés par une distance de 1 mètre dans le vide, produit une force attractive ou répulsive égale à $2 \cdot 10^{-7}$ newton par mètre de longueur*; cela dans le système M. K. S. A. En effet, dans ce système :

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$$

En posant $\vec{dl} = 1$ m, $d = 1$ m, $I = I' = 1$ A,

on obtient bien $d\vec{F} = 4 \frac{\pi 10^{-7}}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7}$ newton/mètre.



▶ *Bobines circulaires s'attirant ou se repoussant selon que les courants passent dans le même sens (les deux bobines de gauche) ou en sens inverse (les deux bobines de droite).*

Snark International

Théorème d'Ampère

Soit un fil rectiligne parcouru par un courant I, et soit un plan (π) coupant ce fil perpendiculairement (*fig.* 52). Considérons également un point M du plan (π). On peut définir ce point par ses coordonnées (r, θ). En ce point M, le fil parcouru par I crée le champ $\vec{B}$ qui se trouve donc dans le plan (π). Le module de $\vec{B}$ est donné par :

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Son sens est indiqué sur la *figure* 52. Les composantes de $\vec{B}$ selon θ et r sont telles que : $\vec{B} = B_r\vec{u}_r + B_\theta\vec{u}_\theta$.

Soit alors un déplacement de M dans le plan (π) (M vient en M′).

Les composantes de $\overrightarrow{MM'} = d\vec{M}$ sont telles que :

$$d\vec{M} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$

Le travail élémentaire de $\vec{B}$ lors de ce déplacement élémentaire est :

$$dW = \vec{B} \cdot d\vec{M} = B_r\,dr + B_\theta r\,d\theta$$

et dans le cas envisagé, la composante radiale de $\vec{B}$, soit B_r, est nulle, donc $dW = B_\theta r\,d\theta = |\vec{B}|\,r\,d\theta$.

Ainsi : $$dW = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,d\theta$$

Considérons alors une courbe plane Γ, située dans le plan (π). Le travail de $\vec{B}$ le long de cette courbe est donné par l'expression :

$$W = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_\Gamma d\theta$$

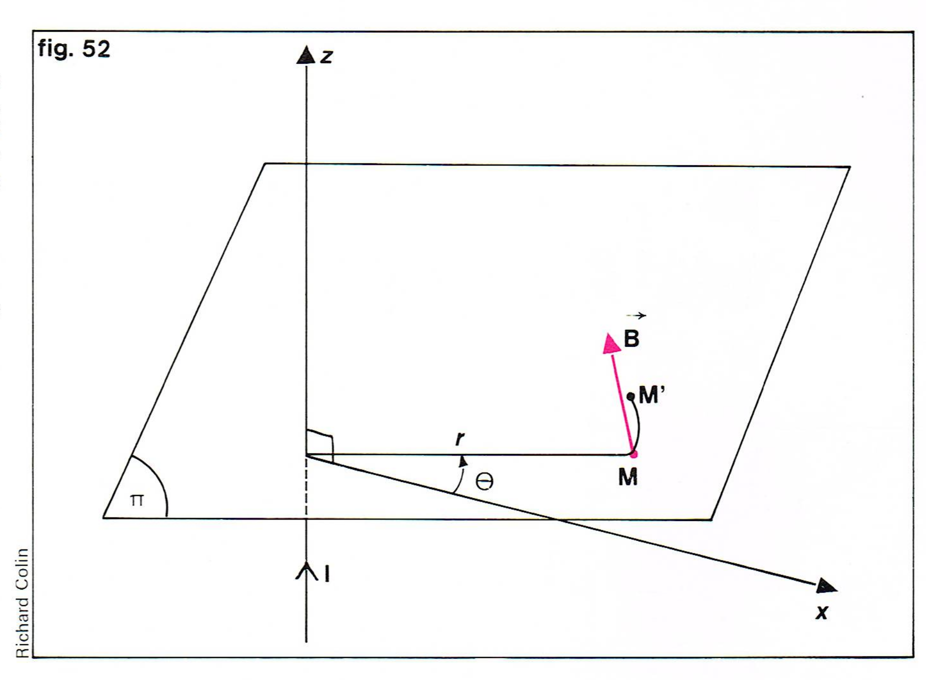
Il faut à présent envisager les cas où la courbe enlace ou n'enlace pas le fil (*fig.* 53).

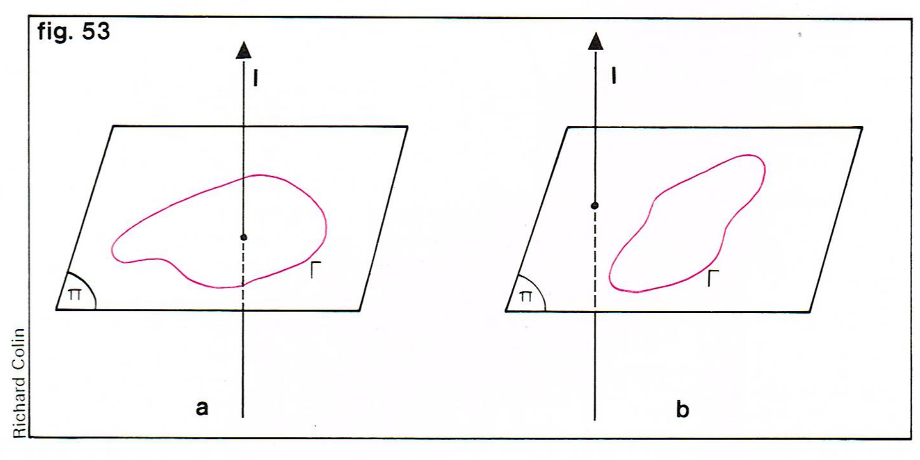
Dans le premier cas $\oint_\Gamma d\theta = 2\pi$

Dans le second cas $\oint_\Gamma d\theta = 0$

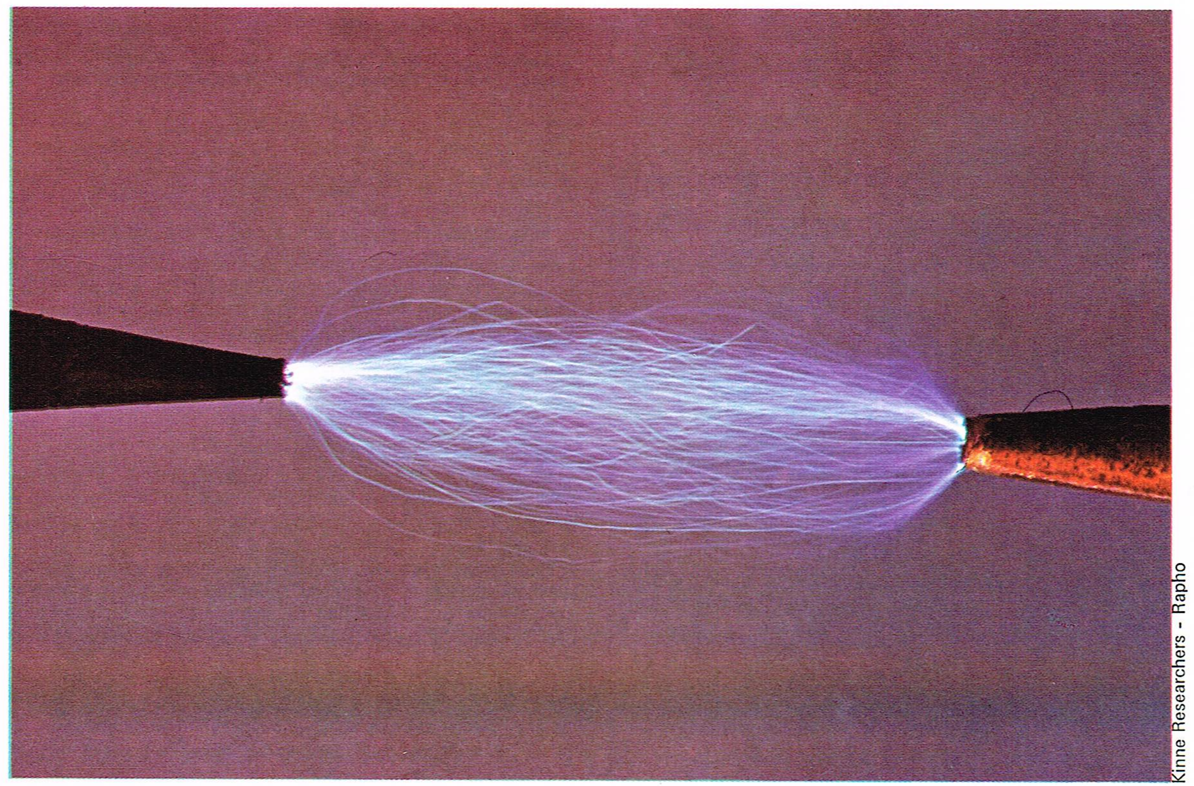
Dans le cas où la courbe enlace le fil : $W = \mu_0 I$.

Comme $W = \oint_\Gamma dW = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l}$





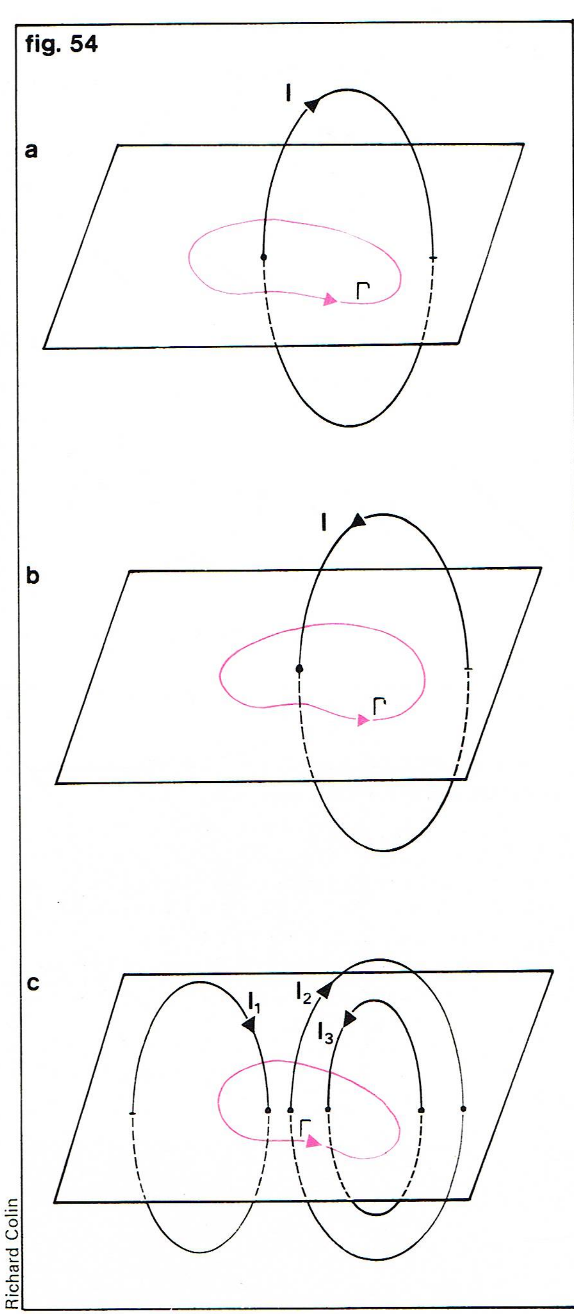
▲ *En haut, figure 52 : travail élémentaire dW du champ $\vec{B}$ lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{M} = \overrightarrow{MM'}$.*
Ci-dessus, figure 53 :
a, la courbe Γ enlace le fil où passe le courant I ;
b, la courbe Γ n'enlace pas le fil où passe le courant I.



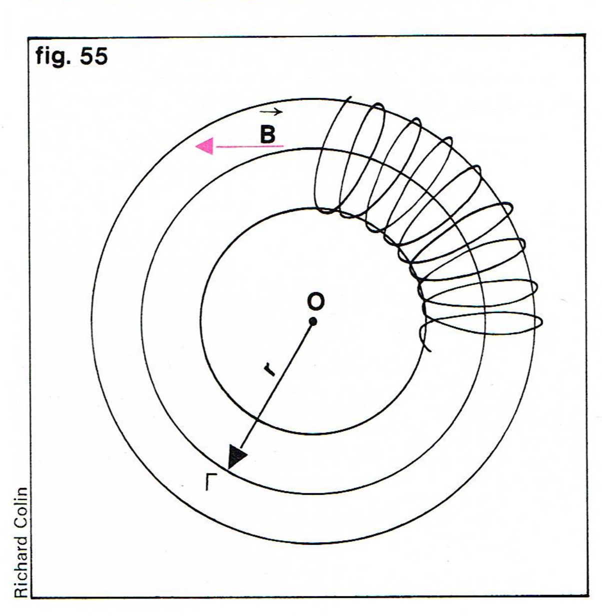
◀ *Arc électrique.*



▲ *Le physicien et mathématicien français André-Marie Ampère (1775-1836).*



▶ ***Figure 54 :*** *a, lorsqu'on parcourt Γ, le sens du courant est celui de la progression d'un tire-bouchon; b, lorsqu'on parcourt Γ, le sens du courant est celui de la progression inverse d'un tire-bouchon; c, généralisation du théorème d'Ampère dans le cas où plusieurs courants enlacent la courbe Γ.*



▶ ***Figure 55 :*** *calcul du champ $\vec{B}$ dans une bobine torique.*

on aboutit donc à l'égalité $\mu_0 I = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{dl}$

Dans le cas où la courbe n'enlace pas le fil : W = 0.

La première expression $\mu_0 I = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{dl}$ peut être simplifiée. En effet, nous verrons dans le chapitre concernant les milieux aimantés que l'on définit un vecteur $\vec{H}$ appelé *champ magnétique*. Dans ces milieux aimantés, $\vec{B}$ et $\vec{H}$ ne sont pas toujours proportionnels. Ils ne le sont que dans les substances linéaires, homogènes, isotropes (l. h. i.).

Par contre, dans le vide, ces deux vecteurs sont proportionnels et sont liés par la relation $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Ainsi, dans le vide, le théorème d'Ampère se simplifie et s'écrit simplement : $\oint_\Gamma \vec{H} \cdot \vec{dl} = I$.

Cela pour un courant I enlacé par la courbe Γ.

Dans le cas où plusieurs courants enlacent la courbe (Γ), le théorème d'Ampère peut alors se généraliser à condition de compter positivement un courant tel que, si l'on parcourt la courbe, le sens du courant est celui de la progression d'un tire-bouchon.

Ainsi, dans le cas de la *figure* 54a, on obtient :

$$\oint_\Gamma \vec{H} \cdot \vec{dl} = I$$

Par contre, dans le cas de la *figure* 54b, on obtient :

$$\oint_\Gamma \vec{H} \cdot \vec{dl} = -I$$

Si plusieurs courants sont enlacés par la courbe Γ, alors le travail de $\vec{H}$ le long de la courbe Γ est égal à la somme algébrique de tous les courants enlacés par cette courbe. Par exemple, dans la *figure* 54c, on a :

$$\oint_\Gamma \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_2 - I_1 - I_3$$

De même, une bobine plate formée de N spires et parcourue par un courant I est telle que $\oint_\Gamma \vec{H} \cdot \vec{dl} = NI$.

Application du théorème d'Ampère

Une application importante du théorème d'Ampère est celle qui permet le calcul de $\vec{B}$ dans une bobine torique contenant N spires. Soit donc cette bobine représentée par la *figure* 55. Elle est formée d'une couronne autour de laquelle est bobiné un fil. Par raison de symétrie, les lignes de champ sont des cercles concentriques de centre O. Calculons le champ $\vec{B}$ (dans le vide) situé à une distance *r* de O. Le théorème d'Ampère permet d'écrire :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = N\mu_0 I = 2\pi r |\vec{B}|$$

d'où
$$|\vec{B}| = \frac{N\mu_0 I}{2\pi r}$$

Si le rayon *r* de ce tore est grand devant son épaisseur, c'est-à-dire devant le rayon d'une spire, alors le champ $\vec{B}$ est pratiquement constant à l'intérieur du tore; c'est-à-dire que, si nous effectuons une section droite de ce tore, le champ à l'intérieur de cette section droite est constant.

Dans ce cas, le rapport $\frac{N}{2\pi r}$ représente le nombre *n* de spires par unité de longueur de ce tore, et $\vec{B}$ devient :

$$\vec{B} = n\mu_0 \vec{I}$$

Nous remarquons que c'est le résultat trouvé pour un solénoïde indéfini que l'on peut considérer comme un tore dont le rayon *r* est infini, donc qui répond bien à l'hypothèse que *r* est grand devant le rayon des spires.

Remarquons que le théorème d'Ampère permet également de retrouver facilement le champ créé à une distance donnée par un fil indéfini parcouru par un courant I. A une distance *a* de O, le champ B est constant par raison de symétrie.

Ainsi $\oint_{cercle} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I$

$B \cdot 2\pi a = \mu_0 I$, ce qui entraîne $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

Relation de Maxwell-Ampère

Soit $\vec{J}$ la *densité de courant* en un point quelconque de l'espace. Soit (C) une courbe quelconque et (S) une surface quelconque s'appuyant sur (C). Le courant I traversant (S) est :

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Or, d'après le théorème d'Ampère, on a la relation :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

d'autre part $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$

Cette dernière relation entraîne que

(3) $$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{H} = \vec{J}$$

Elle montre que $\vec{H}$ ne dérive pas d'un potentiel, sinon son rotationnel serait nul. Cette relation est celle de Maxwell-Ampère.

Expression du potentiel vecteur $\vec{A}$

On peut voir sur des exemples simples, comme celui d'un courant rectiligne, que le flux du vecteur $\vec{B}$ est conservatif (le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul).

Cela se traduit mathématiquement par l'expression :

(4) $$\text{div}\, \vec{B} = 0$$

Cette expression se généralise pour le champ $\vec{B}$ créé par des courants quelconques. Son flux est conservatif. Or dire que div $\vec{B} = 0$ revient à dire que, à la traversée de deux milieux d'indices 1 et 2, la composante normale de $\vec{B}$ se conserve, c'est-à-dire que

(5) $$BN_1 = BN_2$$

Si l'on considère à présent un vecteur $\vec{C}$ quelconque, il satisfait à chacune des conditions mathématiques suivantes :

$$\text{div}\, (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{C}) = 0$$

et $\overrightarrow{\text{rot}}\, (\overrightarrow{\text{grad}}\, m) = 0$ (m étant un scalaire)

Donc, en ce qui nous concerne : div $\vec{B} = 0$ entraîne que

(6) $$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$$

$\vec{A}$ est appelé « potentiel vecteur ». Comme il est défini à un gradient près, on peut imposer une condition sur $\vec{A}$. Cette condition est :

(7) $$\text{div}\, \vec{A} = 0$$

Or la relation **(3)** de Maxwell-Ampère, $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{H} = \vec{J}$, s'écrit dans le vide :

$$\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} = \vec{J}$$

Soit $\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}}\, (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}) = \vec{J}$ donc : $\overrightarrow{\text{rot}}\, (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$

Or $\overrightarrow{\text{rot}}\, (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}\, (\text{div}\, \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

$\nabla^2 \vec{A}$ se lit *laplacien de A*

donc $\overrightarrow{\text{rot}}\, (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A}$

Soit $\mu_0 \vec{J} = -\nabla^2 \vec{A}$, ce qui s'écrit :

(8) $$\nabla^2 \vec{A} + \mu_0 \vec{J} = 0$$

Or, en électrostatique, l'équation de Poisson s'écrit dans le vide $\nabla^2 V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$. Elle correspond au potentiel :

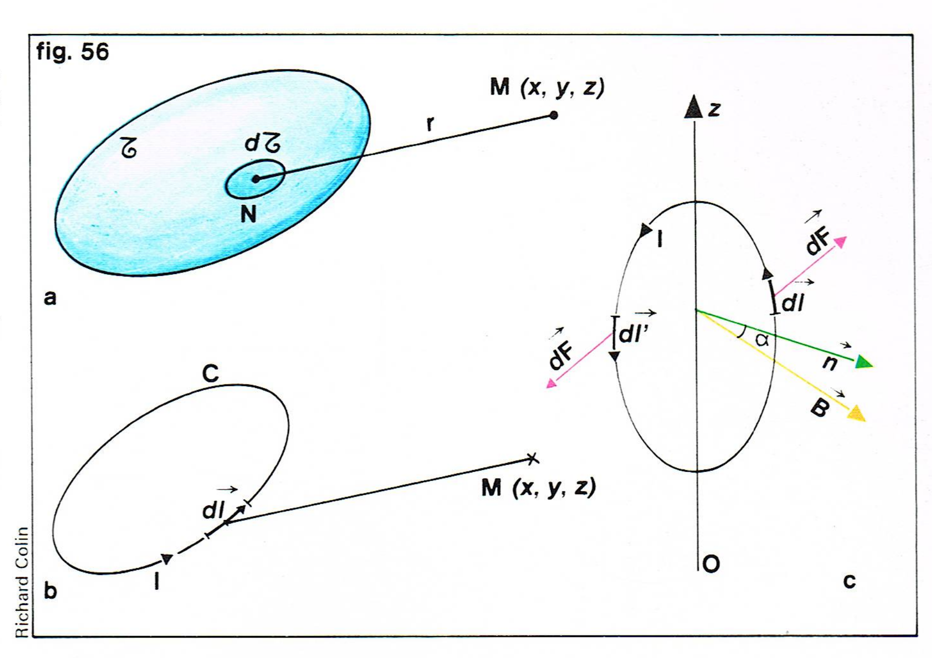
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_\tau \frac{\rho d\tau}{r}$$

Considérons à présent les projections de l'équation **(8)** sur trois axes Ox, Oy, Oz.

Par exemple sur l'axe Ox, elle s'écrit :

$$\nabla^2 A_x + \mu_0 J_x = 0$$

Par analogie avec l'équation de Poisson, la composante A_x de $\vec{A}$ s'écrit :



▲ ***Figure 56 :***
a, calcul du potentiel vecteur $\vec{A}$ en un point M situé à l'extérieur d'un volume τ parcouru par des courants ;
b, cas d'un circuit filiforme C ;
c, dipôle magnétique.

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{J_x d\tau}{r}$$

Les deux autres composantes ont la même force. Ce qui correspond à la forme vectorielle suivante de $\vec{A}$:

(9) $$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{\vec{J} d\tau}{r}$$

τ étant le volume occupé par les courants et r étant la distance d'un élément de volume dτ au point M où l'on calcule le potentiel vecteur $\vec{A}$ (*fig.* 56a).

Rappelons que la formule **(9)** n'est valable que dans le cas où la div $\vec{A}$ est nulle au point considéré où l'on calcule $\vec{A}$. On le vérifie aisément.

Considérons à présent un circuit filiforme C (*fig.* 56b). L'élément $d\tau$ s'écrit $d\tau = dS \cdot dl$, dS étant la surface de la section du fil et dl l'élément de courant.

D'autre part : $\vec{J}\, d\tau = \vec{J}\, dS\, d\vec{l}$

$\vec{J}\, d\tau = I\, d\vec{l}$

Donc $\vec{A}$ s'écrit :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{\vec{J} d\tau}{r}$$

(10) $$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l}}{r}$$

$\vec{A}$ peut aussi s'exprimer en fonction du moment magnétique que nous allons définir. $\vec{A}$ est donné par la formule **(10).** Sa composante suivant un axe unitaire $\vec{u}$ est :

$$\vec{A} \cdot \vec{u} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \cdot \vec{u}}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \left(\frac{\vec{u}}{r}\right) \cdot d\vec{l}$$

Si l'on considère alors une surface quelconque Σ s'appuyant sur le contour (C), le théorème de Stockes fournit l'équation

$$\int_C \left(\frac{\vec{u}}{r}\right) d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}_N \left(\frac{\vec{u}}{r}\right) \cdot d\vec{S} =$$

$$\iint_S \frac{1}{r} (\overrightarrow{\text{rot}}_N\, \vec{u}) \cdot d\vec{S} + \iint_S \left[\overrightarrow{\text{grad}}_N \left(\frac{1}{r}\right) \wedge \vec{u}\right] d\vec{S}$$

où l'indice N signifie que l'on prend le gradient ou le rotationnel par rapport au point N.

$\vec{u}$ étant un vecteur unitaire, la première intégrale s'annule, et il reste :

$$\vec{A} \cdot \vec{u} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_\Sigma \left[\overrightarrow{\text{grad}}_N \left(\frac{1}{r}\right) \wedge \vec{u}\right] d\vec{S} =$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{u} \iint_\Sigma d\vec{S} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_N \left(\frac{1}{r}\right)$$

Desjardins - TOP

Le vecteur $\vec{u}$ étant quelconque, on en déduit que :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_{\Sigma} d\vec{S} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_N \left(\frac{1}{r}\right)$$

Si la distance r est grande, comparée aux dimensions du circuit, le $\overrightarrow{\text{grad}}_N \left(\frac{1}{r}\right)$ a pratiquement la même valeur en tout point N de Σ. C'est donc une constante.

Si, alors, nous introduisons le moment magnétique défini par l'expression :

$$\vec{\mathcal{M}} = I \iint_{\Sigma} d\vec{S}$$

$\vec{A}$ s'écrit :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_N \left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\vec{A} = \overrightarrow{\text{rot}}_N \left(\frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{4\pi r}\right)$$

Cas d'une spire plane

Dans le cas d'une spire plane, le moment magnétique est : $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$, de module IS et orienté perpendiculairement à la spire dans le sens correspondant à un sens positif du courant dans la spire.

Dipôle magnétique

Soit une spire plane pouvant tourner autour d'un axe Oz (*fig.* 56c). Supposons que cette spire soit petite, de sorte que, placée dans un champ magnétique $\vec{B}$, ce champ puisse être considéré comme constant. Supposons aussi que le courant parcourt la spire dans le sens indiqué sur la figure. Alors, on peut définir une normale positive $\vec{n}$. Deux éléments symétriques $d\vec{l}$ et $d\vec{l}'$ sont soumis à deux forces égales et opposées données par la force de Laplace, si bien que la spire est soumise à un couple Γ.

Or $$\Gamma = I \frac{d\Phi}{d\alpha}$$

avec $$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \alpha$$

$$\Gamma = - IBS \sin \alpha$$

soit, vectoriellement : $\Gamma = I\vec{S} \wedge \vec{B}$

$$\Gamma = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

Donc la spire est soumise à un couple donné par l'expression précédente.

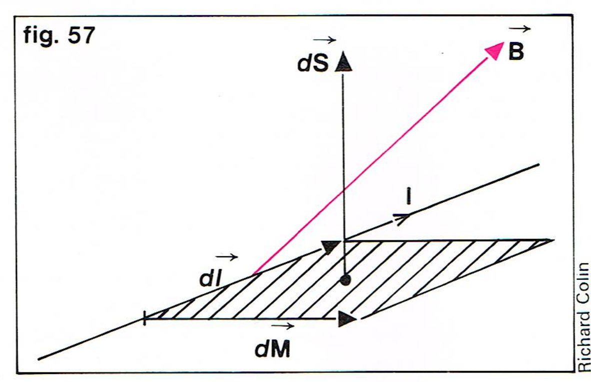
Travail des forces électromagnétiques - Loi de Maxwell

Travail des forces électromagnétiques

Soit un élément de courant $d\vec{l}$ parcouru par un courant constant I et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$. Imaginons que l'on fasse subir à cet élément de courant un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{M}$ (*fig.* 57). L'élément $d\vec{l}$ placé dans un champ $\vec{B}$ et parcouru par le courant I est soumis à la force de Laplace :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

d'autre part, au cours du déplacement $d\overrightarrow{M}$, le travail de cette force est :



Richard Colin

$$dW = d\vec{F} \cdot d\vec{M}$$

soit : $dW = I\,(d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{M}$

que l'on peut écrire en vertu des règles de permutation du produit mixte : $dW = I\,(d\vec{M} \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B}$.

Le vecteur $(d\vec{M} \wedge d\vec{l})$ est un vecteur dont le module $(d\vec{S})$ représente l'aire du parallélogramme construit sur $d\vec{l}$ et $d\vec{M}$. Sa direction est perpendiculaire à $d\vec{l}$ et $d\vec{M}$ et son sens est donné par le sens du produit vectoriel. Ainsi dW s'écrit : $dW = I d\vec{S} \cdot \vec{B}$.

Or $d\vec{S} \cdot \vec{B}$ représente le flux $d\Phi_c$ coupé par l'élément de courant lors de son déplacement. On peut donc écrire $dW = I d\Phi_c$.

Si l'on a affaire non pas à un élément de circuit mais à un circuit qui se déplace, cette formule reste toujours valable : $dW = I d\Phi_c$, dans laquelle $d\Phi_c$ représente le *flux élémentaire coupé* par le circuit entier. Si le déplacement du circuit est fini, passant d'une position i à une position f, le travail est alors donné par la somme des travaux élémentaires :

$$W = \int_i^f dW = I \int_i^f d\Phi_c = I\Delta\Phi_c = W$$

Donc le travail est donné par le produit du courant par la variation du flux coupé par l'ensemble du circuit.

Nous allons maintenant donner une relation équivalente où va intervenir non pas le flux coupé mais la *variation de flux* lorsque le circuit passe d'une position i à une position f. Pour cela, il faut se souvenir de la convention que nous avions adoptée à propos de l'orientation de la normale à un circuit. Dans le cas d'un circuit magnétique, le sens positif de la normale est celui qui va de la face sud vers la face nord. C'est également le sens d'un tire-bouchon qui tourne dans le sens du courant. D'autre part, le flux du vecteur $\vec{B}$ est conservatif. Cela se traduit mathématiquement par l'expression $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ et physiquement par le fait que le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul.

Considérons à présent la *figure* 58 qui est une surface fermée. Elle est formée de la surface Σ_c qui a la forme d'un tube coupé en ses deux extrémités par les surfaces Σ_i et Σ_f. Nous allons considérer les *flux sortants* (un flux sortant étant affecté du signe positif lorsque la normale est orientée vers l'extérieur de la surface). Soit Φ_i le flux sortant à travers Σ_i. Il est affecté du signe — puisque la normale est dirigée vers l'intérieur.

Prenons à présent une position intermédiaire du circuit (position S). Lorsque ce circuit se déplace de $d\vec{M}$ et occupe la position S', la normale à $d\vec{M} \cdot d\vec{l}$ est dirigée vers l'intérieur de la surface Σ_c. Donc le flux à travers Σ_c, c'est-à-dire le flux coupé, est aussi affecté du signe — $(-\Phi_c)$. Par contre, le flux sortant de Σ_f est positif $(+\Phi_f)$. Comme le flux de $\vec{B}$ est conservatif, cela entraîne que le flux total à travers toute la surface est nul.

Soit $-\Phi_i - \Phi_c + \Phi_f = 0$

d'où $\Phi_f - \Phi_i = \Phi_c$

le travail $W = I\Phi_c$ s'écrit également :

$$W = I\,(\Phi_f - \Phi_i)$$

Ainsi, lorsqu'un circuit parcouru par un courant I et placé dans un champ $\vec{B}$ passe d'une position initiale i à une position finale f, le travail des forces électromagnétiques est égal au produit du courant I par la variation de flux. Or les forces magnétiques tendent à fournir au circuit un travail W positif. Cela signifie que Φ_f est plus grand que Φ_i, donc que le circuit tend à embrasser un flux final plus grand que celui de départ. Plus précisément, lorsque ce flux sera maximal, le circuit occupera une position d'équilibre stable. Les expériences suivantes illustreront ce phénomène.

— *Première expérience* (*fig.* 59a et b) : soit un cadre rigide ABCD parcouru par un courant I. Ce cadre peut tourner autour d'un axe MN placé en son milieu. Il est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, perpendiculaire à l'axe MN. La position du cadre est repérée par l'angle θ fait par le champ $\vec{B}$ et la demi-normale positive $\vec{n}$. Ce cadre, parcouru par le courant I, est soumis à deux forces égales et opposées s'exerçant sur les milieux des côtés AD et BC et tendant à faire tourner le cadre autour de son axe MN (les côtés AB et DC sont soumis à des forces dont les moments par rapport à l'axe sont nuls). On pose :

$$AB = DC = l \quad \text{et} \quad AD = BC = L$$

Les deux forces forment un couple dont le moment est :

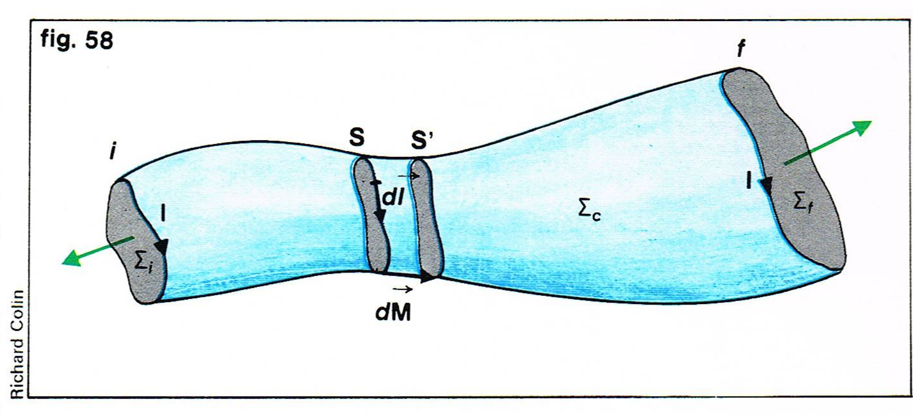
$$\vec{\Gamma} = \vec{f} \wedge \vec{l}$$

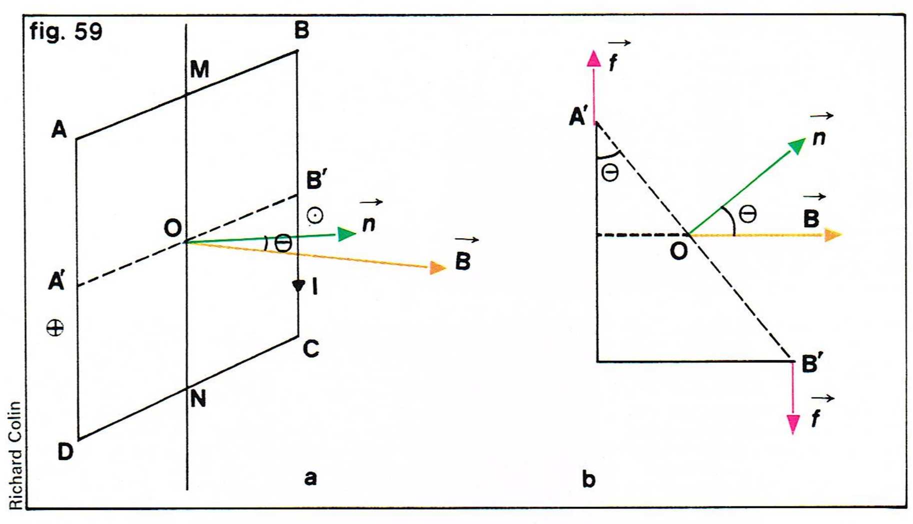
soit $|\vec{\Gamma}| = |\vec{f}| \cdot |\vec{l}| \sin\theta$

comme $|\vec{f}| = ILB \qquad |\vec{\Gamma}| = ILB/\sin\theta = ISB \sin\theta$

On voit que l'équilibre est stable si $|\vec{\Gamma}|$ est nul, c'est-à-dire si $\theta = 0$. Donc le cadre se place de telle sorte qu'il soit soumis au flux maximal de $\vec{B}$. Ce cadre est alors normal au champ $\vec{B}$.

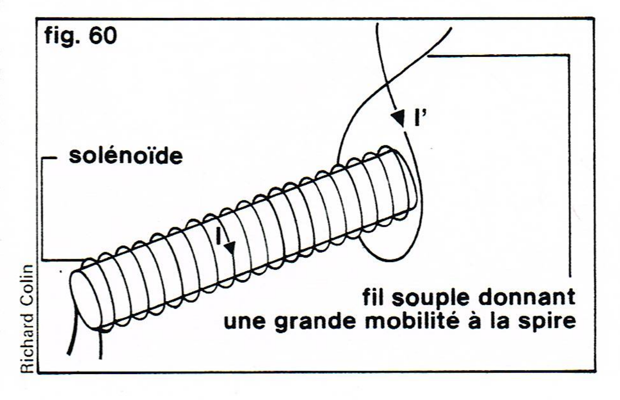
— *Deuxième expérience* (*fig.* 60) : soit un solénoïde parcouru par un courant I et une spire parcourue par un courant I'. Si le sens des courants est le même, la spire va s'approcher du solénoïde et se placer au milieu de celui-ci. Cela correspond au flux maximal. Si l'on change





▲ *En haut, figure 58 ; lorsque le circuit se déplace de la position i à la position f, le travail total W est :* $W = I\,(\Phi_f - \Phi_i)$. *Ci-dessus, figure 59 : le cadre ABCD parcouru par le courant I et placé dans le champ magnétique* $\vec{B}$ *est soumis au couple* $\vec{\Gamma} = \vec{f} \wedge \vec{l}$.

◄ *Page ci-contre, à gauche : un orage accompagné de phénomènes électriques. A droite, figure 57 : l'élément de courant* $d\vec{l}$ *parcouru par le courant I et placé dans le champ magnétique* $\vec{B}$ *est soumis à la force de Laplace* $d\vec{F} = I\,d\vec{l} \wedge \vec{B}$.



◄ *Figure 60 : le solénoïde étant parcouru par le courant I et la spire par le courant I', la spire va s'approcher du solénoïde et se mettre au milieu de celui-ci si I et I' sont dans le même sens.*

▶ ***Figure 61 :* calcul du coefficient d'induction mutuel M dans le cas simple où l'une des bobines contient l'autre et que leurs axes sont confondus.**

le sens de l'un des courants, par exemple I', la spire va d'abord s'éloigner du solénoïde, se retourner, puis s'embrocher dans le solénoïde.

Il nous faut à présent exprimer le flux magnétique selon des unités. En unités M. K. S. A., c'est le *weber* (Wb). Or le flux est homogène au produit de l'induction par une surface. Donc, en M. K. S. A., l'induction s'exprime en webers par mètre carré (Wb/m^2).

Actions mutuelles de deux circuits

Coefficients d'induction mutuelle et de self-induction

Nous nous bornerons à traiter le cas de deux circuits filiformes. Soit donc deux circuits filiformes (C) et (C') parcourus respectivement par les courants I et I'. On considérera que les dimensions de ces deux circuits sont négligeables par rapport à leur distance. Le circuit (C) parcouru par le courant I crée en tout point de l'espace un champ $\vec{B}$ proportionnel à I (d'après la loi de Biot-Savart). Donc le flux Φ' à travers toute surface Σ' s'appuyant sur le contour (C') est proportionnel à I. On peut ainsi écrire $\Phi' = \mathbf{M}I$, **M** désignant le coefficient de proportionnalité.

Donnons une forme plus explicite à ce coefficient :

$$\Phi' = \iint_{\Sigma'} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma'}$$

or $$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$$

donc $$\Phi' = \iint_{\Sigma'} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma'}$$

La formule de Stockes permet d'écrire :

$$\Phi' = \iint_{\Sigma'} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma'} = \int_{C'} \vec{A} \cdot d\vec{l'}$$

dl' étant un élément de courant de (C').

En introduisant l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l}}{r}$$

on obtient la valeur de Φ' :

$$\Phi' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \int_{C'} \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l'}}{r}$$

et l'on est conduit à poser :

$$\mathbf{M} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \int_{C'} \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l'}}{r}$$

avec $\Phi' = \mathbf{M}I$.

On appelle ce coefficient **M**, identique pour les deux circuits, le *coefficient d'induction mutuelle* des deux circuits.

Dans le système M. K. S. A., il est mesuré en henrys (H). On peut vérifier sans peine que si I et I' sont dans le même sens, les flux Φ et Φ' sont positifs. Cela entraîne que, dans ce cas, **M** est positif. Dans le cas où les deux courants sont en sens inverse, **M** est négatif.

Il est possible d'envisager le flux qu'un circuit parcouru par un courant I envoie à travers lui-même. Ce flux, comme dans le cas de deux circuits, est proportionnel à I.

Nous écrivons : $\Phi = LI.$

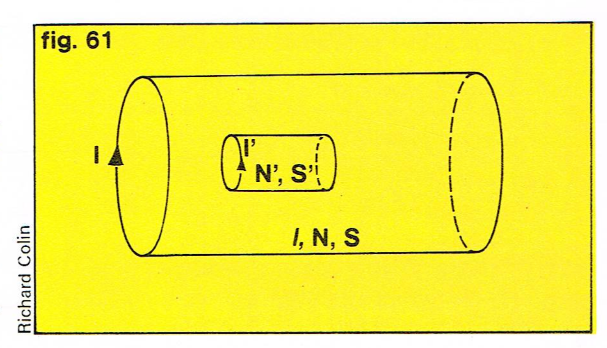
L est le *coefficient de self-induction* ou *self-inductance* du circuit. Puisque, dans un circuit, le courant le parcourt dans le même sens, il en résulte que Φ est toujours positif, donc également L, lequel s'exprime en henrys dans le système M. K. S. A.

On peut avoir à calculer le coefficient d'induction mutuelle de deux circuits. Le calcul par la formule

$$\mathbf{M} = \int_C \int_{C'} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l'}}{r}$$

est en général compliqué.

Il est plus simple de calculer le flux créé par un des circuits à travers l'autre et d'en déduire ainsi le coefficient **M**. Considérons ainsi le montage de la *figure* 61. Il est constitué de deux bobines. L'une, de surface S, de longueur *l*, comprend N spires; elle est parcourue par le courant I; l'autre, plus petite, de surface S', située à l'intérieur de la grande, est parcourue par un courant I' et comporte N' spires. On suppose, pour simplifier les calculs, que l'angle entre les axes des deux spires est nul.



Richard Colin

La bobine S crée à travers la bobine S' le flux donné par la formule :

$$\Phi' = \vec{B}N'S' \quad \text{avec} \quad \vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

(le champ $\vec{B}$ peut en effet prendre cette forme, car on suppose que la bobine S est assez longue pour être assimilée à un solénoïde).

$$\Phi' = \mu_0 \frac{NN'}{l} S'I = \mathbf{M}I$$

donc $$\mathbf{M} = \frac{\mu_0 NN'S'}{l}$$

Calcul de la résultante et du moment résultant des forces électromagnétiques appliquées à un circuit

La relation $W = I(\Phi_f - \Phi_i)$ permet de calculer la résultante générale $\vec{R}$ des forces appliquées au circuit lors d'un déplacement $d\vec{M}$. Nous pouvons écrire les deux égalités :

$$dW = \vec{R} \cdot d\vec{M}$$
$$dW = I d\Phi$$

$d\Phi$ étant la variation élémentaire de flux, lors du déplacement élémentaire $d\vec{M}$.

Si les composantes de $d\vec{M}$ selon trois axes (O*x*, O*y*, O*z*) sont X, Y, Z, on obtient par exemple pour un déplacement selon O*x* :

$$X dx = I d\Phi$$

c'est-à-dire : $$X = I \frac{d\Phi}{dx}$$

de même pour les deux autres composantes :

$$Y = I \frac{d\Phi}{dy} \quad \text{et} \quad Z = I \frac{d\Phi}{dz}$$

De la même manière, si l'on considère une rotation élémentaire $d\alpha$ autour d'un axe, le travail des forces électromagnétiques est :

$$\Gamma d\alpha = I d\Phi$$

où Γ est le moment des forces résultantes par rapport à cet axe. Si par exemple Γ_z est la composante de Γ selon l'axe O*z* et si l'on effectue une rotation autour de cet axe, on a :

$$\Gamma_z d\alpha = I d\Phi$$

soit : $$\Gamma_z = I \frac{d\Phi}{d\alpha}$$

Application : détermination de la force d'induction entre deux circuits

On a établi le coefficient d'induction mutuelle **M** entre deux circuits, en fonction des paramètres géométriques déterminant la position des deux circuits. On peut alors calculer la résultante des forces exercées sur l'un d'eux.

Considérons un circuit S parcouru par le courant I. Nous avons vu que la résultante des forces s'exerçant sur lui lors d'un déplacement élémentaire selon l'axe O*x* est :

$$X = I \frac{d\Phi}{dx}$$

Or $\Phi = \mathbf{M}I'$ où I' est le courant passant dans le circuit S' qui est en présence du circuit S,

donc $$\frac{d\Phi}{dx} = I' \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}$$

donc $$X = II' \frac{\partial M}{\partial x}$$

De manière identique, si l'on considère, par exemple, la composante Γ_x, sur l'axe Ox, du moment résultant $\vec{\Gamma}$, lors d'une rotation $d\alpha$ autour de cet axe :

$$\Gamma_x = I \frac{d\Phi}{d\alpha}$$

Or $$\Phi = MI' \quad \text{donc} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = I' \frac{\partial M}{\partial \alpha}$$

Ainsi $$\Gamma_x = II' \frac{\partial M}{\partial \alpha}$$

L'induction électromagnétique

Le phénomène d'induction a été découvert par Faraday en 1838. Son importance est considérable, car de nombreuses machines produisent des courants par induction.

Expériences fondamentales mettant en évidence l'existence d'un courant induit

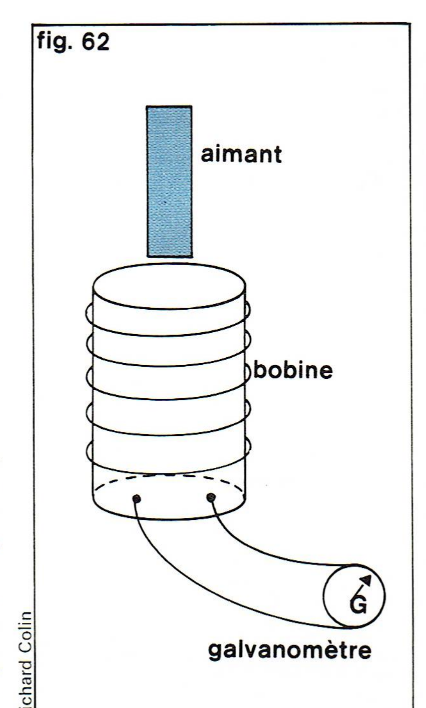
Première expérience (*fig.* 62) : le montage est constitué d'une bobine reliée à un galvanomètre G et d'un aimant que l'on peut approcher ou éloigner de la bobine. Si l'on approche l'aimant de la bobine, on constate que l'aiguille du galvanomètre bouge ; si l'on cesse d'approcher l'aimant, l'aiguille ne bouge plus ; si l'on enfile l'aimant dans la bobine, l'aiguille dévie plus ; si l'on éloigne l'aimant, l'aiguille dévie en sens inverse.

Dans tous les cas, puisque l'aiguille dévie, c'est qu'il y a passage d'un courant dans la bobine.

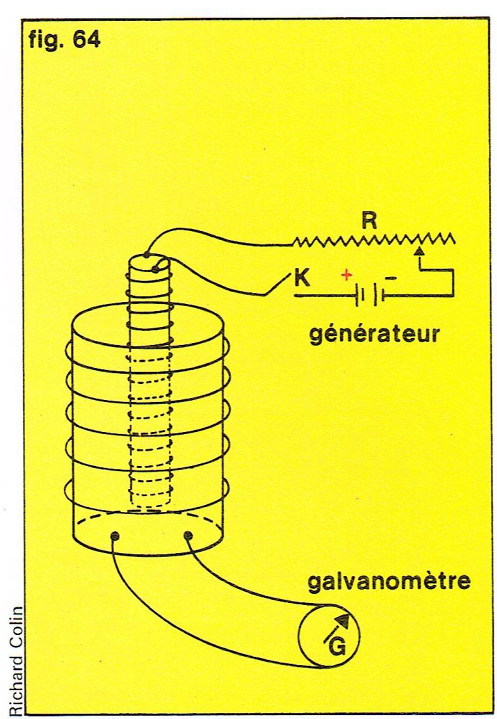
Deuxième expérience (*fig.* 63) : elle met en évidence ce courant appelé *courant induit*. L'appareillage comprend deux bobines ; une reliée à un galvanomètre G et l'autre à un générateur pouvant fournir un courant I. Un interrupteur K permet d'interrompre le courant. Les deux bobines étant immobiles, il y a création d'un courant induit lorsqu'on ferme l'interrupteur K. Ce courant cesse presque immédiatement. Si l'on maintient l'interrupteur K fermé et que l'on bouge l'une des bobines, on constate qu'il y a également une déviation de l'aiguille du galvanomètre, donc existence d'un courant induit.

Troisième expérience (*fig.* 64) : elle permet de confirmer l'existence de ce courant induit. Le montage comprend une bobine réunie à un galvanomètre et une bobine reliée à un générateur. On peut interrompre le courant dans cette dernière bobine, ou en modifier l'intensité à l'aide d'un rhéostat R. Les deux bobines étant immobiles, on constate l'apparition d'un courant induit lorsqu'on ouvre ou ferme l'interrupteur K, ou bien encore chaque fois que l'on modifie le courant I à l'aide du rhéostat.

Ces expériences permettent de conclure à l'existence d'un courant induit dans un circuit conducteur fermé, qui est lié à la variation de flux magnétique traversant le circuit. On désigne sous le nom de *circuit induit* le circuit qui est le siège du courant induit. Le *circuit inducteur* est celui (aimant ou bobine) qui crée le champ magnétique « inducteur » responsable de la création du courant induit.

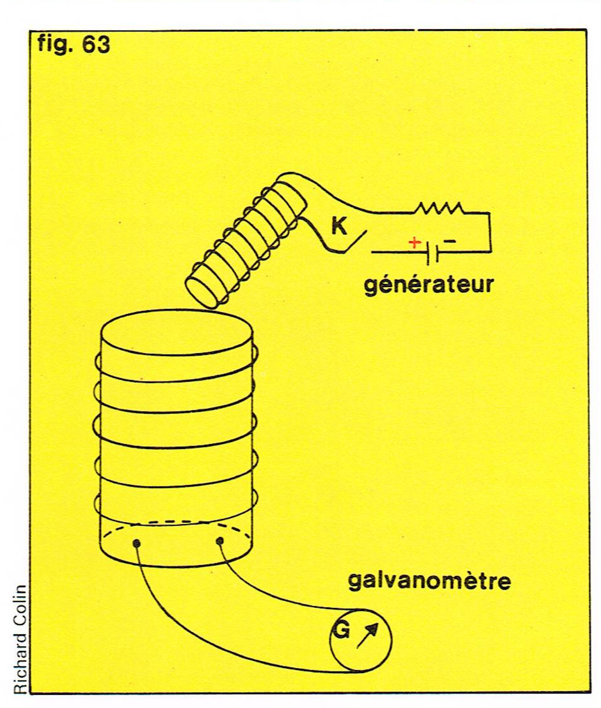


Richard Colin

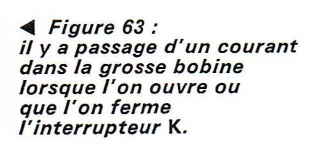


Richard Colin

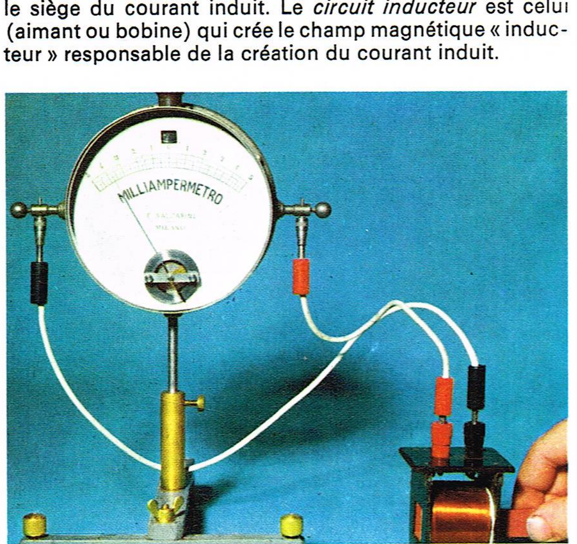
▲ *A gauche, figure 62 : si l'on approche ou si l'on éloigne l'aimant de la bobine, l'aiguille du galvanomètre dévie, indiquant le passage d'un courant dans la bobine.*
A droite, figure 64 : l'aiguille du galvanomètre dévie lorsque, l'interrupteur K *étant fermé, on agit sur le rhéostat* R.



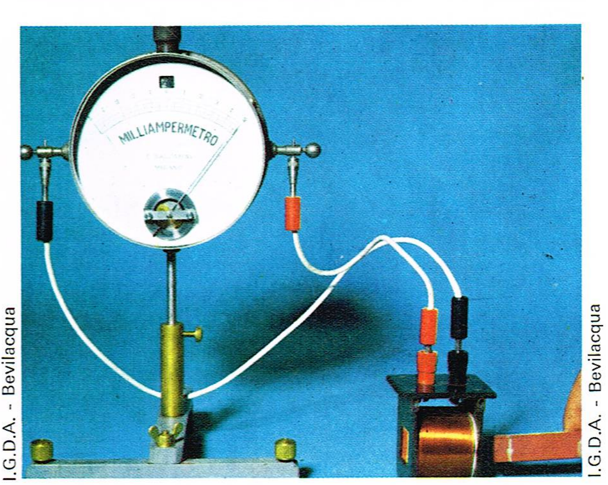
Richard Colin



◀ *Figure 63 : il y a passage d'un courant dans la grosse bobine lorsque l'on ouvre ou que l'on ferme l'interrupteur* K.



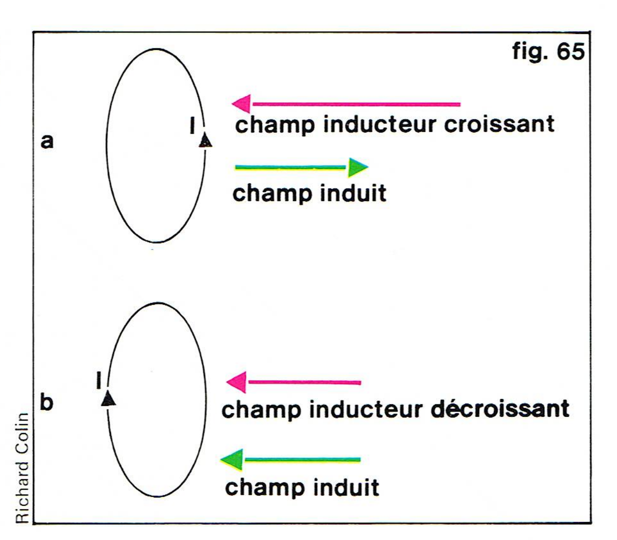
I.G.D.A. - Bevilacqua



I.G.D.A. - Bevilacqua

◀ *La variation du flux traversant la bobine crée un courant induit.*

▶ ***Figure 65 :*** ***sens du champ induit et du courant induit selon le sens du champ inducteur incident.***



La **loi de Lenz** (loi expérimentale) donne le sens du courant induit : *Le sens du courant induit est tel qu'il produit à travers le circuit un flux magnétique qui tend à s'opposer à la variation du flux qui lui donne naissance.*

On peut donc obtenir les deux cas de figures suivants (*fig.* 65a et b) selon que le champ inducteur est croissant ou décroissant :

— Dans le premier cas, le champ inducteur est croissant, le champ magnétique induit est en sens inverse du champ inducteur. Le courant a le sens indiqué sur la *figure* 65a.

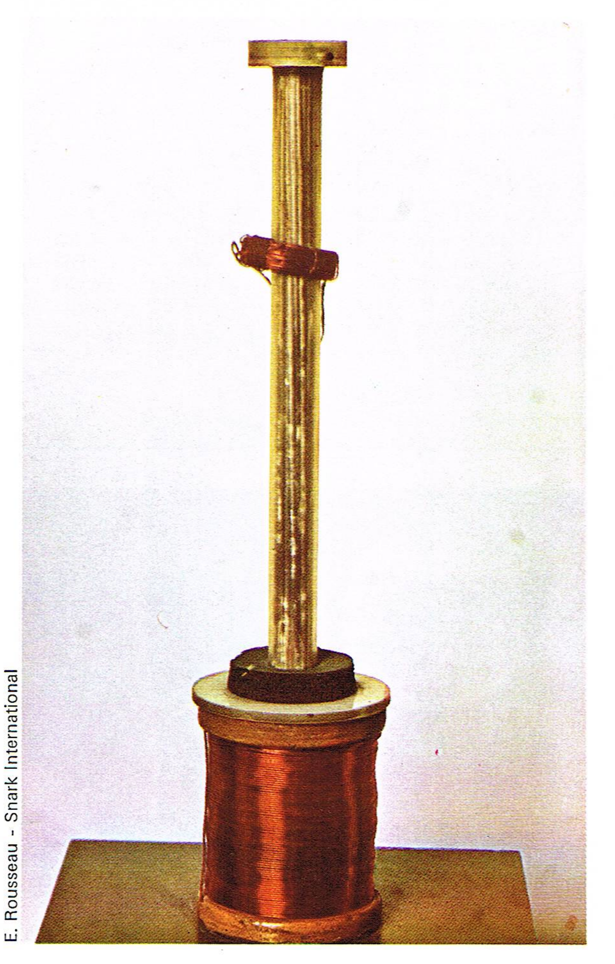
— Dans le deuxième cas, le champ inducteur est décroissant, le champ induit est dans le même sens que le champ inducteur. Le sens du courant est indiqué sur la *figure* 65b.

Quelle est la forme de la force électromotrice d'induction et du courant induit ? Nous voyons expérimentalement que, si une spire S est soumise à un flux d'induction (soit que $\vec{B}$ varie et S reste fixe, soit que $\vec{B}$ ne varie pas et S se déplace) cette spire est le siège d'un courant induit. Il apparaît donc une *force électromotrice d'induction* qui est donnée par la formule empirique :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Cette formule se conçoit physiquement d'une manière aisée. En effet, plus la variation de flux est importante et rapide, et plus la force électromotrice d'induction est importante. Si, de plus, la spire a une résistance R, alors le courant induit est : $I = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$

Les expériences que nous avons décrites montrent que ces formules sont valables non seulement pour une spire, mais également pour un circuit quelconque, siège d'une variation de flux.



▶ ***La spire de Thomson ; elle crée le champ magnétique « inducteur » responsable de la création du courant induit.***

Champ électromoteur d'induction

Si le circuit n'est pas filiforme, pour connaître par exemple la répartition des courants, il ne suffit pas seulement de dire que globalement la force électromotrice d'induction est donnée par $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, il faut en plus déterminer en chaque point du circuit la forme du champ électromoteur d'induction $\vec{E}_i$ tel que : $e = \int_{\text{contour du circuit}} \vec{E}_i \cdot \vec{dl}$

On a donc $e = \int_{\text{contour du circuit}} \vec{E}_i \cdot \vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Le terme $-\frac{d\Phi}{dt}$ désignant la *variation de flux* à travers tout le circuit.

Supposons que le circuit soit immobile. Alors

$$d\Phi = \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

Mais $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$

donc $e = \int_{\text{contour du circuit}} \vec{E}_i \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} \cdot \vec{dS}$

où Σ représente la surface du circuit soumise à la variation de flux magnétique.

Or $\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} \cdot \vec{dS} = \int_{\text{contour du circuit}} \vec{A} \cdot \vec{dl}$

donc $e = \int_{\text{contour du circuit}} \vec{E}_i \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \int_{\text{contour du circuit}} \vec{A} \cdot \vec{dl}$

qui peut encore s'écrire :

$$e = + \int_{\text{contour du circuit}} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl}$$

On en déduit que $\vec{E}_i$ est de la forme : $\vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\, k$, k étant une fonction arbitraire des coordonnées et du temps (car $\vec{E}_i$ est définie à un gradient près).

Le champ total $\vec{E}_t$, le seul accessible par l'expérience, est donc la somme du champ électrostatique $\vec{E}_e$ et du champ d'induction $\vec{E}_i$.

Donc $\vec{E}_t = \vec{E}_e + \vec{E}_i = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\, k$

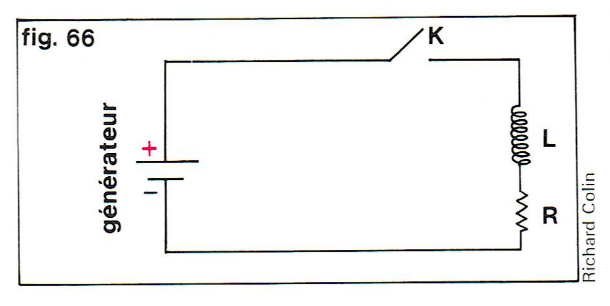
k étant une fonction arbitraire, on peut la choisir nulle.

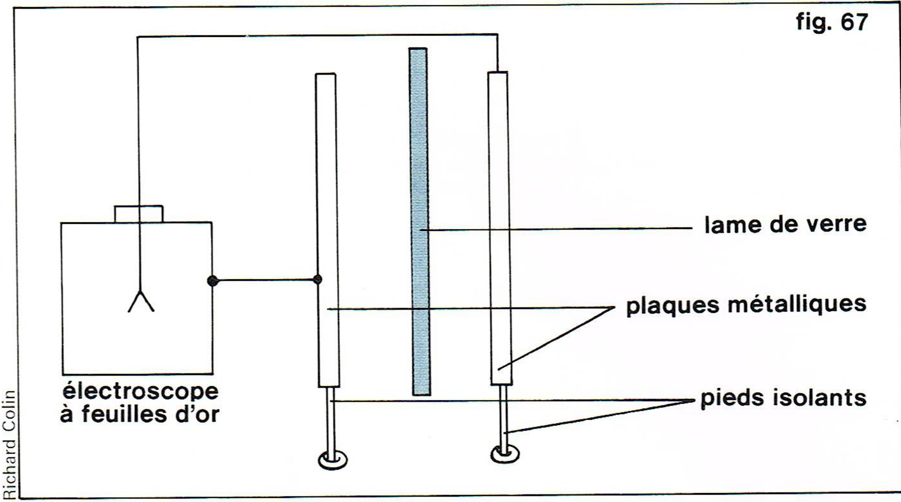
Il reste : $\vec{E}_t = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Cette relation permet de voir que le champ électrique total $\vec{E}_t$ ne dérive pas d'un potentiel, ce qui explique la formation de courants induits, alors que le champ électrostatique, lui, dérive d'un potentiel et que

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E}_t = -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$$

Ainsi $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E}_t = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$





▲ *A gauche, figure 66 : établissement de la valeur de l'énergie emmagasinée dans un circuit comprenant une self-inductance* **L** *et une résistance* **R.**
A droite, figure 67 : montage expérimental du **condensateur d'Epinus.**

L'énergie magnétique

Calculons l'énergie magnétique emmagasinée dans un circuit comportant une self-inductance L et une résistance R, lors de l'établissement d'un courant (*fig.* 66).

Elle est représentée par l'équation $\mathbf{E} = L\dfrac{dI}{dt} + RI$

Soit : $\mathbf{E}I dt = LI dI + RI^2 dt$

Le premier membre de cette équation représente l'énergie fournie au circuit par le générateur pendant le temps dt. Le terme RI^2dt représente l'énergie dissipée par effet Joule pendant ce même temps. Le terme $L\,I\,dI$ représente une énergie emmagasinée.

Ainsi, lorsque le courant passe de la valeur 0 à la valeur I, l'énergie emmagasinée par la self est :

$$W = \int_0^i LI dI = \frac{1}{2} LI^2$$

C'est l'*énergie magnétique* du circuit.

Cherchons à localiser cette énergie magnétique comme nous avons essayé de localiser l'énergie électrique. Envisageons pour cela le cas d'un solénoïde indéfini placé dans le vide, et dont la surface d'une spire est S. Considérons une certaine longueur l de ce solénoïde. Le volume ainsi délimité est $v = Sl$.

L'inductance propre de cette portion de circuit est :

$$L = \mu_0 n^2 lS = \mu_0 n^2 v$$

n étant le nombre de spires par unité de longueur.

Or $W = \dfrac{1}{2} LI^2 = \dfrac{1}{2} \mu_0\, n^2 v I^2$

mais $B = \mu_0 nI$, cela entraîne que $I^2 = \dfrac{B^2}{n^2 \mu_0^2}$

Soit $$W = \frac{B^2}{2\,\mu_0} v$$

Nous voyons que l'énergie magnétique est proportionnelle au volume v. Donc cette énergie est localisée dans ce volume. On peut donc en conclure que l'énergie magnétique est localisée là où existe un champ magnétique. La densité d'énergie emmagasinée est alors :

$$W_0 = \frac{W}{v} = \frac{B^2}{2\,\mu_0} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

Les milieux matériels

Un diélectrique, sous l'action d'un champ électrique, peut être polarisé. C'est ce que nous montre l'expérience suivante, connue sous le nom d'*expérience du condensateur d'Epinus* (*fig.* 67). L'appareillage est formé de deux plaques métalliques montées sur deux pieds isolants. Ces deux plaques sont reliées à un électroscope à feuilles d'or. Les feuilles d'or sont d'autant plus écartées que la différence de potentiel que l'on maintient entre les deux plaques est plus grande.

Introduisons alors entre les plaques une lame de verre non chargée. On constate que l'écartement des feuilles d'or diminue. Si l'on enlève la plaque de verre, l'écartement revient à sa valeur initiale. Cette expérience peut être interprétée, comme nous l'avons dit, par le fait qu'un diélectrique soumis à un champ électrique se polarise, c'est-à-dire que tout élément de volume $d\tau$ de ce diélectrique acquiert un *moment dipolaire* $d\vec{p}$. On caractérise l'intensité de ce phénomène par un vecteur, le *vecteur polarisation* $\vec{P} = \dfrac{d\vec{p}}{d\tau}$

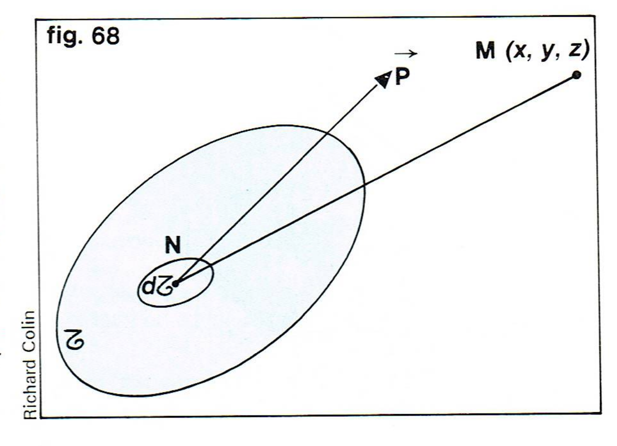
Ce phénomène a deux explications. La première concernant des corps comme les gaz rares (argon, néon, hélium, etc.) dont chaque molécule est telle que le centre de gravité des charges négatives coïncide avec celui des charges positives, lorsque aucun champ n'est appliqué. Sous l'action d'un champ électrique, la molécule se déforme, les deux centres de gravité ne se trouvent plus confondus, et sont alors distants de d. Si q représente la charge totale positive et $-q$ la charge totale négative, il apparaît donc un dipôle électrique qd.

D'autres corps tels que l'ammoniac (NH_3), l'acide chlorhydrique (HCl), sont composés de molécules dites « polaires », c'est-à-dire que, même en l'absence de champ, il existe une dissymétrie naturelle, en ce sens que les deux centres de gravité précédemment cités ne coïncident pas. Ces molécules ont donc un dipôle électrique permanent qui microscopiquement n'apparaît pas, à cause de l'agitation thermique des molécules. Cependant, sous l'action d'un champ électrique extérieur, ce dernier exerce sur les molécules un couple tendant à les orienter dans sa direction. Cela se traduit par l'apparition d'un moment dipolaire électrique moyen dans chaque élément de volume $d\tau$.

Nous allons à présent montrer qu'un diélectrique de vecteur polarisation $\vec{P}$ est équivalent à une *distribution volumique de charges fictives* $\rho_p = -\operatorname{div}\vec{P}$ et à une *densité superficielle de charges fictives* $\sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{n}$.

En effet, soit un diélectrique de volume τ (*fig.* 68), soumis à un champ extérieur $\vec{E}_0$. Considérons également un élément de volume $d\tau$ de ce diélectrique. Ce dernier acquiert le moment $d\vec{p}$, auquel correspond le vecteur polarisation $\vec{P} = \dfrac{d\vec{p}}{d\tau}$

Supposons que ce diélectrique porte en plus une *densité de charge volumique* ρ_v et une *densité de charge surfacique* σ. Le potentiel créé en un point M extérieur au diélectrique et situé à une distance r du volume élémentaire $d\tau$ est :



◀ *Figure 68 : si un volume* $d\tau$ *acquiert un moment dipolaire* $d\vec{p}$, *il lui correspond le vecteur de polarisation* $\vec{P} = \dfrac{d\vec{p}}{d\tau}$.

$$V_M = \iiint_\tau \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec{P}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}_N \frac{1}{r} + \frac{\rho_v}{r}\,d\tau\right) + \iint_\Sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{r}$$

Σ étant la surface délimitant le volume τ et $\overrightarrow{\text{grad}}_N$ signifiant que l'on prend le gradient par rapport au point N.

On peut transformer l'intégrale triple ; nous avons en effet :

$$\text{div}\,\frac{1}{r}\cdot\vec{P} = \vec{P}\,\overrightarrow{\text{grad}}_N \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\,\text{div}\cdot\vec{P}$$

Nous obtenons :

$$V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\tau\left(\text{div}\,\frac{\vec{P}}{r} - \frac{1}{r}\,\text{div}\,\vec{P} + \frac{\rho_v}{r}\right)d\tau + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_\Sigma \frac{\sigma dS}{r}$$

Si $\vec{n}$ est la normale dirigée vers l'extérieur du diélectrique :

$$\iiint_\tau \text{div}\,\frac{\vec{P}}{r}\cdot d\tau = \iint_\Sigma \frac{\vec{P}\cdot\vec{n}}{r}\cdot dS$$

d'où : $V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\iiint_\tau (\rho_v - \text{div}\,\vec{P})\,d\tau + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\iint_\Sigma (\sigma + \vec{P}\cdot\vec{n})\,dS$

On peut ainsi définir autour d'un point quelconque du diélectrique un vecteur $\rho_0 = \rho_v - \text{div}\,\vec{P}$ et sur la surface Σ une densité superficielle de charges $\sigma_0 = \sigma + \vec{P}\cdot\vec{n}$.

Le problème est à présent de connaître le potentiel à l'intérieur du diélectrique. La formule donnant V_M, valable pour un point M situé à l'extérieur du diélectrique, reste finie, continue et dérivable, donc elle reste valable à l'intérieur du diélectrique, et nous pouvons alors dire que le potentiel à l'intérieur d'un diélectrique, en un point, est celui que produiraient dans le vide les charges vraies déjà existantes, c'est-à-dire ρ_v et σ, auxquelles on ajouterait des charges fictives $\rho_p = -\text{div}\,\vec{P}$ et $\sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{n}$.

Le champ $\vec{E}$ à l'intérieur du diélectrique, en ce point, est celui qui dérive du potentiel alors calculé. Si V_N est ce potentiel, on obtient :

$$\vec{E}_N = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V_N$$

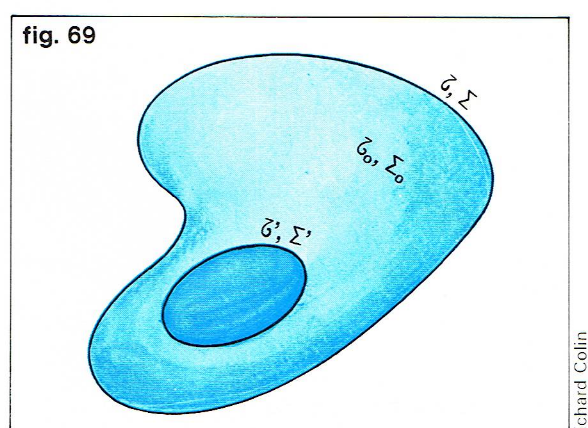
Théorème de Gauss dans les diélectriques

Soit la *figure* 69. Elle est constituée d'un volume τ délimité par la surface Σ, dans lequel existe un diélectrique occupant un volume τ' délimité par une surface Σ'. τ_0 est le volume ne contenant pas le diélectrique et délimité par la surface Σ_0 ($\Sigma_0 = \Sigma - \Sigma'$).

S'il n'y avait pas de diélectrique dans le volume τ qui contient la charge q, le théorème de Gauss établirait que :

$$\iint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Si à présent un diélectrique occupe une partie du volume, comme c'est le cas dans l'exemple figuré ici, il faut alors considérer les charges fictives :



▶ *Figure 69 : voir le chapitre théorème de Gauss dans les diélectriques.*

$$q_p = \iint_{\Sigma'} (\vec{P}\cdot\vec{n})\,dS - \iiint_{\tau'} (\text{div}\,\vec{P})\,d\tau$$

Dans l'expression du théorème de Gauss, il faut alors remplacer q par $q_{réel} + q_p$

(11) $$\varepsilon_0 \iint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{n}dS = q_{réel} + \iiint_{\tau'} (-\text{div}\,\vec{P})\,d\tau + \iint_{\Sigma'} (\vec{P}\cdot\vec{n})\,dS$$

or $\tau' = \tau - \tau_0$

donc $$\iiint_{\tau'} = \iiint_\tau - \iiint_{\tau_0}$$

Soit

(12) $$\iiint_{\tau'} (-\text{div}\,\vec{P})\,d\tau = \iiint_\tau (-\text{div}\,\vec{P})\,d\tau - \iiint_{\tau_0} (-\text{div}\,\vec{P})\,d\tau$$

En reportant **(12)** dans l'expression **(11)**, on obtient :

$$\varepsilon_0 \iiint_\tau (\text{div}\,\vec{E})\,d\tau + \iiint_\tau (\text{div}\,\vec{P})\,d\tau = q_{réel} + \iiint_{\tau_0} (\text{div}\,\vec{P})\,d\tau + \iint_{\Sigma'} (\vec{P}\cdot\vec{n})\,dS$$

Soit

$$\iiint_\tau \text{div}\,(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})\,d\tau = q_{réel} + \iiint_{\tau_0} (\text{div}\,\vec{P})\,d\tau + \iint_{\Sigma'} (\vec{P}\cdot\vec{n})\,dS$$

On pourrait *a priori* croire que l'intégrale

$$\iiint_{\tau_0} (\text{div}\,\vec{P})\,d\tau$$

est nulle. Cela est vrai, sauf sur la surface Σ' enveloppant le diélectrique.

Montrons à présent que

$$\iiint_{\tau_0} (\text{div}\,\vec{P})\,d\tau + \iint_{\Sigma'} (\vec{P}\cdot\vec{n})\,dS = 0$$

La première intégrale peut se transformer par le théorème de la divergence :

$$\iiint_{\tau_0} (\text{div}\,\vec{P})\,d\tau = \iint_{\Sigma_0} (\vec{P}\cdot\vec{n})\,dS$$

or $$\Sigma_0 = \Sigma - \Sigma'$$

ce qui donne :

$$\iint_{\Sigma_0} (\vec{P}\cdot\vec{n})\,dS + \iint_{\Sigma'} (\vec{P}\cdot\vec{n})\,dS = \iint_\Sigma (\vec{P}\cdot\vec{n})\,dS = 0$$

car l'intégrale $\iint_\Sigma (\vec{P}\cdot\vec{n})\,dS$ est nulle puisque $\vec{P}$ est nul partout où il n'y a pas de diélectrique, et en particulier sur la surface Σ.

On aboutit à :

$$\iiint_\tau \text{div}\,(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})\,d\tau = q_{réel}$$

A condition de prendre comme définition du vecteur induction dans le vide

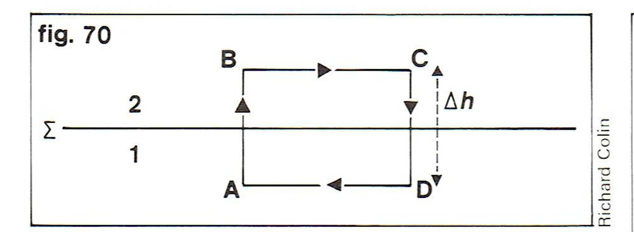
$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

on voit que $\iiint_\tau (\text{div}\,\vec{D})\,d\tau = \iiint_\tau \rho_{v\,réel}\,d\tau$

Donc $$\text{div}\,\vec{D} = \rho_{v\,réel}$$

Nous voyons ainsi que seule la densité volumique de charges réelles intervient dans cette équation. Par suite, on peut affirmer que le vecteur induction électrique est créé seulement par les charges réelles.

Le **théorème de Gauss** peut ainsi s'énoncer, qu'il y ait ou non un diélectrique : *le flux du vecteur induction* $\vec{D}$, *à travers une surface fermée quelconque, est égal à la somme des charges réelles situées à l'intérieur de cette surface.*



Nous voyons que, dans le vide, $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ puisque $\vec{P}$ est nul. Dans les diélectriques, les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{D}$ ont des propriétés différentes. C'est pourquoi nous allons voir comment se comportent ces vecteurs lors du passage d'un diélectrique à un autre, cet autre diélectrique pouvant être le vide.

Composante tangentielle de $\vec{E}$

Considérons d'abord le vecteur $\vec{E}$ à l'intérieur d'un diélectrique, et plus particulièrement sa composante tangentielle. En tout point, ce vecteur $\vec{E}$, dérivant d'un potentiel, est tel que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = 0$. Cela équivaut mathématiquement au fait que la composante tangentielle de $\vec{E}$ se conserve quand on passe d'un milieu diélectrique 1 à un milieu diélectrique 2.

Donc $$E_{T1} = E_{T2}$$

On peut le démontrer également en considérant la *figure* 70 qui représente deux diélectriques d'indices 1 et 2, séparés par une surface de séparation Σ.

On choisit un parcours rectangulaire ABCD à cheval sur la surface de séparation Σ et tel que la largeur AB = CD = Δh est un infiniment petit d'ordre 2 par rapport à la longueur BC = DA de ce parcours rectangulaire.

Supposons qu'une charge-étalon suive le parcours fermé ABCD. Comme, même en présence d'un diélectrique, le champ $\vec{E}$ dérive d'un potentiel, on a :

$$\oint_{\text{ABCD}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

or, puisque Δh est un infiniment petit d'ordre 2 :

$$\int_{\Delta h} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

donc $$\int_{\text{BC}} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_{\text{DA}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

et comme les parcours BC et DA sont petits, $\vec{E}$ peut être considéré comme constant sur ces parcours.

D'autre part, comme $|\text{BC}| = |\text{DA}|$, on a donc bien :

$$E_{T1} = E_{T2}$$

Ainsi la composante tangentielle de $\vec{E}$ est continue à la traversée de la surface de séparation de deux milieux.

Composante normale de $\vec{D}$

Soit la *figure* 71 représentant la surface de séparation Σ entre deux milieux 1 et 2 et un petit cylindre de hauteur Δh, et de surface de base ΔS. Soit la normale $\vec{n}$ orientée du milieu 1 vers le milieu 2. Le flux du vecteur $\vec{D}$ à travers ce cylindre est :

$$\psi = (\vec{D}_2 \cdot \vec{n} - \vec{D}_1 \cdot \vec{n})\, dS$$

cela, car le flux à travers Δh est nul.

Or, d'après le théorème de Gauss, ce flux est aussi égal à la charge réelle contenue dans le petit cylindre : soit σdS.

Donc $$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\,\vec{n} = \sigma_{réel}$$

que l'on peut écrire : $D_{N2} - D_{N1} = \sigma_{réel}$

Ainsi, la composante normale du vecteur induction $\vec{D}$ subit, à la traversée de la surface de séparation des deux milieux, une discontinuité égale à la densité de charges réelles sur cette surface. Remarquons que le comportement de la composante tangentielle de $\vec{D}$ dépend de la relation liant $\vec{E}$ et $\vec{D}$.

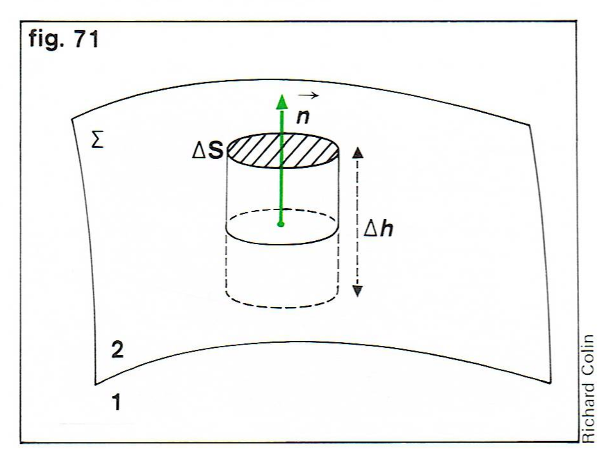


fig. 72

Richard Colin

◀ *A gauche, figure 70 : établissement de l'égalité de la composante tangentielle du vecteur $\vec{E}$. A droite, figure 72 : réfraction des lignes de champ en l'absence de charges superficielles.*

Réfraction des lignes de champ en l'absence de charges superficielles

Puisque la surface de séparation des milieux 1 et 2 n'est pas chargée, il y a donc conservation de la composante normale de $\vec{D}$. Donc $D_{N1} = D_{N2}$ (*fig.* 72a).

Soit encore : $\varepsilon_1 E_{N1} = \varepsilon_2 E_{N2}$

D'autre part, il y a conservation de la composante tangentielle de $\vec{E}$.

Soit $E_{T1} = E_{T2}$ (*fig.* 72b).

Ces deux égalités se traduisent par la relation :

$$\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$$

et $$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$

soit $$\frac{\text{tg}\,\theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\text{tg}\,\theta_2}{\varepsilon_2}$$

soit encore $$\frac{\text{tg}\,\theta_1}{\text{tg}\,\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Diélectriques linéaires, homogènes et isotropes (l. h. i.)

Un diélectrique est l. h. i. si le vecteur polarisation $\vec{P}$ est proportionnel au champ électrique, donc :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

χ_e étant la *susceptibilité électrique* du milieu :

or $$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)\, \vec{E} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

◀ *Figure 71 : établissement de la formule : $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\,\vec{n} = \sigma_{réel}$.*

D'autres corps, tel le fer, n'acquièrent la propriété de créer un champ en leur voisinage qu'après avoir été préalablement soumis au « champ excitateur » d'un solénoïde, par exemple. Deux cas peuvent alors se produire selon la nature de ces substances.

Certains corps, appelés *ferromagnétiques,* conservent la propriété lorsque le champ excitateur cesse. Le fer, le cobalt font partie de cette catégorie. C'est pourquoi ils peuvent servir à fabriquer des aimants permanents.

Chez d'autres corps cette propriété disparaît avec le champ excitateur. On a alors affaire à des *corps diamagnétiques.*

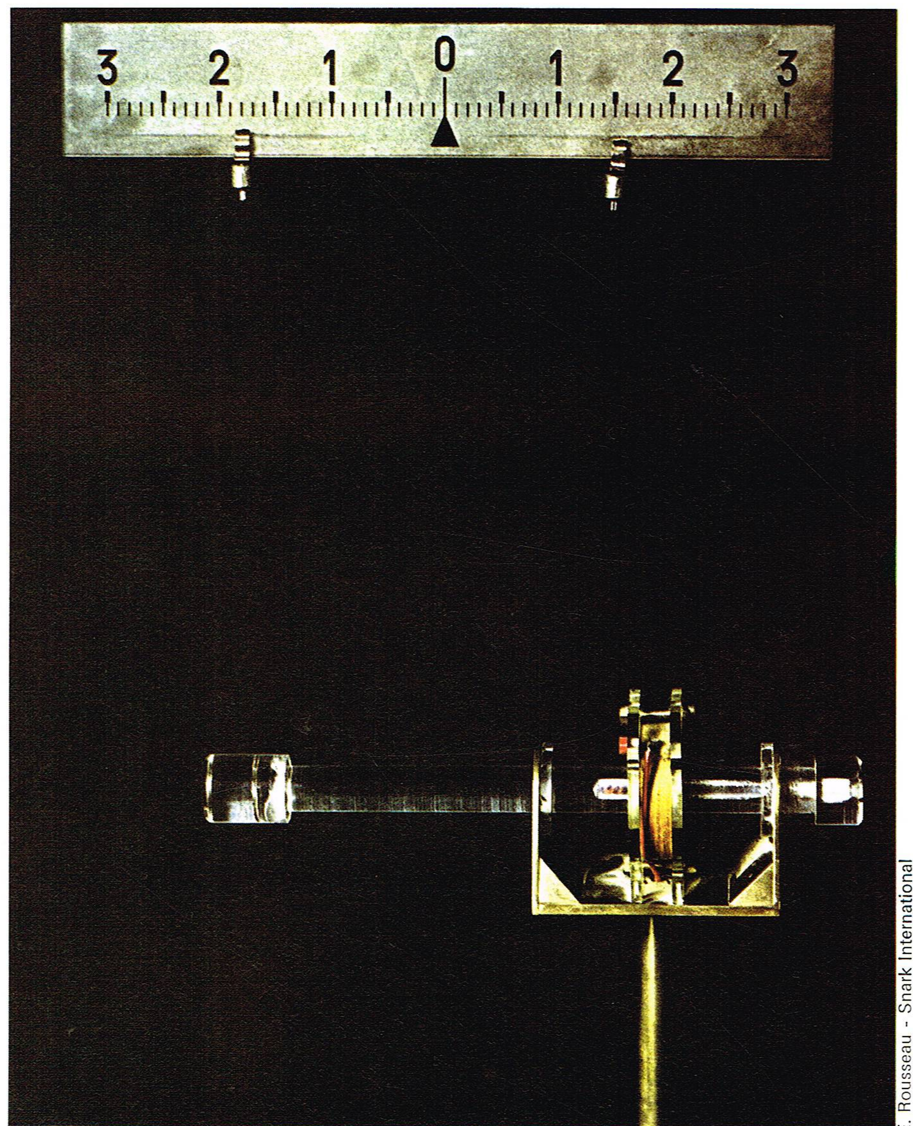
Analogie entre les aimants et les courants

Tout d'abord, rappelons qu'un élément de circuit $\vec{dl}$ parcouru par un courant I et placé dans un champ $\vec{B}$ est soumis à la force de Laplace $d\vec{F} = I\vec{dl} \wedge \vec{B}$.

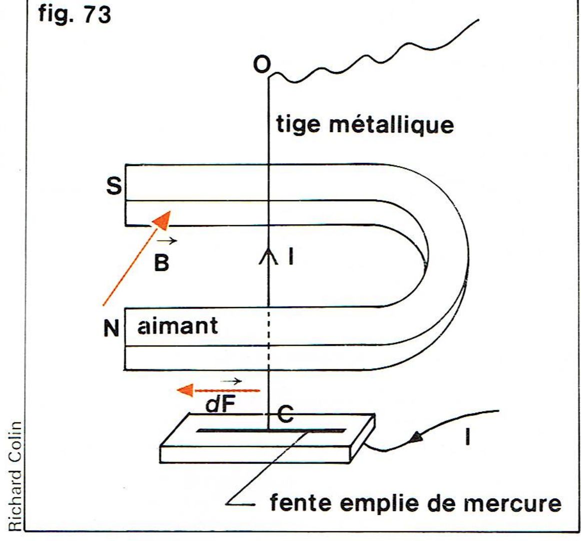
Plusieurs expériences ont déjà été décrites lorsque le champ $\vec{B}$ est produit par un solénoïde, par exemple. L'élément $\vec{dl}$ est effectivement soumis à la force $d\vec{F}$.

Réalisons à présent l'expérience suivante (*fig.* 73) : une tige métallique qui peut se mouvoir librement autour d'un point O est placée dans l'entrefer d'un aimant et plonge dans une fente remplie de mercure. Un courant I peut y circuler, faisant contact avec le bout de la tige en C. Si le courant a le sens indiqué sur la figure, on constate la présence d'une force allant par exemple de droite à gauche, entraînant la tige dans la fente. C'est donc qu'il existe un champ $\vec{B}$, allant d'une extrémité de l'aimant vers l'autre; dans le cas de la *figure* 73, le pôle nord de l'aimant est situé vers l'avant de la feuille. Si l'on retourne l'aimant, ou si l'on change le sens du courant, on constate que le fil se déplace en sens inverse, donc que la force a changé de sens.

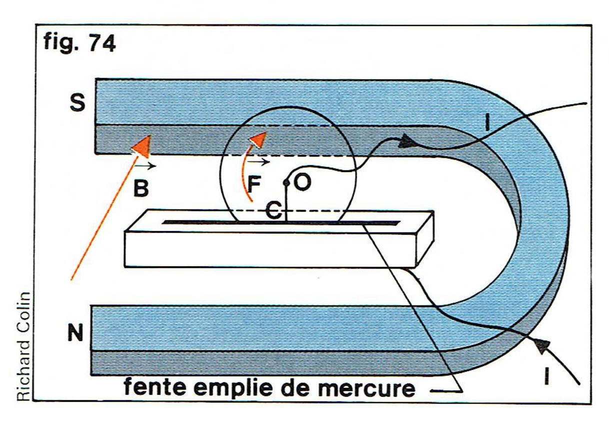
Une autre expérience célèbre est celle de la *roue de Barlow* (*fig.* 74) où l'on remplace le fil OC par une roue métallique pouvant tourner autour de son axe O. Si, comme dans l'expérience précédente, la roue est placée entre les



▲ ***Aimant mobile par rapport à une bobine reliée à un galvanomètre.***



▶ ***Figure 73 : la tige étant soumise à une force, c'est qu'il existe un champ magnétique $\vec{B}$ allant d'une extrémité de l'aimant vers l'autre.***



▶ ***Figure 74 : expérience de la roue de Barlow.***

avec $\varepsilon = \varepsilon_0\,(1 + \chi_e)$ et $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

ε_r s'appelle *permittivité relative* du milieu.

Comme div $\vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$ et que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$, on obtient aussi l'équation de Poisson $\nabla^2 V + \frac{\rho_v}{\varepsilon} = 0$.

C'est donc la même relation que dans le vide, mais à la condition de remplacer ε_0 par ε.

Remarquons que, si le diélectrique ne contient pas de charges volumiques ($\rho_v = 0$), on a alors div $\vec{E} = 0$.

Donc la charge totale $\rho_0 = \rho_p = -\text{div}\,\vec{P} = -\text{div}\,(\varepsilon_0\chi_e\vec{E})$

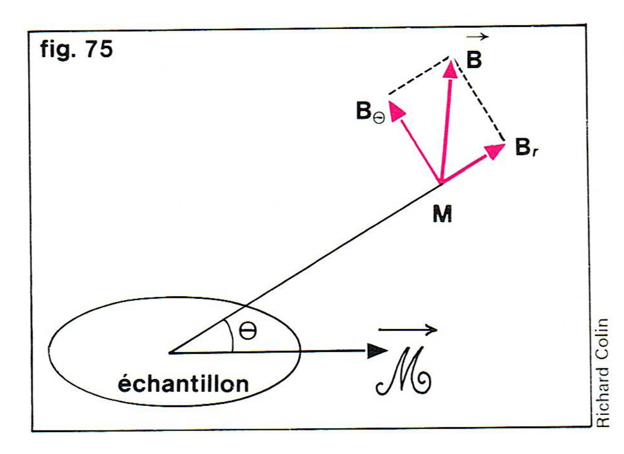
$$\rho_0 = \rho_p = -\chi_e\varepsilon_0\,\text{div}\,\vec{E} = 0$$

Donc il n'y a pas du tout de charges volumiques; il ne reste que des charges superficielles $\sigma_0 = \sigma_{réelle} + \sigma_p$.

Une seconde remarque peut être faite pour les diélectriques (l. h. i.). En effet, comme $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ à la traversée de la surface de séparation entraîne la continuité de la composante tangentielle de $\vec{D}$.

Les milieux aimantés

Il existe sur terre certains corps, comme l'oxyde de fer Fe_3O_4, qui ont les mêmes propriétés magnétiques que celles des courants électriques : par exemple, tout comme un courant électrique, ils créent un champ magnétique $\vec{B}$ en leur voisinage.



deux pôles d'un aimant, on constate qu'elle tourne autour de son axe. Si l'aimant est placé comme sur la figure, la roue tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Dans le cas où l'on inverse le sens du courant ou si l'on retourne l'aimant, la roue tourne dans le sens opposé.

Ces deux expériences montrent donc l'analogie, sur le plan magnétique, entre un conducteur parcouru par un courant et un aimant.

C'est Ampère, qui, en 1825, interpréta cette analogie en faisant intervenir des « courants particulaires » au sein même de la matière. Cela rejoint effectivement les théories modernes de la matière selon lesquelles un électron tourne autour de son noyau, créant ainsi un courant et faisant ainsi une boucle équivalente à un moment magnétique.

Doublets ou dipôles magnétiques

L'expérience de Gauss montre qu'un petit échantillon de matière placé dans un champ magnétique uniforme se trouve soumis uniquement à un couple de moment $\vec{\Gamma}$ qui tend à l'orienter dans le sens de $\vec{B}$. Nous voyons une certaine analogie entre le comportement de cet échantillon et celui d'un dipôle électrique ou d'une spire plane parcourue par un courant. Ils subissent les mêmes effets d'orientation. Aussi, par analogie, on peut associer à cet échantillon de matière aimantée un moment magnétique $\overrightarrow{\Delta m}$ tel que, placé dans le champ $\vec{B}$, il soit soumis au couple $\vec{\Gamma} = \overrightarrow{\Delta m} \wedge \vec{B}$ (comme pour une spire parcourue par un courant I).

On dit ainsi que le morceau d'échantillon considéré est assimilable à un *doublet magnétique* ou *dipôle magnétique*, caractérisé par un moment $\overrightarrow{\Delta m}$. L'échantillon pris dans sa totalité est formé d'un ensemble de tels doublets magnétiques. Son moment $\vec{\mathcal{M}}$ est la somme des moments $\overrightarrow{\Delta m}$.

Ainsi $\vec{\mathcal{M}} = \Sigma \overrightarrow{\Delta m}$ et $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$

Le champ $\vec{B}$ a donc un effet d'orientation pour le couple qu'il crée.

Une aiguille magnétique placée dans un champ magnétique s'oriente dans la direction de ce champ. Elle sert ainsi à repérer la direction du champ. Nous avons dit que la substance aimantée était équivalente à un doublet magnétique de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$. Nous pouvons poursuivre l'analogie avec le dipôle électrique de moment électrique $\vec{p}$. Nous savons qu'un tel dipôle crée en un point M un champ électrique dont les composantes, radiale et tangentielle, sont :

$$E_r = \frac{2\,p}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sin\theta}{r^3}$$

Nous pouvons poursuivre l'analogie et dire que le dipôle magnétique que constitue la matière aimantée crée en un point M un champ magnétique (*fig.* 75) dont les composantes sont :

$$B_r = \frac{2\,\mu_0\mathcal{M}}{4\,\pi}\cdot\frac{\cos\theta}{r^3}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\,\pi}\cdot\frac{\sin\theta}{r^3}$$

Dans ces formules, on a remplacé simplement ε_0 par $\frac{1}{\mu_0}$.

◀ ***Figure 75;*** ***le dipôle magnétique que constitue la matière aimantée crée en un point M un champ magnétique $\vec{B}$ dont les composantes sont :*** $B_r = \frac{2\,\mu_0\mathcal{M}}{4\,\pi}\cdot\frac{\cos\theta}{r^3}$ ***et*** $B_\theta = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\,\pi}\cdot\frac{\sin\theta}{r^3}$

Masses magnétiques - Loi de Coulomb

Le parallélisme entre doublet électrique et doublet magnétique nous permet d'introduire l'équivalent des charges électriques $+q$ et $-q$. Ce sont les *masses magnétiques* $-m$ et $+m$. On peut alors définir, comme en électrostatique, le moment magnétique $|\vec{\mathcal{M}}| = dm$ (avec d qui est la distance entre les deux masses magnétiques $+m$ et $-m$).

Ce moment magnétique est dirigé de la masse $-m$ vers la masse $+m$. Les masses magnétiques n'ont ici qu'un caractère fictif. Cependant, une masse magnétique m produirait à la distance r le *potentiel magnétique* $V^* = \frac{\mu_0 m}{4\,\pi r}$ l'astérisque signifie « magnétique ».

Ce potentiel dériverait de l'induction magnétique $\vec{B}$. $\vec{B} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V^*$. Sa valeur algébrique serait $\frac{\mu_0 m}{4\,\pi r^2}$. On voit qu'il y a analogie parfaite entre les grandeurs appliquées à un dipôle électrique et celles appliquées à un dipôle magnétique à condition de remplacer q par m et ε_0 par $\frac{1}{\mu_0}$ et le champ $\vec{E}$ par le champ $\vec{B}$. Le potentiel électrique créé par les charges dans $d\tau$ en un point M s'exprime par :

$$dV = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\vec{\mathcal{M}}\cdot\overrightarrow{\text{grad}_N}\,\frac{1}{r}$$

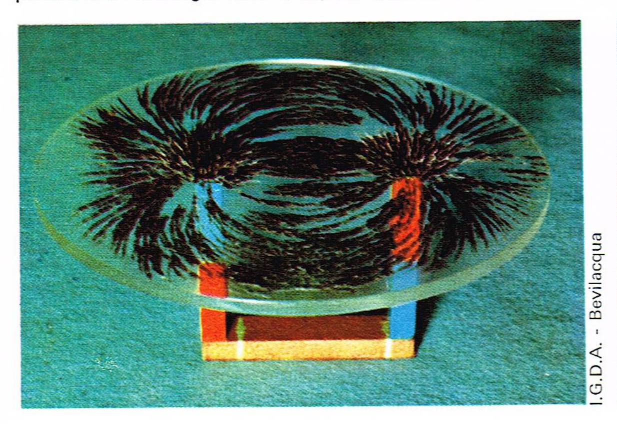
tandis que le potentiel magnétique s'écrit :

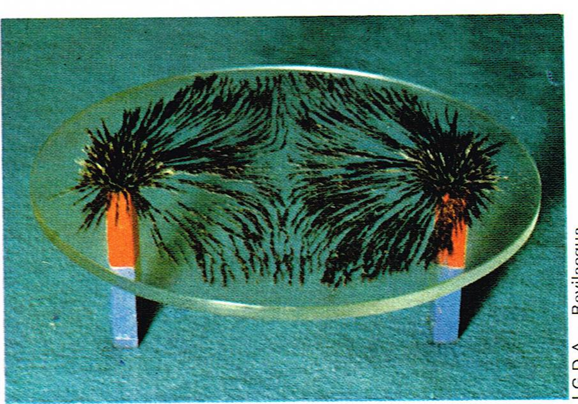
$$dV^* = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\vec{\mathcal{M}}\cdot\overrightarrow{\text{grad}_N}\,\frac{1}{r}$$

Il reste à présent à déterminer la force s'exerçant sur une masse magnétique m placée dans un champ uniforme $\vec{B}$ de sorte qu'on retrouve la valeur du moment magnétique $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$. Cette force ne peut être que de la forme $\vec{F} = m\vec{B}$, de sorte que la force s'exerçant sur deux masses magnétiques m et m' séparées par la distance r soit :

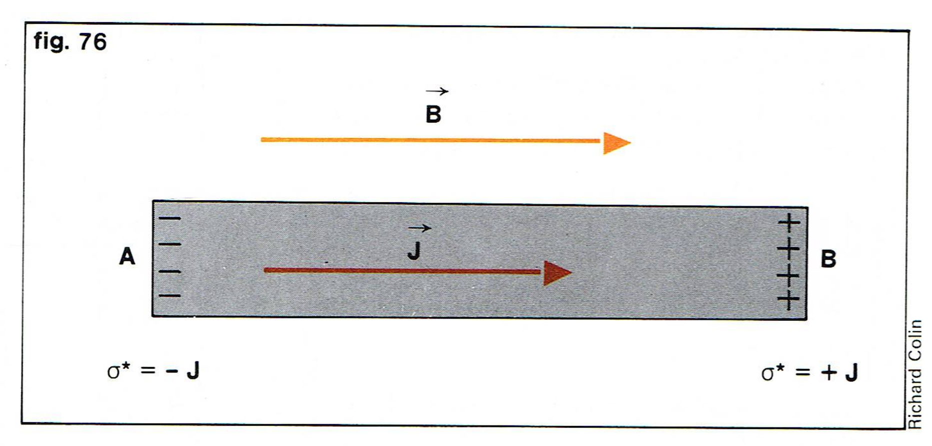
$$|\vec{F}| = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{mm'}{r^2}$$

Cette expression, analogue à celle rencontrée en électrostatique, est appelée **loi de Coulomb.**





◀ ***Répartition des lignes de force d'un champ magnétique : à gauche, configuration du champ généré par les deux pôles d'un aimant; à droite, configuration du champ généré par les pôles de même signe de deux aimants.***



▲ *Figure 76 : le barreau d'acier étant soumis au champ $\vec{B}$ parallèle à ses génératrices, il n'apparaît de masses magnétiques que sur les faces* A *et* B.

Analogies entre les milieux polarisés et les milieux aimantés

Soit un volume τ de matière aimantée. Nous avons dit qu'il était formé d'une assemblée de dipôles magnétiques. Soit un élément de volume $d\tau$ autour d'un point N et assimilable à un doublet magnétique $d\vec{\mathcal{M}}$. On définit alors le vecteur *intensité d'aimantation* par $\vec{J} = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{d\tau}$, variable en tout point de la substance aimantée. Cette intensité d'aimantation se mesure en ampères par mètre (A/m) dans le système M. K. S. A.

Nous avons vu que cette matière aimantée créait un champ magnétique en un point extérieur M et qu'il dérivait d'un potentiel V*. Par une analogie totale des calculs que nous avons faits sur les milieux électriques polarisés, nous trouvons :

$$V^* = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iint_\Sigma (\vec{J} \cdot \vec{n})\, dS + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau (-\operatorname{div} \vec{J})\, d\tau$$

Σ étant la surface de la matière aimantée et τ son volume. $\vec{J} \cdot \vec{n} = J_N$ désigne la composante normale extérieure de $\vec{J}$. Ainsi, en chaque point, la matière aimantée a une *densité superficielle de masses magnétiques* $\sigma = J \cos \theta$, θ étant l'angle entre $\vec{J}$ et la normale orientée vers l'extérieur, et une *densité volumique* $\rho_v = -\operatorname{div} \vec{J}$.

Ainsi un volume de matière aimantée produit en tout point extérieur la même induction magnétique qu'une assemblée de masses magnétiques réparties sur la surface délimitée par le volume avec la *densité superficielle* $\sigma^* = \vec{J} \cdot \vec{n}$ et la densité volumique $\rho_v^* = -\operatorname{div} \vec{J}$.

Dans le cas particulier de l'aimantation uniforme, c'est-à-dire $\vec{J}$ = constante, nous voyons que $\rho_v^* = 0$, donc que les masses magnétiques sont localisées sur la surface. C'est le cas d'un barreau d'acier (*fig.* 76) placé dans un champ magnétique constant $\vec{B}$, parallèle aux génératrices du barreau. Alors $\vec{J}$ est aussi constant.

Il n'apparaît de masses magnétiques que sur les faces A et B, puisque, sur les faces latérales, on a $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$ (les normales étant dirigées vers l'extérieur du barreau). Donc, sur la face A, il apparaît la densité superficielle de masses magnétiques $\vec{J} \cdot \vec{n} = -J$, tandis que sur la face B apparaît $+J$.

Courants ampériens équivalents

Nous avons vu que, lorsqu'une substance aimantée était soumise à un champ magnétique $\vec{B}$, il apparaissait un vecteur intensité d'aimantation $\vec{J}$. Nous allons à présent montrer que les dipôles magnétiques de cette substance sont équivalents à des courants ampériens volumiques $\vec{J_\tau^*}$ et surfaciques $\vec{J_S^*}$ tels que

$$\vec{J_\tau^*} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{J} \text{ et } \vec{J_S^*} = \vec{J} \wedge \vec{n}$$

En effet, nous avons vu que le potentiel vecteur $\vec{A}$ en un point M pouvait s'écrire :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{\text{grad}_N} \left(\frac{1}{r}\right)$$

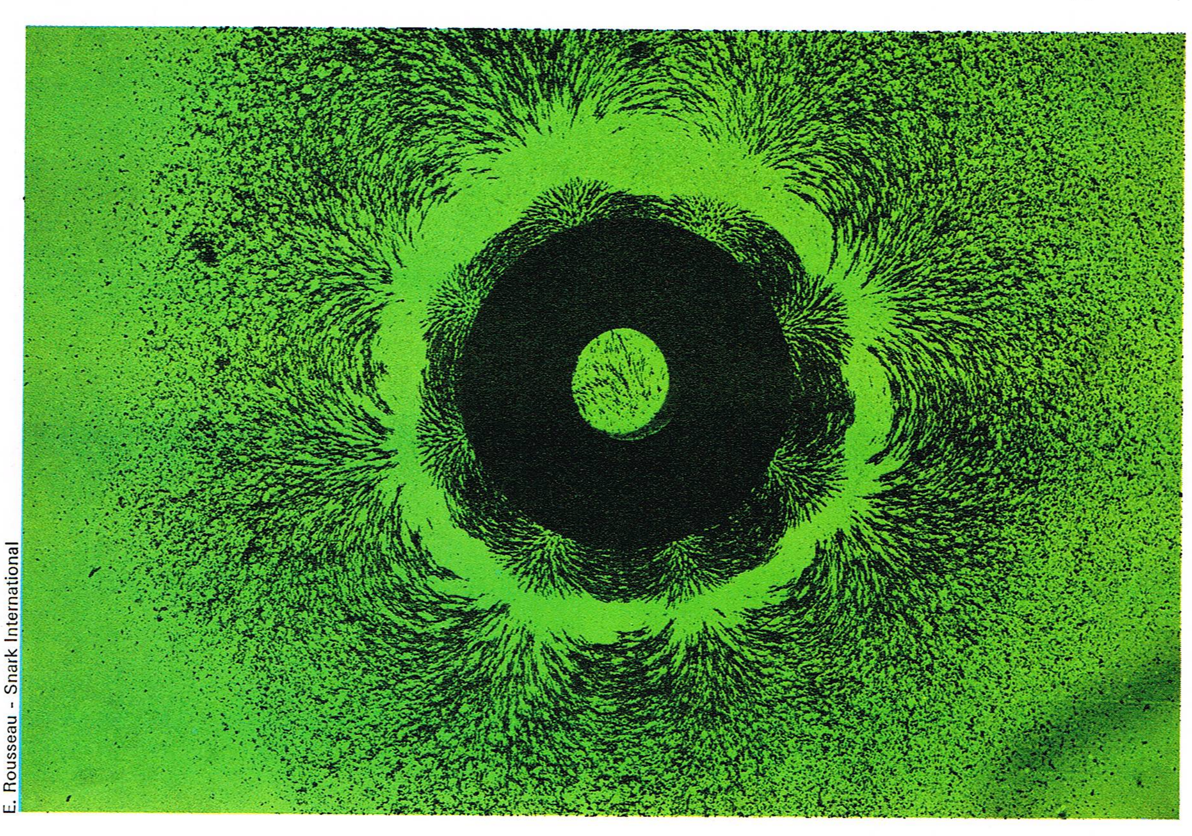
Or, comme $\vec{J} = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{d\tau}$, $\vec{A}$ peut s'écrire (*fig.* 76) :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \vec{J} \wedge \overrightarrow{\text{grad}_N} \left(\frac{1}{r}\right) d\tau$$

Or, si l'on considère un scalaire m et un vecteur $\vec{C}$, on a l'identité vectorielle : $\overrightarrow{\text{rot}}\,(m\vec{C}) = m\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{C} - \vec{C} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, m$.

On peut dans notre cas écrire que :

$$\vec{J} \wedge \overrightarrow{\text{grad}_N} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} \overrightarrow{\text{rot}_N}\, \vec{J} - \overrightarrow{\text{rot}_N} \left(\frac{\vec{J}}{r}\right)$$



▶ *Spectre magnétique engendré par un aimant multipolaire.*

soit :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{1}{r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}_N (\vec{J})\, d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \overrightarrow{\mathrm{rot}}_N \left(\frac{\vec{J}}{r}\right) d\tau$$

La seconde intégrale peut être transformée par la *formule* dite *du rotationnel :*

$$\iiint_\tau \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{C}\, d\tau = \iint_\Sigma d\vec{S} \wedge \vec{C}\, dS$$

Σ étant une surface sur laquelle s'appuie τ. Donc :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{1}{r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}_N (\vec{J})\, d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_\Sigma \frac{d\vec{S} \wedge \vec{J}}{r}$$

Or, si l'on considère un système de courants répartis dans un volume τ avec la densité volumique $\vec{J}_\tau$, on a vu que le potentiel vecteur $\vec{A}$ était de la forme :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{\vec{J}_\tau \cdot d\tau}{r}$$

Il est facile alors de voir que la matière aimantée peut être assimilée à une densité de courant :

$$\vec{J}^*_\tau = \overrightarrow{\mathrm{rot}}_N (\vec{J})$$

l'astérisque signifie qu'il s'agit de courants équivalents. Il est de la même manière facile d'établir que cette matière aimantée peut être assimilée à une densité surfacique de courant :

$$\vec{J}^*_S = \vec{J} \wedge \vec{n}$$

$\vec{n}$ étant la normale orientée vers l'extérieur de la surface.

Nous allons à présent illustrer cette formule par un exemple. Soit un cylindre de révolution uniformément aimanté et placé dans un champ magnétique constant (*fig.* 77). Il apparaît un vecteur intensité d'aimantation $\vec{J}$ parallèlement aux génératrices du cylindre (dans la direction du champ « magnétisant »). $\vec{J}$ étant une constante :

$$\vec{J}^*_\tau = \overrightarrow{\mathrm{rot}}_N(\vec{J}) = 0$$

Donc il n'apparaît que des courants superficiels. Or, sur les faces O et O', $\vec{n}$ et $\vec{J}$ sont parallèles. Donc $\vec{J}^*_S$ y est nul. Par contre, sur la surface latérale du cylindre, $\vec{J}^*_S$ existe. En effet considérons sur la *figure* 77 une section droite. On voit que J^*_S est tangent à cette section droite et est normal à son axe.

Milieux magnétiques linéaires, homogènes et isotropes (l. h. i.)

Sont appelés l. h. i. les milieux dans lesquels $\vec{J}$ est proportionnel à $\vec{H}$, le coefficient de proportionnalité étant partout le même et indépendant de la direction de $\vec{H}$. Ainsi

$$\vec{J} = \chi_m \vec{H}$$

χ_m est appelée la *susceptibilité magnétique* du milieu or $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 \vec{H}\, (1 + \chi_m)$

Donc $\vec{B} = \mu \vec{H}$ avec $\mu = \mu_0\,(1 + \chi_m)$.

La perméabilité relative :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m$$

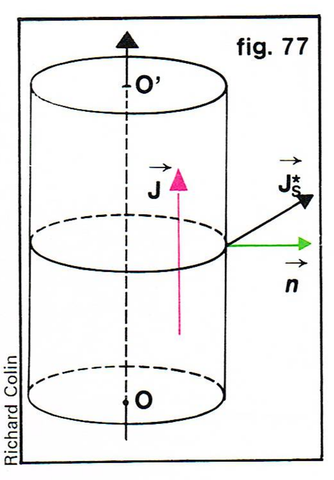
Les milieux magnétiques parfaits sont constitués par les *substances para-* et *diamagnétiques.* Ce n'est pas le cas pour les substances *ferromagnétiques.*

Diamagnétisme et paramagnétisme

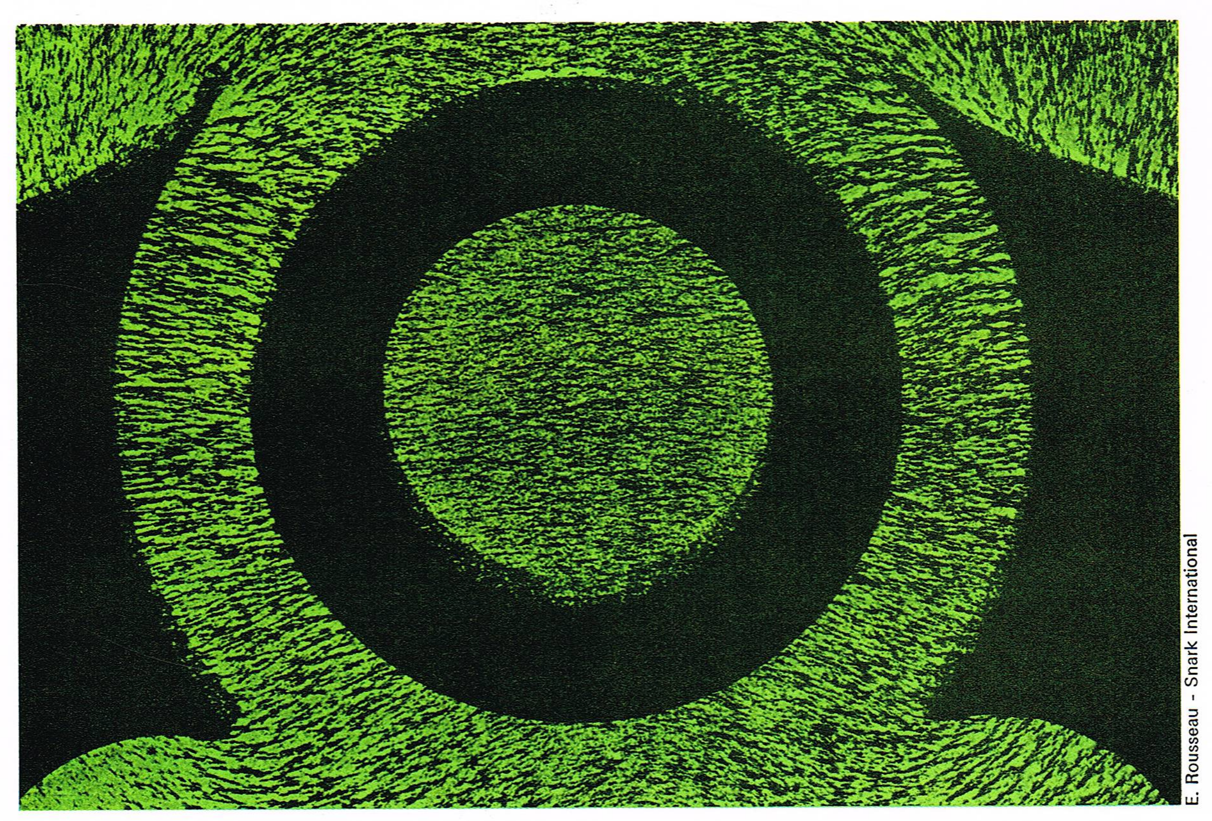
Pour les substances diamagnétiques, $\vec{J}$ et $\vec{H}$ sont proportionnels, mais ils sont antiparallèles. Aussi χ_m est négatif et toujours très faible, de l'ordre de 10^{-5} en moyenne. Par contre, pour les substances paramagnétiques, $\vec{J}$ et $\vec{H}$ sont parallèles. χ_m est donc positif et en moyenne plus grand que pour les diamagnétiques (de l'ordre de 10^{-3} en moyenne).

Ferromagnétisme

Les corps ferromagnétiques sont tels que les propriétés de l'aimantation sont très différentes de celles des substances dia- et paramagnétiques. Ces différences sont les suivantes ; le vecteur intensité d'aimantation $\vec{J}$ peut prendre des valeurs très grandes, même pour des champs excitateurs très faibles. Cette aimantation peut subsister même en l'absence de champ. Cela ne se produit qu'à des températures inférieures à une température T_C appelée « point de Curie », caractéristique de chaque corps ferromagnétique. Au-dessus de cette température, le corps devient paramagnétique. En outre, la loi de variation de la susceptibilité est $\chi_m = \dfrac{C}{T - T_C}$ où T_C est une constante qui caractérise la substance. Cette loi est la **loi de Weiss-Curie.**



▲ ***Figure 77 :*** ***le cylindre étant soumis au champ $\vec{B}$ constant, il n'apparaît que des courants superficiels $\vec{J}^*_S$.***

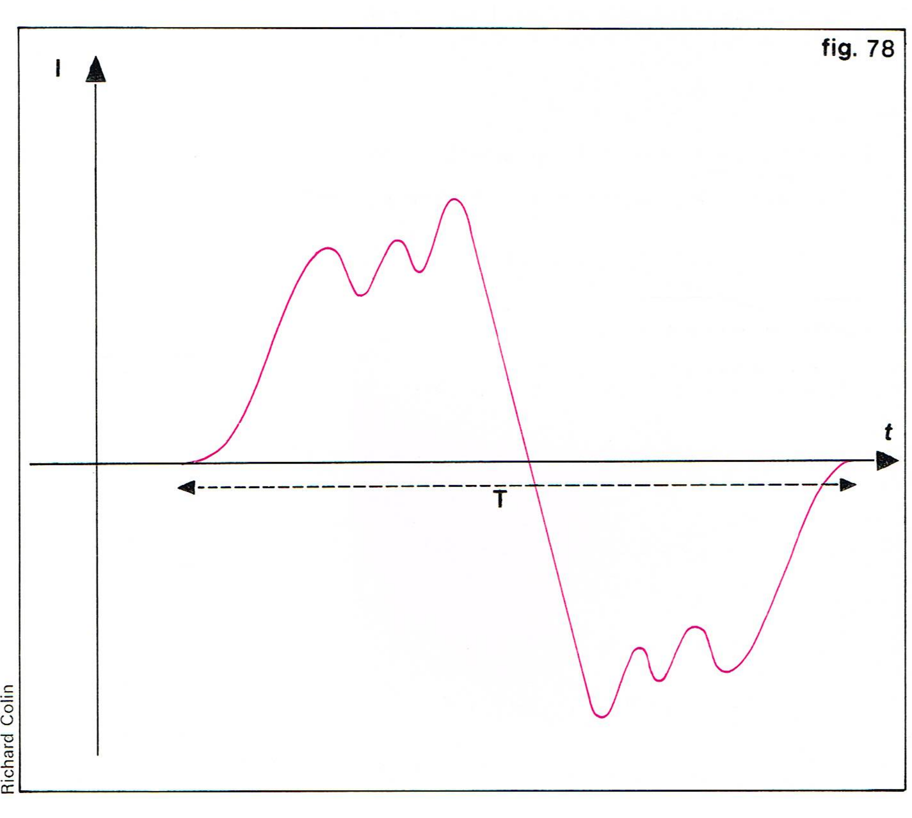


◄ ***Champ magnétique radial engendré par un aimant circulaire.***

Belzeaux - Rapho

▲ ***Pylônes porteurs de câbles haute-tension.***

▼ ***Figure 78 : définition d'une fonction périodique.***



Richard Colin

Le courant alternatif

Un courant d'intensité variable est *périodique* lorsqu'il reprend la même valeur en des instants séparés par le même intervalle de temps, appelé sa période T. Mathématiquement $i\ (t) = i\ (t + n\mathrm{T})$.

Ce courant périodique est dit *alternatif* lorsque sa valeur moyenne dans le temps est nulle. Cette valeur moyenne est aussi nulle sur une période (*fig.* 78). Cela se traduit par :

$$\int_0^{\mathrm{T}} i\ (t)\ dt = 0$$

Si, de plus, le courant alternatif est sinusoïdal, il est une fonction sinusoïdale du temps. On peut alors le représenter, par exemple, par $i = \mathrm{I}_m \sin\ (\omega t)$ où I_m est l'intensité maximale, ω la pulsation liée à la période par la formule $\omega = \frac{2\ \pi}{\mathrm{T}} = 2\pi\mathrm{N}$.

Dans cette dernière égalité, N représente la fréquence. C'est l'inverse de la période : $\mathrm{N} = \frac{1}{\mathrm{T}}$

Remarquons que toute fonction alternative quelconque, non sinusoïdale, peut se décomposer en série de Fourier, de fréquences N, 2 N, 3 N, etc., que l'on appelle fréquence fondamentale, et ses différents harmoniques. C'est ainsi qu'un courant alternatif, non sinusoïdal, peut être décomposé en une somme de courants sinusoïdaux de fréquences N, 2 N, 3 N...

Ces divers harmoniques ont des comportements tout à fait différents, de sorte que l'étude d'un courant alternatif non sinusoïdal est généralement difficile. C'est pour cela que nous nous bornerons à l'étude de courants strictement sinusoïdaux, donc représentés par la formule

$$i = \mathrm{I}_m \sin\ (\omega t)$$

De manière grossière, notons que l'on peut classer les courants d'après leur fréquence. En Europe, et en France

en particulier, la fréquence du réseau de distribution est de 50 Hz. Les courants téléphoniques varient de 100 Hz à 10 kHz. Les courants haute fréquence sont compris entre 100 kHz et 10 GHz.

Lois générales sur les courants alternatifs

On peut dire que, en général, le comportement d'un courant alternatif se rapproche d'autant plus de celui d'un courant continu que sa fréquence est moins grande.

Dans l'étude que nous ferons ultérieurement, nous admettrons deux conditions concernant le courant i, conditions vérifiées à la fréquence du réseau (50 Hz).

La première condition est valable lorsque les dimensions du circuit sont négligeables vis-à-vis de la longueur d'onde de l'onde électromagnétique associée au courant i et ayant la même fréquence que ce courant i. Cette condition est la suivante : l'intensité a la même valeur en tous les points du circuit. On voit par exemple, à la fréquence du réseau qui est de 50 Hz, que

$$\lambda = \frac{c}{N} = \frac{300\,000}{50} = 6\,000 \text{ km},$$

ce qui satisfait à la condition ci-dessus énoncée.

La seconde condition est la répartition uniforme du courant dans une section droite, autrement dit une densité de courant uniforme. Cette condition se trouve aussi réalisée à la fréquence du réseau. Elle est d'autant moins réalisée que la fréquence augmente, car alors intervient l'*effet de peau*, qui tend à répartir le courant à la périphérie du conducteur, sur une certaine épaisseur dite *épaisseur de peau*. Dans le cas qui nous intéresse, à la fréquence du réseau, la résistance est :

$$R = \frac{\rho l}{s}$$

(où ρ est la résistivité, l la longueur et s la section du conducteur).

Comment produit-on des courants alternatifs? De tels courants sont produits par des alternateurs dont le principe est très simple. Supposons par exemple que l'on ait un cadre comprenant N spires, chaque spire ayant une surface S, et que ce cadre soit placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ (*fig.* 79). Si l'on choisit un sens de parcours sur la spire, cela permet d'orienter une normale $\vec{n}$ positivement. La position du cadre est déterminée par l'angle θ que fait cette normale avec le champ $\vec{B}$. On suppose également que le cadre peut tourner autour d'un axe perpendiculairement au plan déterminé par $\vec{B}$ et $\vec{n}$.

En admettant que le cadre puisse tourner avec une vitesse angulaire constante ω, alors $\theta = \omega t$. Le flux à travers ce cadre est :

$$\Phi = N\vec{B}\cdot\vec{S} = NBS\cos\theta = NBS\cos\omega t$$

Or, la f. é. m. induite est donnée par la formule $e = \dfrac{-d\Phi}{dt}$

donc : $e = NBS\,\omega\sin\omega t$.

Si l'on peut relier ce cadre à un circuit extérieur, par des contacts mobiles, alors ce circuit extérieur est le siège d'un courant alternatif dont la pulsation est la même que celle du cadre mobile, c'est-à-dire ω.

Ce cadre tournant joue ainsi le rôle d'un générateur que l'on appelle *alternateur*.

Remarquons que le courant induit n'est en général pas en phase avec la f. é. m. qui l'a produit; c'est-à-dire que, si la f. é. m. est de la forme $e = E_m\sin\omega t$, le courant induit s'écrira $i = I_m\sin(\omega t + \varphi)$, où φ est l'angle de phase. L'existence d'un déphasage signifie que le courant ne s'établit pas simultanément avec la f. é. m. Il s'établit avec une certaine avance ou un certain retard sur la f. é. m. Notons que ce type d'alternateur est à induit mobile.

Il existe un autre type d'alternateur, à induit fixe, où un aimant se déplaçant périodiquement devant une bobine y crée un courant alternatif.

A présent que nous avons défini un courant alternatif, il ne nous reste plus qu'à étudier ses propriétés. Nous pouvons dire à ce sujet que toutes les propriétés des courants continus s'appliquent aux courants alternatifs lorsqu'il s'agit de valeurs instantanées. En effet, cela s'explique par le fait que, pendant un petit intervalle de temps, l'intensité ne varie pratiquement pas.

Intensité efficace d'un courant alternatif

L'intensité efficace d'un courant alternatif est l'intensité du courant continu qui dégagerait dans la même résistance, et pendant le même temps, la même quantité de chaleur par effet Joule.

C'est l'ampèremètre thermique, dont l'inertie est grande, qui mesure l'intensité efficace d'un courant alternatif. Aussi l'intervalle de temps utilisé pour faire la mesure doit-il être grand devant une période.

Évaluons donc l'énergie moyenne dissipée par effet Joule et égalons-la à la puissance dissipée pendant le même temps (une période) par un courant continu. Pendant l'intervalle de temps dt, l'énergie dissipée est :

$$dW = Ri^2dt$$

R étant la résistance dans laquelle passe le courant.

Posons $\quad i = I_m\sin\omega t$

Ainsi, $\quad dW = RI_m^2\sin^2\omega t$

Le travail sur une période est : $W = RI_m^2\displaystyle\int_0^T \sin^2\omega t dt$

$$W = \frac{RI_m^2}{2}\int_0^T(1-\cos 2\,\omega t)\,dt = \frac{RI_m^2}{2}\left[t - \frac{\sin 2\,\omega t}{2\,\omega}\right]_0^T$$

Le deuxième terme de l'intégration s'annulant sur une période, il reste :

$$W = \frac{RI_m^2}{2}T$$

D'où la puissance moyenne dissipée par effet Joule :

$$P = \frac{W}{T} = \frac{RI_m^2}{2}$$

Or, par définition de l'intensité efficace qui est l'intensité du courant continu I_{eff} dépensant la même énergie calorifique dans la même résistance et pendant le même intervalle de temps, on a :

$$\frac{RI_m^2}{2}T = RI_{eff}^2T$$

On en déduit que : $I_{eff} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$

Soit $\quad I_m = \sqrt{2}\,I_{eff}$

Valeur efficace d'une fonction

Mathématiquement, la valeur efficace d'une fonction périodique est la racine carrée de la valeur moyenne du carré de cette fonction. Si l'on désigne alors par $y\,(t)$ cette fonction, on a :

$$y_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2\,(t)\,dt}$$

$y\,(t)$ peut être soit une différence de potentiel $u\,(t)$, soit une f. é. m., par exemple, $\mathcal{E}\,(t)$.

On trouve alors, en appliquant la formule de définition, que :

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{eff} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}$$

Loi d'Ohm en courant alternatif

Utilisation des nombres complexes

Pour étudier une fonction sinusoïdale de la forme

$$y = Y_m\cos(\omega t + \varphi)$$

il est commode de faire appel aux nombres complexes.

On sait qu'on peut écrire :

$$Y_me^{j(\omega t+\varphi)} = Y_m\,[\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)]$$

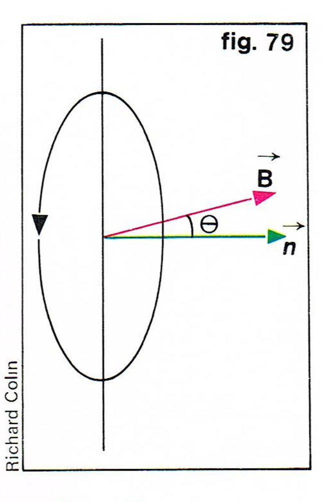
Re signifiant « partie réelle de », on vérifie que :

$$y = \text{Re}\,(Y_me^{j(\omega t+\varphi)})$$

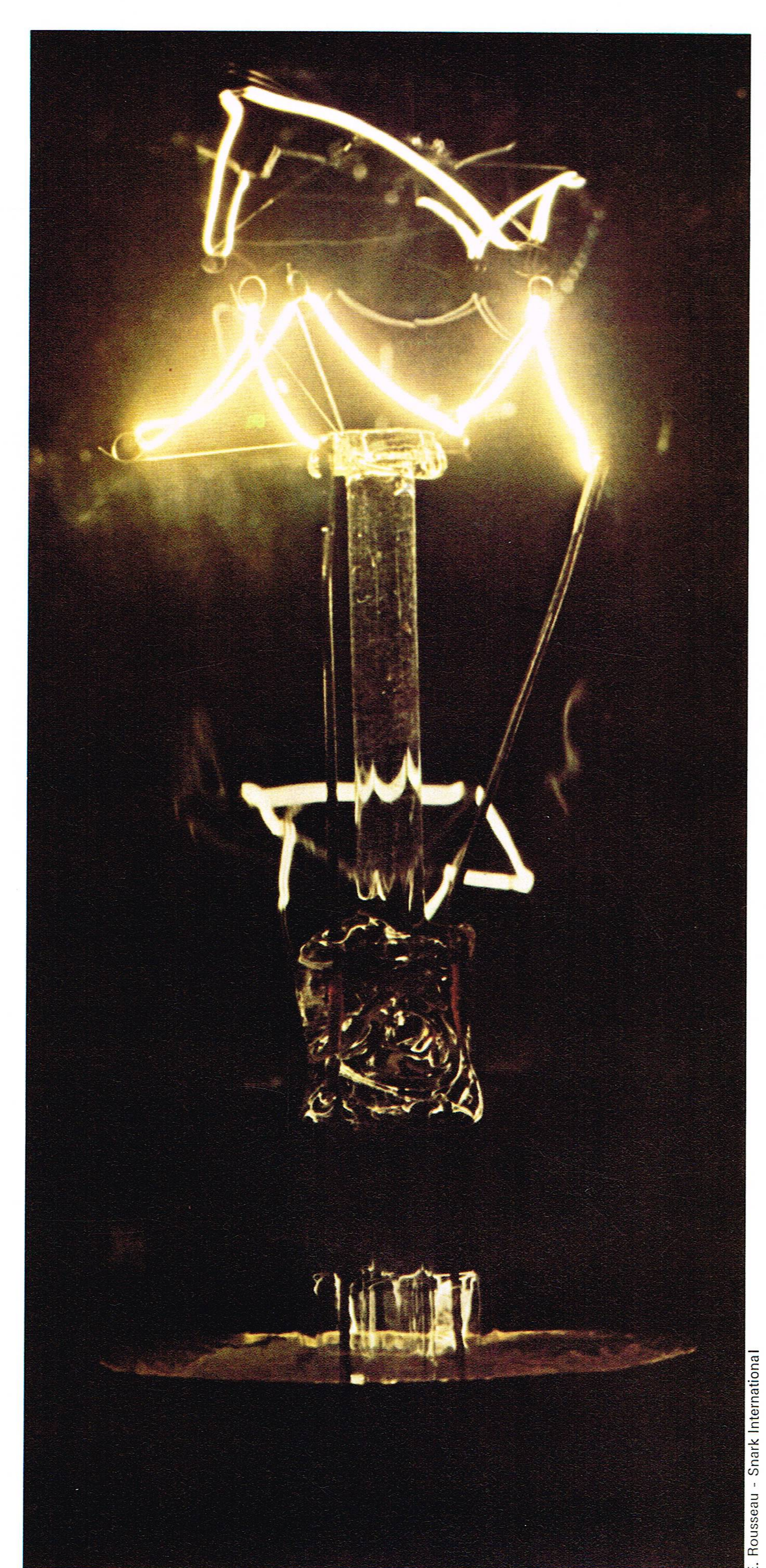
$$\int ydt = \text{Re}\left(-\frac{j}{\omega}Y_me^{j(\omega t+\varphi)}\right) = \text{Re}\left(-\frac{j}{\omega}y\right)$$

(13) $$\frac{dy}{dt} = \text{Re}\,(j\omega Y_me^{j(\omega t+\varphi)}) = \text{Re}\,(j\omega y)$$

$$\frac{d^2y}{dt_2} = \text{Re}\,(-\omega^2Y_me^{j(\omega t+\varphi)}) = \text{Re}\,(-\omega^2y)$$



▲ ***Figure 79 voir développement dans texte ci-contre.***



E. Rousseau - Snark International

Richard Colin

fig. 80

Soit un circuit comprenant en série une résistance pure R, une self pure L et une capacité C (*fig.* 80). Il s'agit de calculer l'intensité $i\ (t)$ qui circule dans la portion AD du circuit lorsqu'on impose une différence de potentiel

$$u = U_m \sin \omega t$$

entre les points A et D.

Calculons les d. d. p. aux bornes de AB, de BC et de CD. Supposons pour cela que, à un instant donné, le courant aille de A vers B. Nous avons alors :

entre A et B ; $u_R = Ri$

entre B et C ; $u_L = L \dfrac{di}{dt}$

entre C et D ; $u_C = \dfrac{q}{C}$ où q est la charge de la capacité

$$= \frac{1}{C} \int i dt$$

Nous avons l'égalité :

$$\text{(14)} \qquad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U_m \sin \omega t = u\ (t)$$

que l'on peut écrire :

$$\text{(15)} \qquad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_m \sin \omega t$$

Cette seconde égalité est une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre variable. La solution est formée de deux termes. Le premier terme, qui correspond à la solution générale de l'équation sans second membre, est de la forme $Ke^{-r_1 t}$. Ce terme est rapidement amorti et correspond à l'établissement du courant. L'autre terme est la solution particulière de l'équation **(15)** ou de l'équation **(14)** et représente le régime permanent, lequel est un régime sinusoïdal.

Résolvons l'équation **(14)** à l'aide des imaginaires. Supposons que le déphasage entre $i\ (t)$ et $u\ (t)$ soit φ et posons :

$$u = U_m e^{j\omega t}$$
$$i = I_m e^{j(\omega t - \varphi)}$$

D'après les équations **(13)**, l'équation **(14)** peut s'écrire :

$$Ri + Lj\omega i - \frac{j}{C\omega} i = u$$

$$\text{(14') ou} \qquad \left(R + Lj\omega - \frac{j}{C\omega}\right) i = u$$

En remplaçant i et u par leurs valeurs respectives, il vient :

$$\left(R + jL\omega - \frac{j}{C\omega}\right) I_m e^{j(\omega t - \varphi)} = U_m e^{j\omega t}$$

Soit :

$$\left[R - j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right] I_m e^{-j\varphi} = U_m$$

$$\left[R - j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right] I_m (\cos \varphi - j \sin \varphi) = U_m$$

En développant et en égalant partie réelle et partie imaginaire, on obtient les deux équations suivantes :

$$\text{(16)} \qquad RI_m \cos \varphi + I_m \sin \varphi \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = U_m$$

$$\text{(17)} \qquad - RI_m \sin \varphi + I_m \cos \varphi \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = 0$$

De ces deux équations, on tire la valeur du déphasage φ entre u et i :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}$$

En élevant les équations **(16)** et **(17)** au carré et en les ajoutant, on obtient :

$$I_m^2 \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right] = U_m^2$$

On obtient alors : $U_{eff} = I_{eff}\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

Cette dernière formule montre que l'intensité efficace est proportionnelle à la tension efficace. Cela permet d'introduire la notion d'*impédance*. L'impédance d'une portion de circuit est le rapport entre la tension efficace à ses bornes et l'intensité efficace du courant y circulant.

Soit $|Z|$ l'impédance de cette portion de circuit. On a alors :

$$U_{eff} = |Z|\ I_{eff}$$

Dans l'exemple que nous venons d'étudier du circuit R, L, C en série, nous avons la valeur de $|Z|$:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

L'impédance est une fonction, bien sûr, des éléments que comporte ce circuit ; c'est également une fonction de la pulsation ω, donc de la fréquence du courant. C'est pour cela que l'on parle d'impédance Z à une fréquence déterminée.

On ne peut cependant pas parler d'impédance pour un courant qui n'est pas sinusoïdal, car alors interviennent les différentes composantes de Fourier ; ou alors on parlera d'impédance de la portion de circuit pour le *n*-ième harmonique. Remarquons qu'une impédance s'exprime en ohms (Ω).

Notions d'impédance complexe

Reprenons l'équation **(14')** où intervient le nombre imaginaire *j* :

$$i\left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right] = u$$

l'expression $Z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ est appelée *impédance complexe*. C'est un nombre complexe dont le module est :

$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$, formule que nous avions trouvée

et dont l'argument φ, donné par $\text{tg}\ \varphi = \dfrac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$ avait été également trouvé.

Donc Z peut s'écrire :

$$Z = |Z|\ e^{j\varphi}$$

Pour une résistance pure, Z est un nombre réel : $Z_R = R$ (il n'y a pas de déphasage entre le courant et la tension). *Pour une self pure :* $Z_L = jL\omega$ (la tension est en avance sur le courant).

Pour une capacité : $Z_C = -\dfrac{j}{C\omega}$ (la tension est en retard sur le courant).

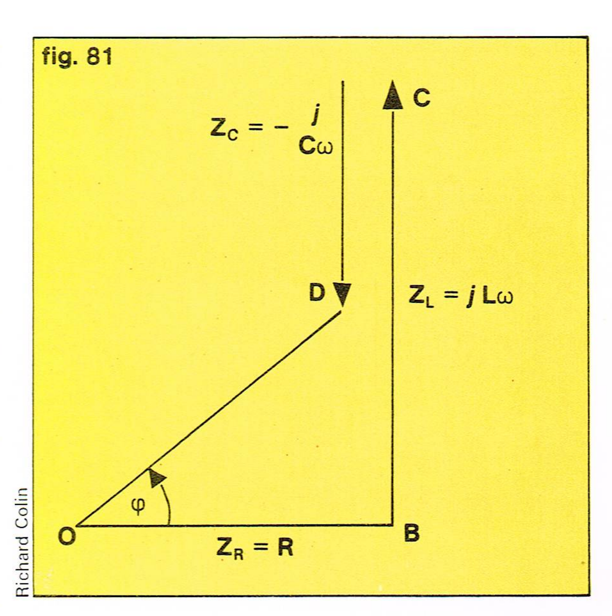
Si les appareils sont mis en série, l'impédance complexe du circuit est la somme des impédances complexes de chaque partie du circuit. Si l'on reprend le circuit de la *figure* 80, on obtient le diagramme suivant (*fig.* 81).

Toutes les lois que nous avions vues en courant continu restent valables en courant alternatif à condition de remplacer les résistances par des impédances complexes ; c'est-à-dire que, si un circuit comporte des résistances, des condensateurs, des selfs, les deux lois de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles) restent valables, en tenant compte des impédances complexes relatives à chaque maille (on assimile chaque élément à son impédance complexe Z).

Étude de la résonance

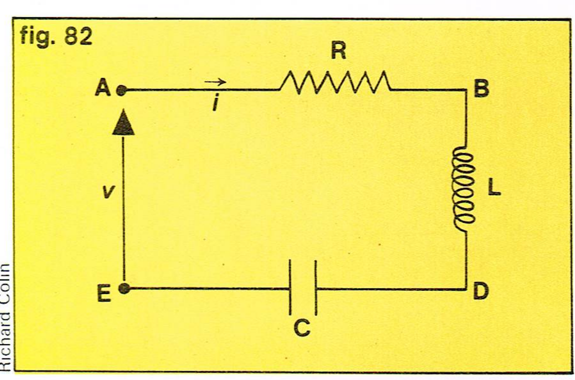
Voyons en premier lieu le cas de la résonance série, représentée par le circuit de la *figure* 82.

Nous avons vu que l'impédance complexe entre A et E était la somme des impédances complexes R, $jL\omega$ et $-\dfrac{j}{C\omega}$:



◄ Page ci-contre, à gauche : filaments de lampe électrique. A droite, figure 80 : circuit série R, L, C.

◄ Figure 81 : diagramme de Fresnel donnant $|Z|$ et φ dans le cas du circuit série R, L, C.



◄ Figure 82 : étude de la résonance série.

$$Z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

d'où :

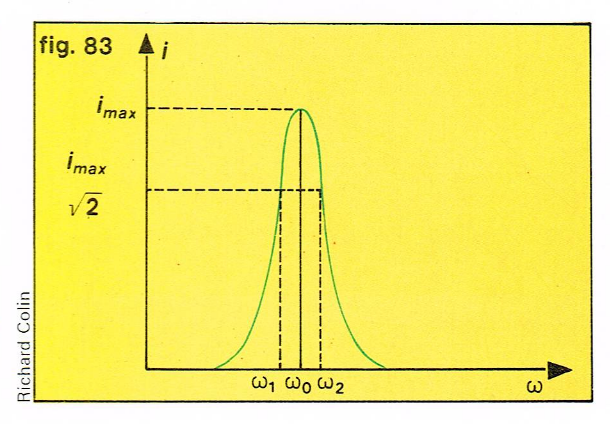
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

et

$$\varphi = \text{Arg}\ Z = \text{Arctg}\ \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

Il est intéressant d'étudier Z et φ en fonction de ω. On voit que $Z = R$ lorsque $L\omega_0 = \dfrac{1}{C\omega_0}$, c'est-à-dire pour une fréquence ω, imposée par le générateur, égale à la fréquence propre du circuit $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

La période correspondante, $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, est la *période propre* du circuit. Le déphasage φ entre *i* et *u* est nul pour cette valeur. De même, l'amplitude *i* du courant est maximale pour $\omega = \omega_0$. On dit qu'il y a résonance série (*fig.* 83).



◄ Figure 83 : l'acuité de la résonance série est définie par le coefficient de surtension $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$.

▶ ***Figure 85 :*** ***cas de la résonance antiparallèle ou antirésonance.***

Il est alors logique de définir l'acuité de la résonance du circuit. Pour cela, on cherche les valeurs ω_1 et ω_2, proches de ω_0, telles que $|Z| = \sqrt{2}\,R$ ou, ce qui revient au même,

$$i = \frac{i_{max}}{\sqrt{2}}$$

$|Z| = \sqrt{2}\,R$ s'écrit : $$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{2}\,R$$

Soit : $$\pm R = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

et $$\pm RC\omega = LC\omega^2 - 1$$

En introduisant $LC = \dfrac{1}{\omega_0^2}$ on obtient :

$$\pm \frac{R}{L\omega_0}\frac{\omega}{\omega_0} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\,; \quad \text{soit} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \pm \frac{\omega}{\omega_0}\frac{R}{L\omega_0} - 1 = 0$$

Cette dernière équation a deux racines positives ; la plus grande a pour valeur :

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{R}{2\,L\omega_0}\right)^2} + \frac{R}{2\,L\omega_0}$$

la plus petite :

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{R}{2\,L\omega_0}\right)^2} - \frac{R}{2\,L\omega_0}$$

Ainsi : $$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{R}{L\omega_0}$$

▶ ***Page ci-contre :*** ***l'électricité à l'ère des tours (quartier de la Défense, Paris).***

On caractérise ainsi l'acuité de la résonance du circuit par le coefficient :

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{C\omega_0 R}$$

que l'on appelle *coefficient de surtension*. Plus Q est élevé, plus le pic de résonance est étroit.

Surtension pendant la résonance. Nous avons vu que la tension aux bornes de la self était $u_L = jL\omega i$. Aux bornes de la capacité $u_C = \dfrac{-j}{C\omega}\,i$.

Or, lors de la résonance, les valeurs algébriques de u_C et de u_L sont égales et de sens opposé, de sorte que la tension appliquée est uniquement celle appliquée à la résistance (*fig.* 84). $u_{appliquée} = Ri$.

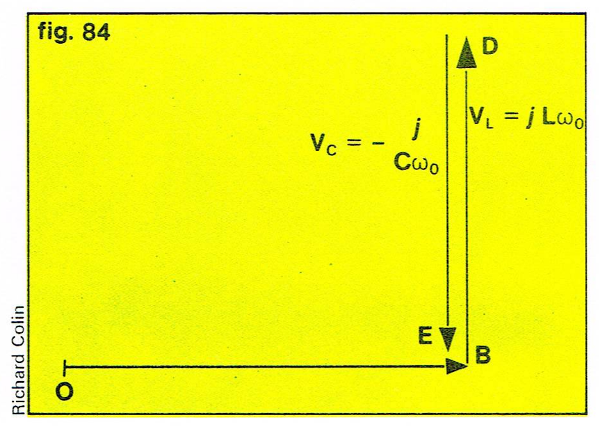
Nous voyons donc que, à la résonance :

$$\left|\frac{u_L}{u_{app}}\right| = \frac{L\omega_0}{R} = Q$$

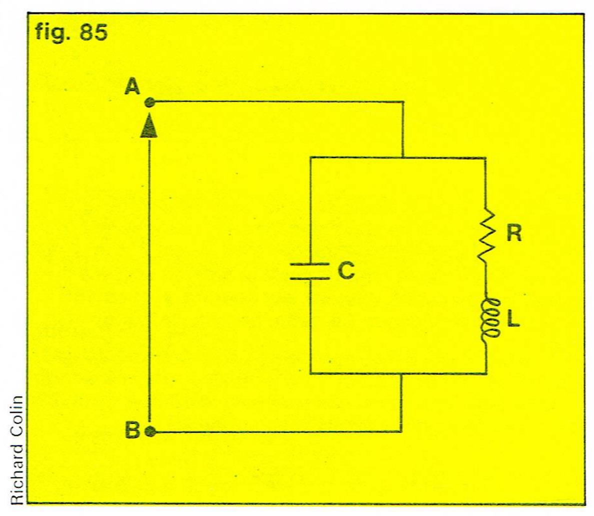
$$\left|\frac{u_C}{u_{app}}\right| = \frac{1}{C\omega_0 R} = Q$$

Ainsi, à la résonance, la tension aux bornes de la self et aux bornes de la capacité est égale à Q fois la tension appliquée. On dit qu'il y a surtension pendant la résonance. Q peut en général varier entre dix et plusieurs centaines.

Étudions à présent la résonance antiparallèle ou *antirésonance*. Une résistance et une self en série sont montées en parallèle aux bornes d'une capacité (*fig.* 85). On applique une tension u aux bornes A et B de ce circuit. Calculons l'impédance $\bar{Z}_{AB}$ aux bornes de AB.



▶ ***Figure 84 :*** ***diagramme de Fresnel au moment de la résonance.***



$$\bar{Z}_{AB} = \frac{Z_C\,(Z_R + Z_L)}{Z_C + Z_R + Z_L} \quad \text{avec } Z_R = R$$

$$Z_C = -\frac{j}{C\omega}$$

$$Z_L = jL\omega$$

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

En mettant $L\omega_0$ en facteur et en se rappelant que :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

on obtient :

$$\bar{Z}_{AB} = L\omega_0\,\frac{\dfrac{1}{Q} + j\,\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + \dfrac{j}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

Lors de la résonance, $\bar{Z}_{AB}$ devient :

$$\bar{Z}_{AB} = L\omega_0\,\frac{\dfrac{1}{Q} + j}{\dfrac{j}{Q}} = L\omega_0\,(Q - j)$$

Or le module de j peut être négligé devant Q.
On obtient donc, à la résonance :

$$\bar{Z}_{AB} = L\omega_0 Q = \frac{L^2\omega_0^2}{R} = Q^2R$$

Donc, à la résonance, $\bar{Z}_{AB}$ est une résistance pure, très grande devant R.

Que se passe-t-il à la résonance en ce qui concerne les courants ? Le courant $i_C = \dfrac{u}{Z_C} = VjC\omega_0$. Le courant $i_L = \dfrac{u}{Z_R + Z_L} = \dfrac{u}{R + jL\omega_0}$.

Or, nous avons vu que, à la résonance, $L\omega_0 = QR$. Donc, $L\omega_0$ est grand devant R et i_L est peu différent de $\dfrac{u}{jL\omega_0}$.

D'autre part, à la résonance, comme $Z_{AB} = L\omega_0 Q$, on a donc $i_{total} = \dfrac{u}{Z_{AB}} = \dfrac{u}{L\omega_0 Q}$.

Donc on obtient $$\left|\frac{i_L}{i_{total}}\right| = \frac{L\omega_0 Q}{L\omega_0} = Q$$

Ainsi, à la résonance, $|i_L| = Q\,|i_{total}|$. C'est-à-dire qu'il y a « surintensité ». Le courant qui circule par exemple dans la self est Q fois celui débité par le générateur.

Pont de Wheatstone en courant alternatif

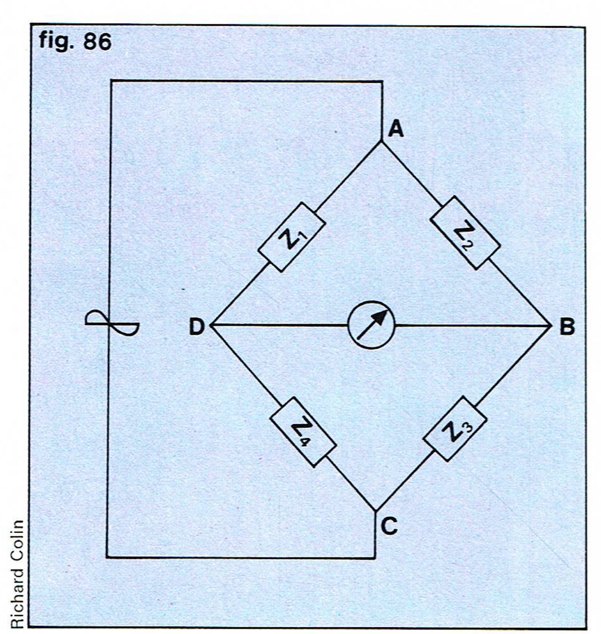
Soit la *figure* 86. Elle est constituée par quatre impédances Z_1, Z_2, Z_3, Z_4. Soit un appareil de mesure des courants, permettant de déceler de faibles intensités. Lorsque le pont est en équilibre, aucun courant ne passe dans cet appareil. Cela signifie que les points D et B sont au même potentiel. Soit alors i_1 le courant passant dans la branche ADC et i_2 celui passant dans la branche ABC.

H. Glogauen - Viva



H. Gloaguen – Viva

▶ *A gauche, figure 86 : pont de Wheatstone en courant alternatif. A droite, figure 88 : le pont de Maxwell.*



Nous obtenons les équations suivantes :

$$V_A - V_D = Z_1 i_1 = V_A - V_B = Z_2 i_2$$

et $$V_D - V_C = Z_4 i_1 = V_B - V_C = Z_3 i_2$$

Donc $$Z_1 i_1 = Z_2 i_2$$

et $$Z_4 i_1 = Z_3 i_2$$

Soit : $$\frac{Z_1}{Z_4} = \frac{Z_2}{Z_3}$$

c'est-à-dire : $Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$.

C'est la même formule que l'on trouverait pour les courants continus, mais les résistances sont ici remplacées par des impédances.

Une application de cette formule est la détermination de la valeur d'une self ou d'une capacité.

Considérons d'abord le cas d'une self. Soit le montage de la *figure* 87. R_1 et R_3 sont des résistances pures ; Z_2 est une self pure et Z_4 une capacité pure.

$$R_1 R_3 = Z_2 Z_4 = (jL\omega)\left(-\frac{j}{C\omega}\right) = \frac{L}{C}$$

Donc, connaissant C, R_1, R_3, on peut en déduire la valeur de L. Cependant, ce schéma est assez simpliste, car, de manière générale, une self n'est jamais pure. Elle comprend une partie résistive. Aussi utilise-t-on le *pont de Maxwell* qui permet de déterminer la valeur de la self et de sa résistance. Le montage est celui de la *figure* 88.

$$R_1 R_3 = (R_2 + jL\omega)\left(\frac{-jR_4}{C\omega R_4 - j}\right)$$

$$R_1 R_3 = (R_2 + jL\omega)\left(\frac{R_4}{1 + jC\omega R_4}\right)$$

Soit : $$R_1 R_3 + jC\omega R_1 R_3 R_4 = R_2 R_4 + jL\omega R_4$$

En égalant partie réelle et partie imaginaire, on obtient $R_1 R_3 = R_2 R_4$; d'où l'on tire la valeur de R_2 connaissant celles de R_1, R_3, R_4.

On en déduit aussi celle de L :

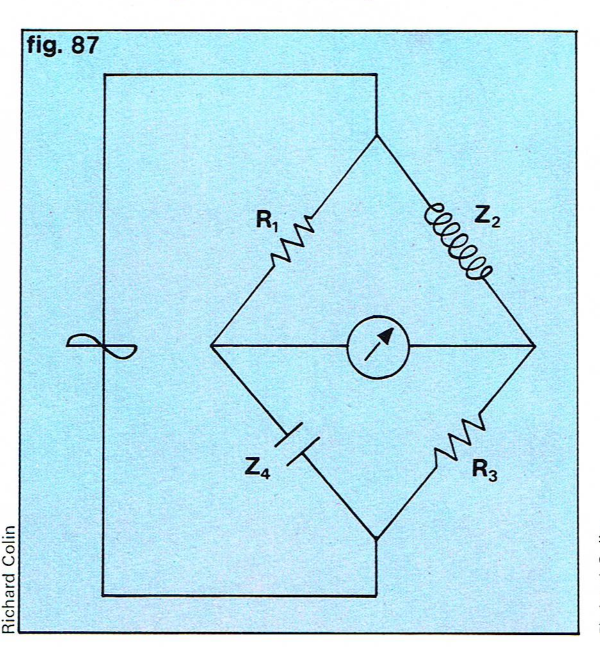
$$L = C R_1 R_3$$

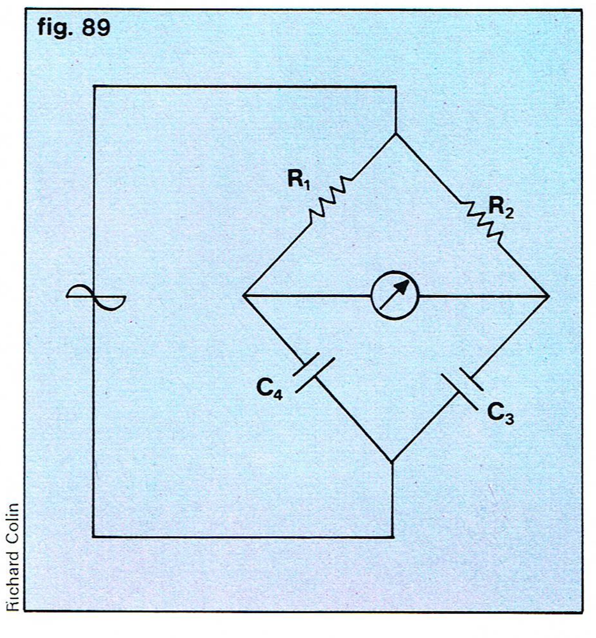
La mesure d'une capacité, fondée également sur l'équilibre du pont, peut s'effectuer à l'aide du *pont de Sauty* (*fig.* 89). Il comprend les résistances R_1 et R_2, ainsi que les capacités C_3 et C_4. Dans ce montage, l'une de ces capacités est connue, par exemple C_3, et C_4 est l'inconnue. L'équation de l'équilibre donne :

$$R_1\left(\frac{-j}{C_3\omega}\right) = R_2\left(\frac{-j}{C_4\omega}\right)$$

soit :

$$\frac{R_1}{C_3} = \frac{R_2}{C_4} \qquad \text{donc } C_4 = \frac{R_2}{R_1} C_3$$





▶ *A gauche, figure 87 : calcul de l'impédance d'une self par la méthode du pont de Wheatstone. A droite, figure 89 : le pont de Sauty.*

Loi générale de l'électromagnétisme - Les équations de Maxwell

Rappel des équations dans le cas des régimes indépendants du temps

Nous allons d'abord rappeler les équations vues en électrostatique. Elles font intervenir trois vecteurs principaux $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{P}$, tels que $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$. Ces vecteurs sont tels que :

$$\text{div}\,\vec{D} = \rho$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = 0$$

Si nous faisons intervenir les composantes tangentielles et les composantes normales, le passage d'un milieu d'indice 1 à un milieu d'indice 2 se traduit par les relations suivantes, la normale n_{12} étant orientée du milieu 1 vers le milieu 2 :

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\,\vec{n}_{12} = \sigma$$

$$E_{T_2} = E_{T_1}$$

Nous avons vu aussi que seulement dans le cas d'un diélectrique parfait, isotrope, nous avions la relation entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

Le champ $\vec{E}$ dérive d'un potentiel V, ce qui s'écrit :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$$

Dans un milieu où existe une densité de charges volumiques ρ_v, le potentiel V s'écrit, à une constante près :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_\tau \frac{\rho_v d\tau}{\pi}$$

V obéit d'autre part à la relation de Poisson :

$$\nabla^2 V + \frac{\rho_v}{\varepsilon} = 0$$

Considérons à présent les phénomènes magnétiques indépendants du temps. Intervenaient les trois vecteurs principaux, $\vec{B}$, $\vec{H}$, et $\vec{J}$, liés entre eux par l'équation : $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{J}$.

$\vec{B}$ et $\vec{H}$ sont tels que : $\text{div}\,\vec{B} = 0$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} = \vec{J}$$

Ce qui entraîne, en utilisant la même convention sur la normale qu'en électrostatique, les relations :

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\,\vec{n}_{12} = 0$$

et $$(H_{T_2} - H_{T_1}) = \vec{i_s} \wedge \vec{n}_{12}$$

où i_s est le courant en surface.

Si la substance magnétique est parfaite, isotrope, alors s'ajoute l'expression $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

Une autre relation lie $\vec{B}$ au potentiel vecteur $\vec{A}$.

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}d\tau}{r}$$

car $$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$$

D'autre part, $\vec{A}$ vérifie l'équation :

$$\nabla^2\vec{A} + \mu\vec{J} = 0$$

Le rappel de ces formules concernant l'électrostatique et la magnétostatique nous fait ainsi apparaître de nombreuses analogies.

Enfin, dans le cas d'un conducteur où circule un courant continu de densité $\vec{J}$, ce courant obéit à la loi d'Ohm :

$$\vec{J} = \gamma\vec{E}$$

et la conservation de l'électricité s'exprime par :

$$\text{div}\,\vec{J} = 0$$

D'autre part, à la surface de séparation de deux milieux continus, on a également l'équation de continuité de la composante normale :

$$(\vec{J}_2 - \vec{J}_1)\,\vec{n}_{12} = 0$$

Rappel des résultats dans le cas où les phénomènes électromagnétiques dépendent du temps

On néglige les phénomènes de propagation dans le cas où la longueur d'onde est grande devant les dimensions du circuit. Alors, comme interviennent les phénomènes d'induction, le champ $\vec{E}$ ne dérive plus d'un potentiel, ce qui se traduit par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Toutes les autres grandeurs apparues dans les équations indépendantes du temps restent inchangées.

Introduction du courant de déplacement - Les équations de Maxwell

Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$$

soit $$\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H}\cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

Donc l'équation locale du théorème d'Ampère est : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} = \vec{J}$, ce qui équivaut à $\text{div}\,\vec{J} = 0$. Cette équation, qui est valable en courant continu, ne l'est plus dans les phénomènes dépendant du temps, puisque l'équation de conservation de l'électricité s'écrit :

$$\text{div}\,\vec{J} + \frac{\partial\rho_v}{\partial t} = 0$$

Comme $\text{div}\,\vec{D} = \rho_v$, cette équation s'écrit :

$$\text{div}\,\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\,\vec{D}) = 0$$

Soit $$\text{div}\left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = 0$$

Cela signifie que le vecteur densité de courant total $\vec{J}_t = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ est à flux conservatif.

Si nous introduisons alors le vecteur densité de « courant de déplacement » $\vec{J}_D = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ et si nous appelons $\vec{J} = \vec{J}_C$, ce qui correspond au vecteur densité de « courant de conduction », alors nous obtenons l'expression $\vec{J}_t = \vec{J}_C + \vec{J}_D$. Dire que $\vec{J}_t$ est à flux conservatif, c'est dire que c'est la densité de courant $\vec{J}_D$ qui est la continuité de la densité de courant $\vec{J}_C$ dans le diélectrique.

C'est Maxwell qui a eu le génie d'attribuer à ce courant de déplacement les mêmes propriétés magnétiques que celles du courant de conduction.

L'équation locale du théorème d'Ampère devient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} = \vec{J}_t = \vec{J}_C + \vec{J}_D = \vec{J}_C + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Les relations de Maxwell sont alors les suivantes :

$$\text{div}\,\vec{D} = \rho_v$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} = \vec{J}_C + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Ces relations doivent être complétées par les équations de continuité que nous avons vues dans les relations indépendantes du temps.

Dans le vide (il n'y a ni charges, ni courants), les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{div}\,\vec{D} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{avec } \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \quad \text{et } \vec{B} = \mu_0\vec{H}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

▶ *Les projecteurs, ou l'importance de l'électricité dans le succès de la « pop » musique.*

Homer Sykes - Viva



▶ *Le physicien écossais* **James Clerk Maxwell** *(1831-1879) dont le principal titre de gloire est sa théorie électromagnétique de la lumière (1865).*

P. Popper

Nous voyons, à partir de ces relations dans le vide, qu'une variation de $\vec{B}$ par rapport au temps crée un champ $\vec{E}$, et que, réciproquement, une variation de $\vec{E}$ par rapport au temps crée un champ magnétique $\vec{B}$.

On entrevoit alors le fait que la propagation d'une onde électromagnétique est liée à ces équations dont la résolution va nous permettre de calculer la vitesse de propagation de cette onde.

On peut étudier cette propagation à partir des potentiels. Pour cela, nous établissons ces potentiels dans le vide (mais où il y a des charges et des courants, c'est-à-dire $\rho \neq 0$ et $\vec{i} \neq 0$).

Partons des équations $\text{div}\,\vec{D} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} = \vec{J}_C + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Comme $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, on peut écrire :

$$\text{div}\,(\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\mu_0}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ainsi, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

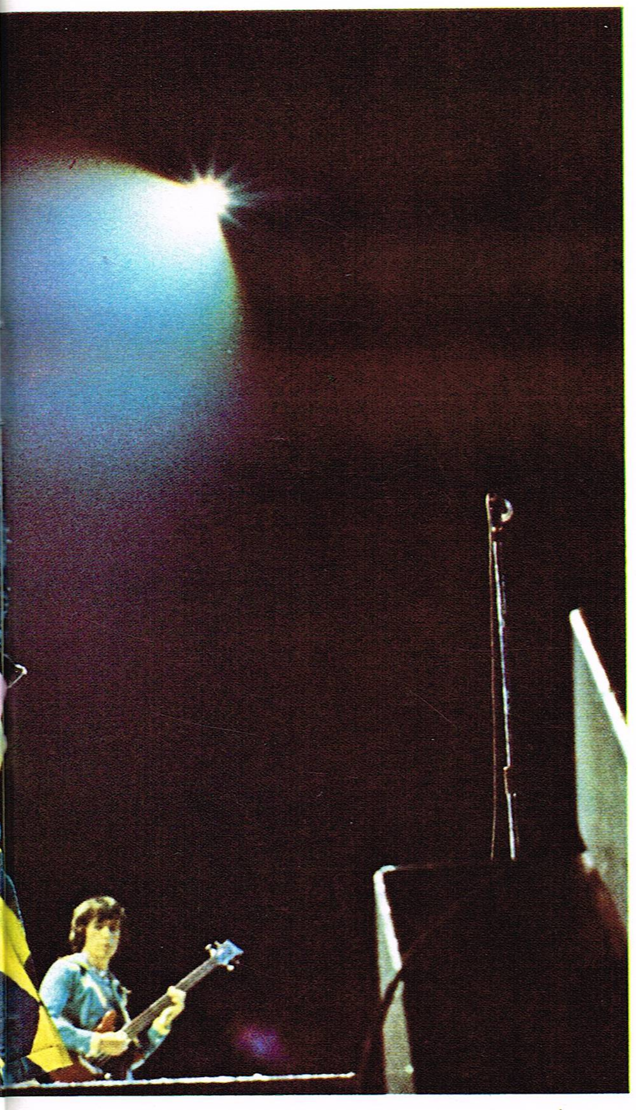
Comme $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

Or, $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$.

On obtient ainsi l'équation :

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu_0 \vec{J}$$



Par le même genre de calcul, on obtiendrait une relation analogue pour V :

$$\nabla^2 V - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) - \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

Ces deux équations se simplifient en introduisant l'équation de Lorentz :

$$\operatorname{div}\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

et comme on se place dans un milieu linéaire, isotrope, homogène en posant :

$$\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

on obtient ainsi :

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

et en introduisant l'opérateur d'alembertien

$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, ces équations s'écrivent :

$$\square \cdot \vec{A} = -\mu_0\vec{J}$$

$$\square \cdot V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

Ainsi, nous voyons que les équations satisfaites par $\vec{A}\,(r, t)$ et $V\,(r, t)$ sont :

$$\square \cdot \vec{A}\,(r \cdot t) = -\mu_0\vec{J}\,(r, t)$$

$$\square \cdot V\,(r, t) = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}\,(r, t)$$

Alors que les équations satisfaites par $\vec{A}\,(r)$ et $\vec{V}\,(r)$ en régime permanent sont :

$$\Delta^2\vec{A}\,(r) = -\mu_0\vec{J}$$

et

$$\Delta^2 V\,(r) = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

De même, l'équation de propagation dans le vide, où il n'y a pas de charges ni de courant, est :

$$\square \cdot g\,(r, t) = 0$$

où $g\,(r, t)$ peut représenter $V\,(r, t)$ ou toute composante de $\vec{A}\,(r, t)$ ou de $\vec{B}\,(r, t)$ ou de $\vec{E}\,(r, t)$.

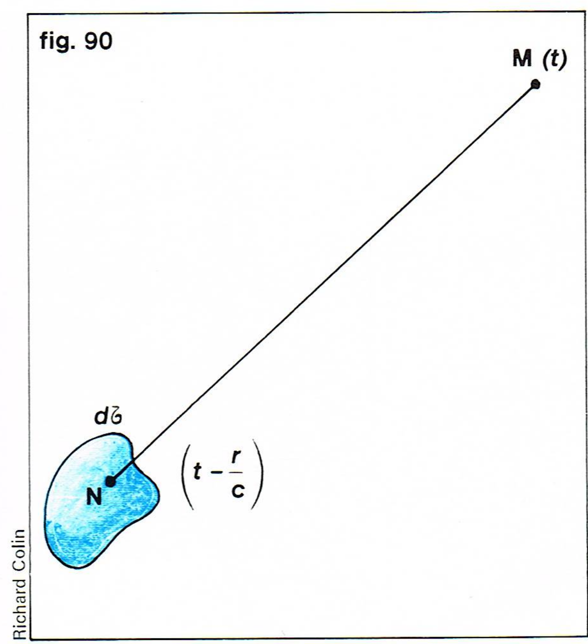
Les solutions des équations de propagation sont appelées *potentiels retardés*. Ces équations sont :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\tau \frac{\rho_v\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\,d\tau$$

et

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\vec{J}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\,d\tau$$

Nous n'en ferons pas la démonstration dans le cadre de cet ouvrage. Nous dirons simplement que, si on les appelle potentiels retardés, c'est que, comme l'onde électromagnétique se propage avec la vitesse c, les potentiels V et $\vec{A}$ en un point M à l'instant t sont produits par des charges et des courants qui, en un instant antérieur $\left(t - \frac{r}{c}\right)$, se trouvaient au point N (*fig.* 90).



◀ ***Figure 90 :*** ***les potentiels $\vec{A}$ et V à l'instant t en un point M sont produits par des charges et des courants qui, en un instant antérieur $t - \frac{r}{c}$ se trouvaient au point N.***

Étude directe de la propagation des champs

Les phénomènes de propagation peuvent être démontrés directement sans passer par l'intermédiaire des potentiels.

Plaçons-nous dans le vide et supposons qu'il n'y ait ni charges spatiales, ni courants. Les équations de Maxwell s'écrivent :

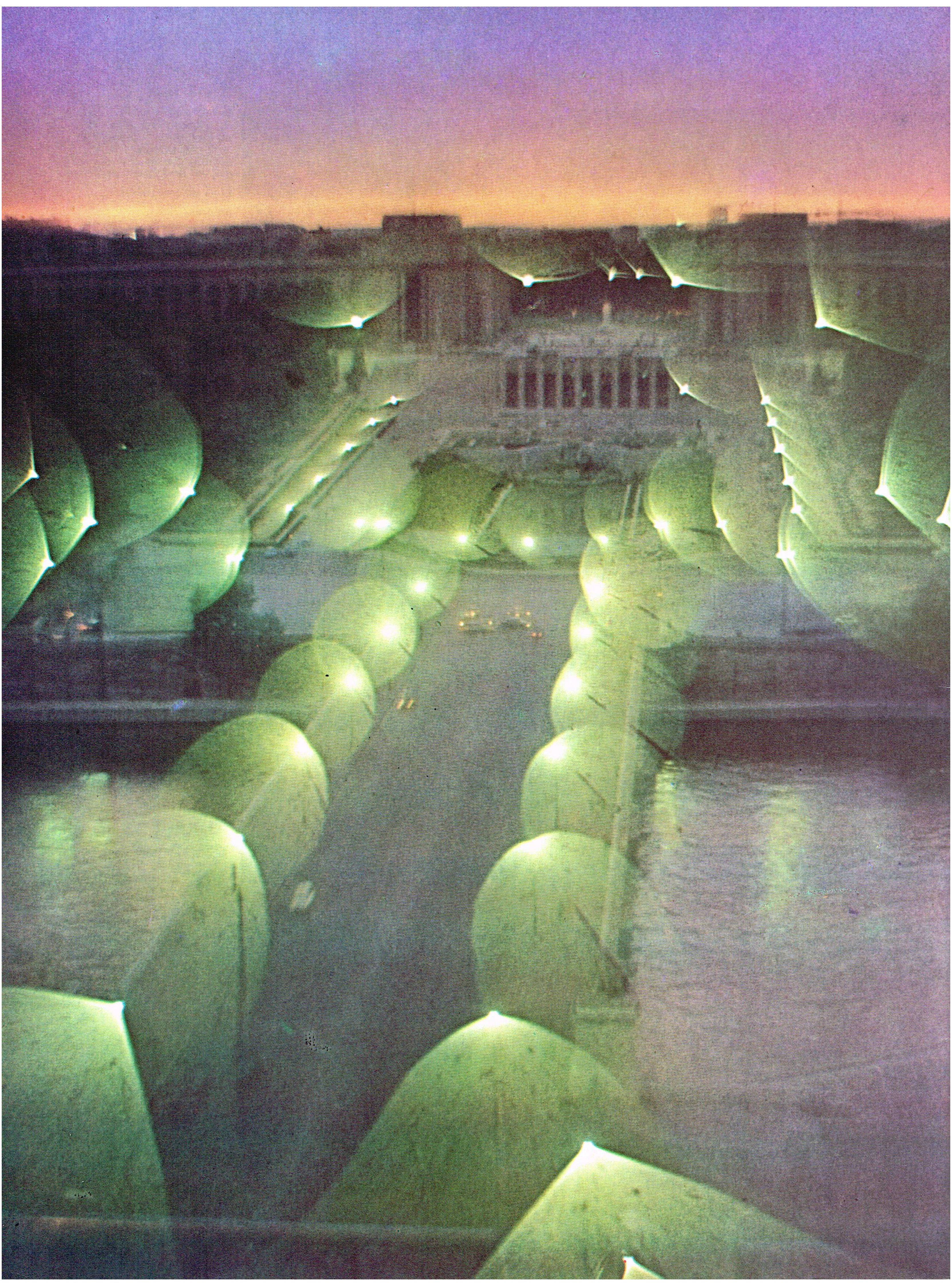
$$\operatorname{div}\vec{E} = 0; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

La dernière équation s'écrit : $\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

Soit : $-\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

Soit encore $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\operatorname{div}\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$



Comme $\overrightarrow{\text{grad}}$ (div $\vec{E}$) = 0, on obtient l'équation finale de propagation de $\vec{E}$, ou d'une de ses composantes.

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Dans un milieu linéaire, homogène, isotrope (ε, μ) on aurait trouvé l'équation :

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{v^2} = \varepsilon\mu$$

On trouverait de la même manière une équation identique pour $\vec{H}$. Dans le vide, on aurait :

$$\nabla^2\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Onde plane polarisée rectilignement dans un diélectrique

Le problème est le suivant. Est-il possible de trouver des ondes planes, perpendiculaires par exemple à Oz qui est la direction de propagation que l'on choisit pour ces ondes, et qui satisfassent à $\square \cdot \vec{E} = 0$ et $\square \cdot \vec{H} = 0$?

$\vec{E}$ et $\vec{H}$ ne sont alors fonction que de z : $\vec{E} = \vec{E}(z)$ et $\vec{H} = \vec{H}(z)$.

$$\square \cdot \vec{E} \text{ s'écrit } \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

dont la solution (propagation de l'onde dans le sens des z positifs) est $\vec{E} = f\left(t - \frac{z}{v}\right)$, où f est une fonction quelconque.

Transversalité des ondes

Cherchons une solution harmonique à $\vec{E} = f\left(t - \frac{z}{v}\right)$, de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right)$, où $\vec{E}_0$ est un vecteur constant dont les composantes suivant Ox, Oy, Oz sont respectivement E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}.

Les composantes de E peuvent alors s'écrire :

$$E_x = E_{0x} \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right)$$

$$E_y = E_{0y} \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right)$$

$$E_z = E_{0z} \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right)$$

$$\text{or div } \vec{E} \text{ s'écrit : } \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Les deux premiers termes sont nuls :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = E_{0z}\frac{\omega}{v} \sin \omega \left(t - \frac{z}{v}\right) = 0 \quad \text{donc} \quad E_{0z} = 0$$

Donc le vecteur $\vec{E}_0$ n'a pas de composante selon Oz. Il est perpendiculaire à cet axe. On dit qu'il est transversal. Pour simplifier, supposons que $\vec{E}_0$ soit porté par l'axe Ox. Alors $\vec{E}$ se propage selon Oz en restant en chaque point parallèle à Ox. Or $\vec{E}$ est nécessairement accompagné du vecteur $\vec{H}$ lors de la propagation d'une onde électromagnétique. Ce vecteur $\vec{H}$ obéit à l'équation de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

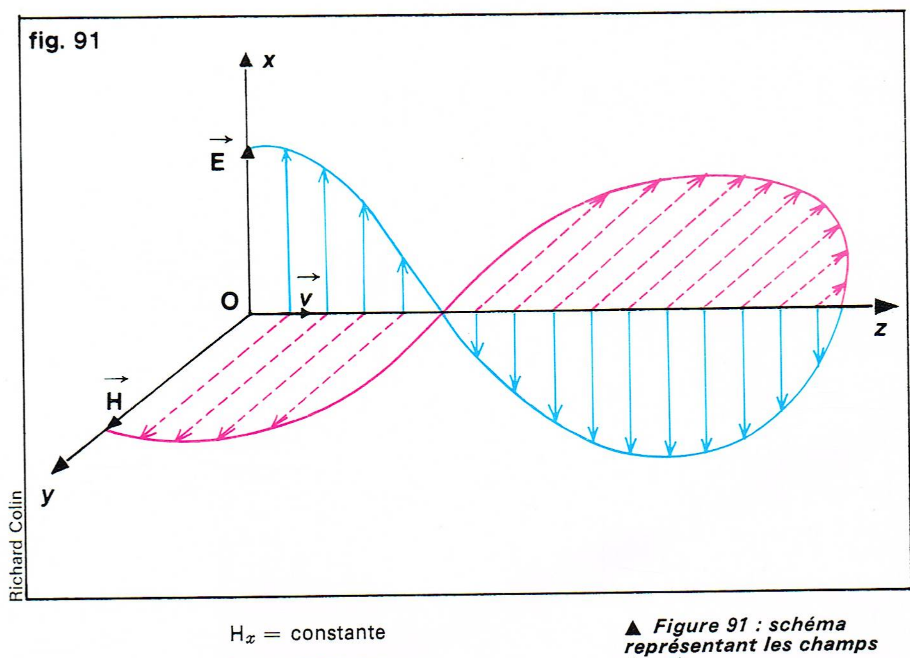
Cette équation est équivalente à :

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

$$\text{et} \qquad -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

dont l'intégration donne :

$$H_y = \frac{E_{0z}}{\mu v} \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right) + \text{constante}$$



▲ ***Figure 91 : schéma représentant les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ à un instant donné.***

$$H_x = \text{constante}$$

$$H_y = \text{constante}$$

Si l'on choisit ces deux constantes nulles de façon à éliminer la composante continue du champ magnétique, on voit alors que $\vec{H}$ est également transversal. Il est porté par Oy. Nous voyons ainsi que $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont perpendiculaires dans le plan d'onde. Nous voyons également que $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont en phase en tout point de l'espace.

Cherchons le rapport de $\vec{E}/\vec{H}$.

$$\frac{\vec{E}}{\vec{H}} = \mu v = \frac{\mu}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

L'ensemble des deux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ représente une onde plane polarisée rectilignement. (Car, pour chacun des champs, la composante garde en chaque point une direction donnée.) Ces deux vecteurs forment avec le vecteur $\vec{v}$ un trièdre trirectangle direct $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{v}$.

La *figure* 91 représente les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ à un instant donné.

Propagation de l'énergie électromagnétique

Dans un milieu dont les constantes sont ε, μ, nous pouvons écrire les deux équations de Maxwell suivantes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} = \vec{J} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

D'autre part, $\text{div}\,(\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H}$

$$\text{div}\,(\vec{E} \wedge \vec{H}) = -\mu\vec{H} \cdot \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \vec{J} \cdot \vec{E} - \varepsilon\vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

que l'on peut également écrire en désignant par $\vec{\mathfrak{F}}$ le produit $\vec{E} \wedge \vec{H}$. $\vec{\mathfrak{F}}$ est le *vecteur de Poynting*.

$$\text{div}\,\vec{\mathfrak{F}} = -\vec{J} \cdot \vec{E} - \mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H^2}{2}\right) - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2}{2}\right)$$

En intégrant, on obtient :

$$\iiint_\tau \text{div}\,\vec{\mathfrak{F}} \cdot d\tau = \iint_\Sigma \vec{\mathfrak{F}} \cdot \vec{n}dS =$$

$$-\iiint_\tau \vec{J}\vec{E}d\tau - \frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau \left(\frac{\mu H^2}{2} + \frac{\varepsilon E^2}{2}\right) d\tau$$

Il est impossible de donner une interprétation physique de cette équation sans utiliser la loi de force de Lorentz :

$$\vec{F}(r, t) = q\vec{E}(r, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(r, t)$$

Cherchons la valeur de $\iiint_\tau \vec{J}\vec{E}\, d\tau$

◀ ***Page ci-contre : la lumière, magicienne d'un crépuscule brumeux sur le Trocadéro (Paris).***



Snark International

▲ ***Construction de l'étoile qui surmontait le palais de l'Électricité à l'Exposition universelle de 1900 (Bibliothèque nationale).***

La puissance fournie à la charge q par les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ est $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$. Nous voyons en l'occurrence que $\vec{B}$ ne fournit aucun travail.

Supposons que le courant soit dû simplement à la charge q placée en r'. Alors, en utilisant la fonction delta de Dirac, on peut écrire que :

$$\vec{J} = \rho_v \vec{v} = q\vec{v}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

car la charge q est nulle en tout point r différent de r'.

Ainsi : $$\iiint_\tau \vec{J}\vec{E}\,d\tau = \iiint_\tau q\vec{v}\vec{E}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}')\,d\tau = \vec{F}\vec{v} = \frac{dW}{dt}$$

Par conséquent, si l'on désigne par u l'énergie électromagnétique $\frac{\mu H^2}{2} + \frac{\varepsilon E^2}{2}$ on obtient l'équation :

$$\frac{du}{dt} + \frac{dW}{dt} + \iint_\Sigma (\vec{\mathfrak{I}} \cdot \vec{n})\,dS = 0$$

C'est-à-dire que l'accroissement d'énergie électromagnétique plus l'accroissement de travail fourni par unité de temps à la charge q égale l'accroissement d'énergie s'écoulant dans le volume τ. Ainsi $\vec{\mathfrak{I}}$ peut-il être interprété comme un vecteur densité de flux d'énergie (énergie par unité de temps et de surface).

Cas des solutions transverses

Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire dans la direction de propagation de l'onde plane. Il est facile de montrer que la transversabilité de l'onde s'exprime par $v\vec{B} = \vec{n} \wedge \vec{E}$.

$$\vec{\mathfrak{I}} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{1}{\mu}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{\mu}\vec{E} \wedge \left(\frac{1}{v}\vec{n} \wedge \vec{E}\right)$$

$$\vec{\mathfrak{I}} = \frac{1}{v\mu}\{\vec{E} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{E})\} = \frac{1}{v\mu}\{(\vec{E} \cdot \vec{E})\,\vec{n} - (\vec{E} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{E}\}$$

$$\vec{\mathfrak{I}} = \frac{1}{v\mu}E^2\vec{n}, \quad \text{car } \vec{E} \cdot \vec{n} = 0.$$

Cela confirme que le vecteur $\vec{\mathfrak{I}}$ est perpendiculaire au plan de l'onde.

De même, l'équation $v\vec{B} = \vec{n} \wedge \vec{E}$ peut s'écrire :

$$\vec{E} = v\vec{B} \wedge \vec{n}$$

Aussi $$\vec{\mathfrak{I}} = \frac{1}{\mu}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{\mu}\{(v\vec{B} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{B}\} = \frac{v}{\mu}B^2\vec{n} - (\vec{B} \cdot \vec{n})\,\vec{B}$$

$$\vec{\mathfrak{I}} = \frac{v}{\mu}B^2 \cdot \vec{n}$$

Ainsi $$\vec{\mathfrak{I}} = \frac{1}{v\mu}E^2\vec{n} = \frac{v}{\mu}B^2\vec{n}$$

On en déduit que :

$$\frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu}$$

Donc, pour les solutions transverses, la densité d'énergie associée au champ $\vec{E}$ est égale à celle associée au champ $\vec{B}$. Comme exemple d'application des équations de Maxwell, nous pouvons citer, entre autres, les équations de propagation dans les lignes sans perte.

BIBLIOGRAPHIE

ANNEQUIN et BOUTIGNY, *Électricité 1 : mathématiques supérieures,* Vuibert. - BRUHAT G., *Électricité,* 8e édition par G. Goudet, Masson et Cie. - LANDAU L. et LIFCHITZ E., éditions de Moscou. - LONCHAMP J.-P., professeur à la faculté des sciences de Strasbourg, fascicule 2, *Courant continu, courant alternatif,* Claude Hermant. - MAGNAN C., professeur à la faculté des sciences de Paris, fascicule édité par l'Association corporative des étudiants en sciences. - QUINET J. et PETITCLERC A., *Théorie et pratique des circuits de l'électronique et des amplificateurs,* t. I, Dunod. - ROUAULT M., avec la participation de MERGAULT P., *Électricité,* fascicule 2, Masson et Cie. - RUMEAU G. et GUINIER G., fascicules 1 et 2, librairie Delagrave.